Generadores y cogeneradores

Bruno Stonek
bruno@stonek.com

3 de febrero de 2012

1. Generadores y cogeneradores

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

- Decimos que un objeto $G \in \mathcal{C}$ es un *generador* (o *separador*) de $\mathcal{C}$ si $\mathrm{Hom(G,-)} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ es fiel. Es decir, si dadas dos flechas $f, g : A \to B$ con $f \neq g$ existe $h : G \to A$ tal que $fh \neq gh$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

- Decimos que un objeto $C \in \mathcal{C}$ es un *cogenerador* (o *coseparador*) de $\mathcal{C}$ si $\mathrm{Hom(-,C)} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ es fiel. Es decir, si dadas dos flechas $f, g : A \to B$ con $f \neq g$ existe $h : B \to C$ tal que $hf \neq hg$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo. En **Set**, cualquier conjunto unitario $\{x\}$ es un generador: dadas dos funciones $f, g : A \to B$, si son distintas entonces difieren en algún $a \in A$. Luego la función $h : \{x\} \to A$, $x \mapsto a$ sirve.

Un cogenerador es $\{0, 1\}$, el conjunto de "valores de verdad". Dadas $f, g : A \to B$ distintas, sea $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Definimos $h : B \to \{0, 1\}$ como valiendo 0 en $f(a)$ y 1 en $g(a)$ (en el resto de valores, da igual). Entonces $hf(a) \neq hg(a)$, luego $hf \neq hg$.

Veamos ahora cómo lucen los (co)generadores si la categoría tiene coproductos o productos.

Proposición. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Entonces:*

- *Si $\mathcal{C}$ tiene coproductos, entonces $G \in \mathcal{C}$ es un generador si y sólo si para todo $A \in \mathcal{C}$ existe un conjunto I y un epimorfismo $\coprod_{i \in I} G \to A$.*

- *Si $\mathcal{C}$ tiene productos, entonces $C \in \mathcal{C}$ es un cogenerador si y sólo si para todo $A \in \mathcal{C}$ existe un conjunto I y un monomorfismo $A \to \prod_{i \in I} C$.*

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera, por dualidad.

($\Leftarrow$) Sean $f, g : A \to B$ diferentes. Por hipótesis, existe un epimorfismo $\varphi : \coprod_{i \in I} G \to A$. Como φ es epi, entonces $f \neq g \Rightarrow f\varphi \neq g\varphi$. Por la propiedad universal del coproducto, esto implica que $f\varphi\iota \neq g\varphi\iota$ para alguna inyección $\iota : G \to \coprod_{i \in I} G$. Por lo tanto $\varphi\iota$ es la flecha buscada.

($\Rightarrow$) Sea $M \in \mathcal{C}$. Consideremos $I = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{G}, \mathrm{M})$ como conjunto de índices. Definimos $h : \coprod_{i \in I} G \to M$ por la propiedad universal del coproducto:

$$\begin{tikzcd} G = G_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "i"'] & \coprod_{i \in I} G \arrow[d, dotted, "h"] \\ & M \end{tikzcd}$$

h es un epimorfismo: sean $\coprod_{i \in I} G \xrightarrow{h} M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} X$ tales que $fh = gh$. Entonces debe ser $fh\iota_i = gh\iota_i$ para todo $i \in I$, i.e. $fi = gi$ para todo $i \in I = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{G}, \mathrm{M})$. Como G es un generador, esto implica que $f = g$; es decir, h es un epimorfismo.[1] $\square$

Ejemplo. En una categoría de módulos, la proposición anterior se lee como: G es un generador si y sólo si todo módulo es cociente de $\bigoplus_{i \in I} G$ para algún conjunto I; C es un cogenerador si y sólo si todo módulo es submódulo de $\prod_{i \in I} C$ para algún conjunto I.

En particular, observamos que R como R-módulo es un generador, y más en general, cualquier módulo libre es un generador.

