

# Introducción a la geometría diferencial

Bruno Stonek

[bruno@stonek.com](mailto:bruno@stonek.com)

14 de enero de 2014

---

Estas notas están inspiradas en los cursos 2011-2012 de *Introducción a la geometría diferencial*, dictados por el Prof. Miguel Paternain.

La primera parte es continuación directa de mis notas de Cálculo III. De esta forma, *variedad* significará subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^n$  sin borde, *diferenciable* significará de clase  $C^\infty$ , etc.

En la segunda parte se redefinirán estos conceptos para trabajar entonces con variedades abstractas.

He optado por relegar ciertas partes del curso que no son tan centrales, pero cuyos resultados se precisan (en el caso de la primera parte) o son importantes ejemplos (en el caso de la segunda parte), a apéndices. Sugiero leer la primera parte en orden, remitiéndose a los apéndices cuando sus resultados sean citados.

# Índice general

<b>I Topología diferencial y el teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>6</b>
<b>1. Valores regulares</b>	<b>7</b>
1.1. Teorema fundamental del álgebra . . . . .	10
1.2. Teorema de Sard . . . . .	13
<b>2. Variedades con borde</b>	<b>18</b>
2.1. Productos . . . . .	18
2.2. Preimagen de valor regular . . . . .	19
2.3. Teorema de punto fijo de Brouwer . . . . .	22
<b>3. Inmersiones, sumersiones, encajes</b>	<b>25</b>
<b>4. Chichones y particiones de la unidad</b>	<b>28</b>
<b>5. Homotopías e isotopías</b>	<b>31</b>
5.1. Homotopías . . . . .	31
5.2. Isotopías . . . . .	32
<b>6. Teoría del grado módulo 2</b>	<b>38</b>
<b>7. Teoría del grado de Brouwer</b>	<b>41</b>
<b>8. Campos de vectores</b>	<b>46</b>
8.1. Teorema de la bola peluda . . . . .	46
8.2. En coordenadas . . . . .	47
8.3. Pushforward . . . . .	48
8.4. Índice de una singularidad de un campo de vectores . . . . .	50
8.4.1. En $\mathbb{R}^n$ . . . . .	51
8.4.2. En variedades . . . . .	56
8.5. Teorema de Poincaré-Hopf . . . . .	57
8.5.1. Poincaré-Hopf para $n$ -variedades en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	57
8.5.2. Singularidades no degeneradas . . . . .	59

8.5.3. Poincaré-Hopf en general . . . . .	63
8.6. Característica de Euler . . . . .	65
<b>9. Teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>69</b>
<b>Apéndice A. Grupos de matrices</b>	<b>76</b>
A.1. $SO(n)$ es conexo . . . . .	76
A.2. $GL_n^+(\mathbb{R})$ es conexo . . . . .	79
<b>Apéndice B. Teorema del entorno tubular</b>	<b>81</b>
B.1. Fibrado normal . . . . .	81
B.2. Entornos tubulares . . . . .	84
<b>Apéndice C. Campos gradiente</b>	<b>88</b>
C.1. Propiedades básicas . . . . .	88
C.2. Existencia de campos de vectores cuyas singularidades son aisladas . . . . .	90
C.2.1. Funciones de Morse . . . . .	92
<b>II Geometría riemanniana</b>	<b>96</b>
<b>1. Variedades abstractas</b>	<b>97</b>
1.1. Variedades y mapas diferenciables . . . . .	97
1.2. Espacio tangente . . . . .	102
1.3. Diferencial de un mapa entre variedades . . . . .	105
1.3.1. Cálculos en coordenadas . . . . .	107
1.4. Fibrado tangente . . . . .	109
1.5. Campos de vectores . . . . .	111
1.5.1. Corchete de Lie . . . . .	113
<b>2. Métricas riemannianas</b>	<b>117</b>
<b>3. Conexiones</b>	<b>122</b>
3.1. Compatibilidad con la métrica . . . . .	125
3.2. Simetría . . . . .	126
3.3. Conexión de Levi-Civita . . . . .	127
<b>4. Derivada covariante</b>	<b>130</b>
<b>5. Geodésicas</b>	<b>138</b>
5.1. Mapa exponencial . . . . .	139
<b>6. Minimización local</b>	<b>144</b>

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>Apéndice A. Plano hiperbólico</b>	<b>155</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>162</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>163</b>

## Parte I

# Topología diferencial y el teorema de Gauss-Bonnet

# Capítulo 1

## Valores regulares

Recordemos algunas definiciones.