Veamos cómo lucen los cogeneradores de una categoría de módulos.

Proposición. *Sea $\mathcal{C} = R - \mathbf{Mod}$. Entonces: $C \in R - \mathbf{Mod}$ es un cogenerador si y sólo si para todo $M \in R - \mathbf{Mod}$ y todo $0 \neq m \in M$ existe $g : M \to C$ tal que $g(m) \neq 0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $M \ni m \neq 0$. Considero $Rm \underset{0}{\overset{i}{\rightrightarrows}} M$. Se tiene $i \neq 0$ pues $m \neq 0$. Entonces existe $h : M \to C$ tal que $hi \neq 0$, y por lo tanto $h(m) = hi(m) \neq 0$, pues si $hi(m) = 0$ entonces $hi = 0$ al ser m generador de Rm.

($\Leftarrow$) Sean $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$, con $f \neq g$. Esto significa que existe $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$, luego $f(a) - g(a) \neq 0$. Por lo tanto existe $h : B \to C$ tal que $h(f(a) - g(a)) \neq 0$; es decir, $hf(a) \neq hg(a)$, y por lo tanto $hf \neq hg$. $\square$

PREGUNTA: ¿hay un análogo para generadores? ¿y para cualquier categoría abeliana?

Observar que en particular, si C es un cogenerador, entonces para todo módulo cíclico Rm no nulo, existe $g : Rm \to C$ con $g \neq 0$.

Proposición. *Si $C \in R - \mathbf{Mod}$ es inyectivo, entonces es un cogenerador si y sólo si para todo $m \neq 0$ existe $g : Rm \to C$, $g \neq 0$.*

[1] Una prueba bastante astuta, ¿no?

Demostración. Sólo hay que probar la vuelta. Sale directamente de la definición de inyectivo y de la proposición anterior. Tomemos $M \in m \neq 0$. Por hipótesis existe $g : Rm \to C$ no nula.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rm \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dotted, "f"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Al ser C inyectivo, g se extiende a $f : M \to C$. En particular $f(m) = g(m) \neq 0$, y C es un cogenerador por la proposición anterior. □

Así que un cogenerador inyectivo en una categoría de módulos es un módulo que admite morfismos no nulos desde cualquier módulo cíclico no nulo.

PREGUNTA: ¿hay un análogo para generadores proyectivos?

Ejemplo. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo de **Ab**. Ya sabemos que es inyectivo (es cociente de $\mathbb{Q}$ que es divisible, por lo tanto es divisible, luego inyectivo). Para ver que es cogenerador, definamos $f : \langle x \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no nula. Denotemos $|x|$ al orden de x.

- Si $|x| = \infty$ (i.e. $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$), definimos f en la base: $f(x) = \overline{1/2}$, es no nulo.
- Si $|x| = n$ (i.e. $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), definimos $f(x) = \overline{1/n}$. Esto define un morfismo pues $|\overline{1/n}| = n$, y es no nulo.

2. Functores que reflejan exactitud

Definición. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un functor entre categorías abelianas. Decimos que *refleja exactitud* si: dadas $f : A' \to A$, $g : A \to A''$ flechas en $\mathcal{A}$, se tiene que la exactitud de

$$FA' \xrightarrow{Ff} FA \xrightarrow{Fg} FA''$$

implica la exactitud de $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$

Observación. Si FG es exacto y F refleja exactitud, entonces G es exacto.

Recordemos el siguiente resultado:

Proposición. *Sea $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ una sucesión en $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Si*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{C}, \mathrm{X}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{B}, \mathrm{X}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{X})$$

es exacta para todo $X \in \mathcal{A}$, entonces $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ es exacta.

Demostración. Hacemos la prueba para $\mathcal{A} = R - \mathbf{Mod}$.

- Tomemos $X = C$. $i^* p^* = 0 \Rightarrow 0 = i^* p^*(\mathrm{id}_C) = i^*(p) = pi$, luego $\operatorname{Im} i \subset \operatorname{Ker} p$.

- Tomemos $X = C/\operatorname{Im} p$. Sea $\pi \in \mathrm{Hom_R(C, C/\operatorname{Im} p)}$ la proyección canónica. Entonces

$$0 = \pi p = p^*(\pi) \Rightarrow \pi = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} p = C$$

luego p es un epimorfismo.

- Tomemos $X = B/\operatorname{Im} i$. Sea $\pi \in \mathrm{Hom_R(B, B/\operatorname{Im} i)}$ la proyección canónica. Entonces

$$0 = \pi i = i^*(\pi) \Rightarrow \pi \in \operatorname{Ker} i^* = \operatorname{Im} p^* \Rightarrow \pi = p^*(f) = fp$$

entonces, si $x \in \operatorname{Ker} p$, $0 = fp(x) = \pi(x) \Rightarrow x \in \operatorname{Im} i$. $\square$

Esto es decir exactamente que la inmersión de Yoneda, $\mathcal{A} \to \mathbf{Ab}^{\mathcal{A}}$, $M \mapsto \mathrm{Hom_C(M, -)}$ refleja exactitud.

Ahora, tenemos que verificarlo *para todo* módulo X... Resulta que basta con tomar X un cogenerador, si la categoría es de módulos.

Proposición. *Si C es un cogenerador de $R - \mathbf{Mod}$, entonces* $\mathrm{Hom_R(-, C)}$ *refleja exactitud.*

Demostración. Sea $A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A''$ una sucesión. Notemos $M^* = \mathrm{Hom_R(M, C)}$. Supongamos que

$$A''^* \xrightarrow{\beta^*} A^* \xrightarrow{\alpha^*} A'^*$$

es exacta.

$\operatorname{Im} \alpha \subset \operatorname{Ker} \beta$: supongamos que existe $x \in A$ tal que $\beta\alpha(x) \neq 0$ (en particular, $x \neq 0$). Entonces existe $f : A'' \to C$ tal que $f(\beta\alpha(x)) \neq 0$. Por lo tanto $f\beta\alpha \neq 0$, es decir, $\beta^*\alpha^*(f) \neq 0$, absurdo.

$\operatorname{Ker} \beta \subset \operatorname{Im} \alpha$: supongamos que existe $y \in \operatorname{Ker} \beta$ tal que $y \notin \operatorname{Im} \alpha$. Es decir, $\overline{y} \neq \overline{0}$ en $\operatorname{Ker} \beta/\operatorname{Im} \alpha$.

En particular, $\overline{y} \neq \overline{0}$ en $A/\operatorname{Im} \alpha$. Por lo tanto, existe $g : A/\operatorname{Im} \alpha \to C$ tal que $g(\overline{y}) \neq \overline{0}$.

Consideremos $\pi : A \to A/\operatorname{Im} \alpha$ la proyección canónica. Se tiene $g\pi \in A^*$. Además, $\alpha^*(g\pi) = g\pi\alpha = 0$, por lo tanto $g\pi \in \operatorname{Ker} \alpha^* = \operatorname{Im} \beta^*$. Por lo tanto $g\pi = \beta^*(h)$ para cierta $h \in A''^*$, es decir, $g\pi = h\beta$. Entonces

$$0 \neq g\pi(y) = h\beta(y) = 0$$

donde la primera igualdad es porque $g(\overline{y}) \neq \overline{0}$, y la última porque $y \in \operatorname{Ker} \beta$. Absurdo. $\square$

PREGUNTA: ¿vale el enunciado dual? ¿vale en categorías abelianas?

Este resultado sirve, por ejemplo, para probar que todo módulo finitamente presentado y plano debe ser proyectivo.

Proposición. *Si C es inyectivo, entonces C es un cogenerador de $R - \mathbf{Mod}$ si y sólo si* $\mathrm{Hom_R(-, C)}$ *refleja exactitud.*

Demostración. PENDIENTE. $\square$