**Definición 1.0.1.** Sean  $M$  y  $N$  variedades y  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable. Un punto  $x \in M$  se dice *punto regular de  $f$*  si  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  es sobreyectivo. En caso contrario se dice que  $x$  es un *punto crítico de  $f$* .

Un punto  $y \in N$  es un *valor regular de  $f$*  si  $f^{-1}(y)$  no contiene puntos críticos. En caso contrario se dice que  $y$  es un *valor crítico de  $f$* .

*Ejemplo 1.0.2.* Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un mapa diferenciable,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $df_x(v) = \nabla f(x) \cdot v$ , y por lo tanto  $x$  es un punto crítico si y sólo si  $\nabla f(x) = 0$ .

*Observación 1.0.3.* ■ Si  $y \in N \setminus f(M)$ , entonces  $y$  es un valor regular de  $f$ .

- Si  $C \subset M$  es el conjunto de puntos críticos de  $f$ , entonces el conjunto de valores críticos de  $f$  es el conjunto  $f(C) \subset N$ , y su complemento es el conjunto de valores regulares de  $f$ .
- Si  $M$  y  $N$  tienen la misma dimensión y  $x \in M$ , entonces por el teorema de las dimensiones  $x$  es un punto regular si y sólo si  $df_x$  es un isomorfismo lineal. En particular, en este caso se aplica el teorema de la función inversa en los puntos regulares.
- Si  $\dim M < \dim N$ , entonces todos los puntos de  $M$  son puntos críticos de  $f$ .

*Observación 1.0.4.* Sean  $M$  una  $m$ -variedad,  $N$  una  $n$ -variedad y sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable. El conjunto  $R$  de puntos regulares de  $f : M \rightarrow N$  es abierto en  $M$ . En efecto, si  $m < n$  esto es obvio pues  $R = \emptyset$  por el último ítem de la observación anterior.

Supongamos entonces  $m \geq n$ . Dado  $x \in M$ , el diferencial  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  puede representarse como una matriz  $n \times m$ . El punto  $x$  es regular si y sólo si existe una submatriz  $n \times n$  con determinante no nulo, por álgebra lineal. Por continuidad del determinante y de las derivadas parciales, deducimos que si  $x$  es un punto regular, entonces hay todo un entorno abierto de  $x$  formado por puntos regulares.

**Lema 1.0.5.** Sean  $M$  y  $N$  variedades de la misma dimensión con  $M$  compacta. Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable. Si  $y \in N$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $f^{-1}(y)$  es un conjunto finito.

*Demostración.* Si  $y \in N \setminus f(M)$  no hay nada que probar. Supongamos entonces que  $f^{-1}(y)$  no es vacío.

Para ver que es finito, basta ver que  $f^{-1}(y)$  es compacto y discreto.

Es compacto, pues  $\{y\} \subset N$  es cerrado y al ser  $f$  continua es  $f^{-1}(y)$  cerrado. Como  $M$  es compacta, entonces  $f^{-1}(y)$  es compacto.

Es discreto: si  $x \in f^{-1}(y)$ , por el teorema de la función inversa existe  $U_x \subset M$  un entorno abierto de  $x$  tal que  $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$  es un difeomorfismo; en particular se cumple  $f^{-1}(y) \cap U_x = \{x\}$ .  $\square$

**Lema 1.0.6** (de la pila de discos). Sean  $M$  y  $N$  variedades de la misma dimensión, con  $M$  compacta. Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable, y sea  $y \in N$  un valor regular de  $f$ . Entonces existe un entorno abierto  $U \subset N$  de  $y$  tal que:

$$\cdot f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^k U_i, \text{ donde } U_i \subset M \text{ son abiertos dos a dos disjuntos,}$$

$$\cdot f|_{U_i} : U_i \rightarrow U \text{ es un difeomorfismo para todo } i = 1, \dots, k.$$

*Demostración.* Si  $y$  no tiene preimágenes, entonces lo mismo ocurre en un entorno abierto de  $y$ , ya que  $f(M) \subset N$  es compacto y por tanto cerrado. De esta forma, el teorema se cumple trivialmente.

Por el lema 1.0.5,  $f^{-1}(y)$  es finito, así que supongamos que  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Como los  $x_i$  son puntos regulares, por el teorema de la función inversa existe  $V_i \subset M$  entorno abierto de  $x_i$  tal que  $f(V_i) \subset N$  es abierto y  $f|_{V_i} : V_i \rightarrow f(V_i)$  es un difeomorfismo, para todo  $i$ .

Como  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset M$  es finito, podemos suponer que los  $V_i$  son dos a dos disjuntos, achicándolos si fuera necesario. Sea  $U = \left[ \bigcap_{i=1}^k f(V_i) \right] \setminus \left[ f \left( M \setminus \bigcup_{i=1}^k V_i \right) \right]$ . De esta forma,

$U \subset N$  es abierto y  $f^{-1}(U) \subset \bigcup_{i=1}^k V_i$  (ver figura 1.1).

Definiendo  $U_i := f^{-1}(U) \cap V_i$  se satisface la tesis.  $\square$

**Corolario 1.0.7.** En las hipótesis del lema anterior, la función  $y \mapsto \#f^{-1}(y)$  es localmente constante en el conjunto de valores regulares de  $f$ . Es decir, para todo valor regular  $y \in N$  de  $f$  existe un entorno abierto  $U \subset N$  de  $y$  tal que  $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$  para todo  $y' \in U$ .

*Demostración.* Sean  $U \subset N$  y  $U_i \subset M$  como en el lema de la pila de discos. Si  $y' \in U$ , entonces  $f^{-1}(y') = \{y_1, \dots, y_k\}$  con  $y_i \in U_i$ , y por lo tanto  $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$ .  $\square$

**Observación 1.0.8.** Toda función localmente constante es continua.

**Ejemplo 1.0.9.** La función  $y \mapsto \#f^{-1}(y)$  del corolario 1.0.7 puede no ser constante, como muestra la figura 1.2 que representa un mapa  $f : S^1 \rightarrow S^1$ .



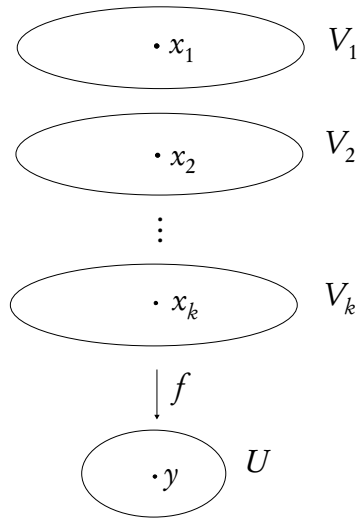


Figura 1.1: Pila de discos

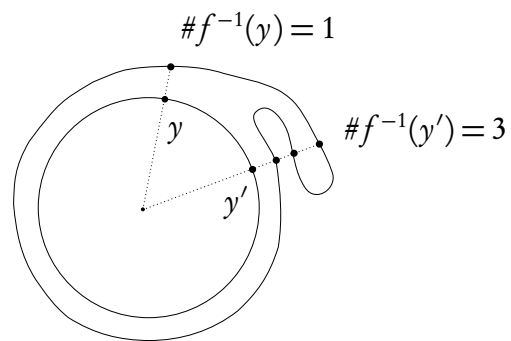


Figura 1.2

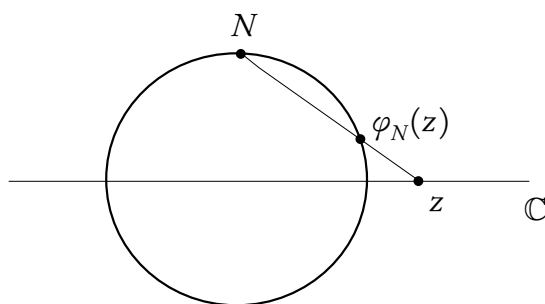


Figura 1.3: Proyección estereográfica

## 1.1. Teorema fundamental del álgebra

Como aplicación, demostraremos el teorema fundamental del álgebra.

**Definición 1.1.1.** Identifiquemos  $\mathbb{C}$  con el conjunto  $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ . Sea  $N = (0, 0, 1)$  y  $S = (0, 0, -1)$ .

La *proyección estereográfica* sobre el polo norte es la función  $\varphi_N : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ , donde  $\varphi_N(z)$  es el punto en el que la recta que une  $z$  con  $N$  corta a  $S^2 \setminus \{N\}$  (ver figura 1.3).

Análogamente se define  $\varphi_S : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{S\}$ , la proyección estereográfica sobre el polo sur.

**Proposición 1.1.2.** *Las proyecciones estereográficas sobre el polo norte y sobre el polo sur son difeomorfismos.*

*Demostración.* Hallemos una expresión explícita para  $\varphi_N$  para ver que es diferenciable. Sea  $z \in \mathbb{C}$ .

Los puntos de la recta que une  $z$  con  $N$  son de la forma  $tz + (1-t)N$ , con  $t \in [0, 1]$ . Buscamos el  $t \neq 0$  para el cual  $\|tz + (1-t)N\| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|tz + (1-t)N\|^2 &= \langle tz + (1-t)N, tz + (1-t)N \rangle \\ &= \langle tz, tz \rangle + 2\langle tz, (1-t)N \rangle + \langle (1-t)N, (1-t)N \rangle \\ &= t^2|z|^2 + (1-t)^2 \quad \text{pues } z \perp N \text{ y } \|N\| = 1 \end{aligned}$$

Igualando a 1 y despejando, como  $t \neq 0$  conseguimos  $t = \frac{2}{1+|z|^2}$ . En conclusión,

$$\varphi_N(z) = \frac{2z}{1+|z|^2} + \left(1 - \frac{2}{1+|z|^2}\right)N$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ , y por lo tanto  $\varphi_N$  es diferenciable.

Análogamente se halla  $\varphi_N^{-1}$  y se observa que es diferenciable, probando que  $\varphi_N$  es un difeomorfismo.

La prueba de que  $\varphi_S$  es un difeomorfismo es análoga. □

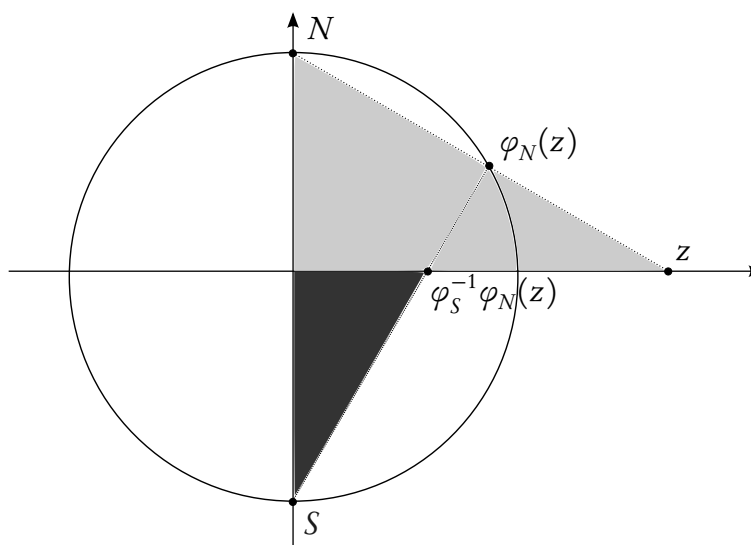


Figura 1.4

**Lema 1.1.3.** Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  se cumple que  $\varphi_S^{-1} \circ \varphi_N(z) = \frac{1}{z}$ . En particular, se cumple que  $(\varphi_S^{-1} \circ \varphi_N)^{-1} = \varphi_S^{-1} \circ \varphi_N$ .

*Demostración.* Argumentos de geometría plana prueban que los dos triángulos sombreados de la figura 1.4 son semejantes, y por lo tanto por el teorema de Tales se tiene que  $|\varphi_S^{-1} \varphi_N(z)| = \frac{1}{|z|}$ .

Como  $\varphi_S^{-1} \varphi_N(z)$ ,  $z$  y  $0$  están alineados, entonces

$$\varphi_S^{-1} \varphi_N(z) = |\varphi_S^{-1} \varphi_N(z)| \frac{z}{|z|} = \frac{1}{|z|} \frac{z}{|z|} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{z} \quad \square$$

**Proposición 1.1.4.** Sea  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio a coeficientes complejos. Existe una única función diferenciable  $f : S^2 \rightarrow S^2$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^2 \setminus \{N\} & \xrightarrow{f} & S^2 \setminus \{N\} \\ \varphi_N \uparrow & & \uparrow \varphi_N \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{p} & \mathbb{C} \end{array} \quad (1.1)$$

*Demostración.* Definimos  $f$  como en el diagrama en  $S^2 \setminus \{N\}$ , y definimos  $f(N) = N$ . Esta es la única forma de hacer que  $f$  sea continua, pues los polinomios tienden a infinito en el infinito.

Debemos ver que  $f$  es diferenciable. Basta ver que es diferenciable en un entorno de  $N$ . Sea  $U \subset S^2$  un entorno abierto de  $N$  tal que  $S \notin U$  y  $S \notin f(U)$ . Para ver que  $f|_U$  es diferenciable, basta ver que  $\hat{f}$  es diferenciable, donde  $\hat{f}$  está definida mediante el siguiente

## 1.1 Teorema fundamental del álgebra

---

diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|_U} & f(U) \\ \varphi_S \uparrow & & \uparrow \varphi_S \\ \varphi_S^{-1}(U) & \xrightarrow{\widehat{f}} & \varphi_S^{-1}(f(U)) \end{array}$$

Como  $\varphi_S(0) = N$  entonces  $0 \in \varphi_S^{-1}(U)$ . Entonces

$$\widehat{f}(0) = \varphi_S^{-1}(f(\varphi_S(0))) = \varphi_S^{-1}(f(N)) = \varphi_S^{-1}(N) = 0$$

Ahora calculamos  $\widehat{f}(z)$  para  $z \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \widehat{f}(z) &= \varphi_S^{-1} \circ f \circ \varphi_S(z) \\ &= \varphi_S^{-1} \circ \varphi_N \circ p \circ \varphi_N^{-1} \circ \varphi_S(z) && \text{pues } z \neq 0 \Rightarrow \varphi_S(z) \neq N \\ &= \varphi_S^{-1} \circ \varphi_N \circ p \circ (\varphi_S^{-1} \circ \varphi_N)^{-1}(z) \\ &= \frac{1}{p\left(\frac{1}{z}\right)} && \text{por el lema 1.1.3} \end{aligned}$$

Por lo tanto si  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  con  $a_n \neq 0$ , entonces

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = a_n \frac{1}{z^n} + \dots + a_1 \frac{1}{z} + a_0$$

de donde

$$\widehat{f}(z) = \frac{1}{\frac{1}{a_n z^n} + \dots + \frac{1}{a_1 z} + a_0} = \frac{z^n}{\overline{a_n} + \dots + \overline{a_1} z^{n-1} + \overline{a_0} z^n}$$

Esta expresión prueba que tomando  $U$  suficientemente chico,  $\widehat{f}$  es diferenciable, pues el denominador no se anula en cero, y entonces no se anula en un entorno de cero por continuidad.  $\square$

**Teorema 1.1.5** (fundamental del álgebra). *Todo polinomio no constante a coeficientes complejos  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es sobreyectivo, y en particular tiene una raíz compleja.*

*Demostración.* Sea  $f : S^2 \rightarrow S^2$  como en la proposición 1.1.4. Veamos que  $f$  es sobreyectiva, terminando la demostración por conmutatividad del diagrama (1.1).

Observar que los puntos críticos de  $f$  son los puntos críticos de  $p$ , y estos son los ceros de la derivada  $p'$ , pues al ser  $p$  un polinomio es una función holomorfa, y por lo tanto satisface  $|p'(z)|^2 = |\det d p_z|$ .

Como  $p'$  es un polinomio, entonces tiene finitas raíces, y por lo tanto  $f$  tiene finitos puntos críticos, y en particular el conjunto de valores críticos de  $f$  también es finito. Por

lo tanto el conjunto de valores regulares de  $f$  es conexo, al ser el complemento en  $S^2$  de finitos puntos.

Como  $S^2$  es compacta, el corolario 1.0.7 afirma que la función  $z \mapsto \#f^{-1}(z)$  es localmente constante en el conjunto de valores regulares de  $f$  que es conexo, así que es una función constante en los valores regulares de  $f$ .

Sea  $z \in S^2$ ; veamos entonces que  $\#f^{-1}(z) \neq 0$ . Si  $z$  es un valor crítico de  $f$  no hay nada que probar. Supongamos entonces que  $z$  es un valor regular de  $f$ .

Si fuera  $\#f^{-1}(z) = 0$ , entonces  $\#f^{-1}(z') = 0$  para todo  $z' \in S^2$  valor regular de  $f$ . Por lo tanto  $f(S^2) \subset \{\text{valores críticos de } f\}$  que es finito. Para ver que esto es absurdo, basta observar que al ser  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio no constante entonces toma infinitos valores.

En efecto, podemos escribir  $p = q + ir$  para ciertos  $q, r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  polinomios a coeficientes reales. Ahora bien,  $p|_{\mathbb{R}} = q|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio real de grado mayor o igual a 1, así que como se observa fácilmente por técnicas de cálculo, toma infinitos valores. En particular,  $p$  toma infinitos valores.  $\square$

## 1.2. Teorema de Sard

Veamos ahora que los valores regulares son ubicuos.

**Teorema 1.2.1 (Sard).** *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  una función diferenciable. Entonces el conjunto de valores críticos de  $f$  tiene medida de Lebesgue nula.*

Recordemos que un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida de Lebesgue nula si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una familia numerable de bolas de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(B_i) < \epsilon$ .

**Corolario 1.2.2 (Brown).** *En las hipótesis del teorema de Sard, el conjunto de valores regulares de  $f$  es denso en  $\mathbb{R}^p$ .*

*Demostración.* En  $\mathbb{R}^p$ , un conjunto de medida cero no contiene abiertos no vacíos.  $\square$

El teorema de Sard se extiende a variedades. Si  $M$  es una variedad y  $A \subset M$  es un subconjunto, decimos que tiene medida cero si para toda parametrización  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  se tiene que  $\varphi^{-1}(A) \subset U$  tiene medida de Lebesgue nula.

Como toda variedad tiene una base numerable (en el sentido topológico), se obtiene que si  $f : M \rightarrow N$  es un mapa diferenciable entre variedades, entonces el conjunto de valores críticos de  $f$  tiene medida cero en  $N$ , y por lo tanto los valores regulares de  $f$  son densos en  $N$ . Ver apéndice de [GP] para más detalles.

*Demostración (del teorema de Sard).* Lo hacemos por inducción en  $n$ . Se cumple trivialmente para  $n = 0$ , pues  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ . Para cada  $n > 0$  dividiremos la prueba en tres etapas.

## 1.2 Teorema de Sard

---

Sea  $C_i \subset U$  el conjunto de puntos donde todas las derivadas parciales de orden  $\leq i$  de todas las funciones coordenadas de  $f$  se anulan. De esta forma, si  $C$  es el conjunto de puntos críticos de  $f$ ,

$$C \supset C_1 \supset \dots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \dots$$

Las etapas son:

1.  $f(C \setminus C_1)$  tiene medida nula,
2.  $f(C_k \setminus C_{k+1})$  tiene medida nula, para todo  $k \geq 1$ ,
3. existe un  $k \geq 1$  tal que  $f(C_k)$  tiene medida nula.

Esto prueba que  $f(C)$  tiene medida nula, pues se descompone así:

$$f(C) = f(C \setminus C_1) \cup f(C_1 \setminus C_2) \cup \dots \cup f(C_{k-1} \setminus C_k) \cup f(C_k)$$

Demostración de 1. Sea  $x \in C \setminus C_1$ . Entonces  $x$  es un punto crítico de  $f$  tal que alguna derivada primera de alguna función coordenada de  $f$  no se anula. Sin pérdida de generalidad suponemos que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$ .

Definimos un cambio de coordenadas  $h$  que nos permita usar la hipótesis de inducción y el teorema de Fubini.

Sea  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida como  $h(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ . Entonces el diferencial  $dh_x$  es un isomorfismo, pues

$$\det dh_x = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & * \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$$

Por el teorema de la función inversa, existe  $V \subset U$  entorno abierto de  $x$  tal que  $V' := h(V)$  es abierto y  $h|_V : V \rightarrow V'$  es un difeomorfismo.

Definimos  $g := f|_V \circ h|_V^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h|_V} & V' \\ & \searrow f|_V & \swarrow g \\ & & \mathbb{R}^p \end{array}$$

Observar que el conjunto de puntos críticos de  $g$  es  $h(V \cap C)$ .

*Afirmación:*  $g(t \times \mathbb{R}^{n-1} \cap V') \subset t \times \mathbb{R}^{p-1}$ , i.e.  $g$  “mantiene los hiperplanos”  $x_1 = t$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración* Si  $(t, x_2, \dots, x_n) \in V' = h(V)$ , entonces

$$(t, x_2, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

## 1.2 Teorema de Sard

---

para algún  $x_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $(x_1, \dots, x_n) \in V$ . Aplicando  $g$ ,

$$\begin{aligned} g(t, x_2, \dots, x_n) &= gh(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), y_2, \dots, y_p) \\ &= (t, y_2, \dots, y_p) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Por lo tanto para todo  $t \in \mathbb{R}$  podemos definir  $g^t : (t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow t \times \mathbb{R}^{p-1}$  como la restricción de  $g$  a ese hiperplano. Podemos pensar que  $g^t$  toma valores de  $\mathbb{R}^{n-1}$  y devuelve valores de  $\mathbb{R}^{p-1}$ .

*Afirmación:* Los puntos de  $(t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$  son críticos para  $g$  si y sólo si lo son para  $g^t$ .

*Demostración:* En efecto, si  $x = (t, x_2, \dots, x_n) \in (t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ , entonces  $g_1(x) = t$ , y por lo tanto

$$dg_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & d(g^t)_x \end{pmatrix}$$

Entonces  $dg_x$  no es sobreyectiva si y sólo si  $d(g^t)_x$  no lo es, pues la primera columna es linealmente independiente con el resto. ■

Por hipótesis de inducción, el conjunto de valores críticos de  $g^t$  tiene medida nula en  $t \times \mathbb{R}^{p-1}$ . Por la afirmación previa, esto implica que los valores críticos de  $g$  en el hiperplano  $t \times \mathbb{R}^{p-1}$  son un conjunto de medida nula. Pero el conjunto de valores críticos de  $g$  es  $gh(V \cap C) = f(V \cap C)$ , así que  $f(V \cap C) \cap (t \times \mathbb{R}^{p-1})$  tiene medida nula para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Podemos aplicar entonces el teorema de Fubini para conjuntos de medida nula, que dice que si  $A \subset \mathbb{R}^p$  es un subconjunto compacto que cumple que  $A \cap (t \times \mathbb{R}^{p-1})$  tiene medida nula en  $t \times \mathbb{R}^{p-1}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces  $A$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ . Para poder aplicarlo, achicamos  $V$  si es necesario para que  $\bar{V} \subset U$ .

Por el teorema de Fubini,  $f(\bar{V} \cap C)$  tiene medida nula en  $\mathbb{R}^p$ . Pero  $\bar{V}$  es un entorno de  $x \in C \setminus C_1$ : como  $\mathbb{R}^p$  admite una base numerable (en el sentido topológico), entonces existen numerables  $V_i$  tales que  $f(\bar{V}_i \cap C)$  tiene medida nula y

$$f(C \setminus C_1) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f(\bar{V}_i \cap (C \setminus C_1))$$

Como  $f(\bar{V}_i \cap (C \setminus C_1)) \subset f(\bar{V}_i \cap C)$  entonces  $f(\bar{V}_i \cap (C \setminus C_1))$  tiene medida nula para todo  $i$ , y por lo tanto  $\bigcup_{i=1}^{\infty} f(\bar{V}_i \cap (C \setminus C_1))$  tiene medida nula. Como  $f(C \setminus C_1)$  está contenido en él, entonces también tiene medida nula.

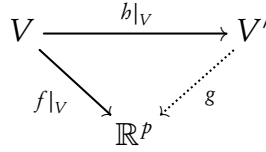
## 1.2 Teorema de Sard

Demostración de 2. Sea  $x \in C_k \setminus C_{k+1}$ . Entonces existe alguna coordenada de  $f$  cuya derivada  $k$ -ésima, que llamamos  $w$ , cumple  $w(x) = 0$  y  $\frac{\partial w}{\partial x_i}(x) \neq 0$  para algún  $i$ . Sin pérdida de generalidad supondremos  $i = 1$ .

Definimos  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $h(x_1, \dots, x_n) = (w(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ .

Como  $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \neq 0$ , entonces  $dh_x$  es un isomorfismo, por un argumento análogo al de la parte anterior. Por el teorema de la función inversa, existe  $V \subset U$  un entorno abierto de  $x$  tal que  $V' := h(V)$  es abierto y  $h|_V : V \rightarrow V'$  es un difeomorfismo.

Definimos  $g := f|_V \circ h|_V^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$ .



Observar que  $h(V \cap C_k) \subset 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ , por definición de  $h$  y pues  $w$  se anula en los puntos de  $C_k$ .

Sea  $g^0 : (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^p$  definida como la restricción de  $g$  a ese hiperplano. Podemos pensar que  $g^0$  toma valores de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , así que por hipótesis de inducción, los valores críticos de  $g^0$  son un conjunto de medida nula en  $\mathbb{R}^p$ .

Observar que todo punto de  $h(V \cap C_k)$  es un punto crítico de  $g^0$ : en efecto, si  $x \in V \cap C_k$ ,

$$dg_{h(x)} \stackrel{\text{r.c.}}{=} df_{h^{-1}h(x)} \circ d(h^{-1})_{h(x)} = df_x \circ d(h^{-1})_{h(x)} = 0$$

pues como  $x \in C_k$  entonces  $df_x = 0$ .

En conclusión,  $g^0 h(V \cap C_k) = g h(V \cap C_k) = f(V \cap C_k)$  tiene medida nula.

Recordemos que  $V$  es un entorno de  $x \in C_k \setminus C_{k+1}$ ; por un argumento análogo al de la parte anterior, concluimos que  $f(C_k \setminus C_{k+1})$  tiene medida nula.

Demostración de 3. Sea  $k > \frac{n}{p} - 1$ : veamos que  $f(C_k)$  tiene medida nula. Sea  $\delta > 0$ .

Sea  $I \subset U$  un cubo de arista  $\delta$ . Probaremos que  $f(C_k \cap I)$  tiene medida nula; como  $C_k$  se puede cubrir por numerables de estos cubos, esto termina la demostración.

Por el teorema de Taylor, existe  $c > 0$  tal que

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq c \|h\|^{k+1} \quad (1.2)$$

para todo  $x \in C_k \cap I$  tal que  $x+h \in I$ .

Sea  $r > 0$ . Dividimos  $I$  en  $r^n$  cubos de arista  $\frac{\delta}{r}$ . Sea  $J$  uno de estos cubos, y sea  $x \in C_k \cap J$ . Entonces todo punto de  $J$  se puede escribir como  $x+h$  donde  $\|h\| \leq \sqrt{n} \frac{\delta}{r}$ .

De la desigualdad (1.2) deducimos entonces que  $f(C_k \cap J)$  está incluido en un cubo de arista  $c \left(\sqrt{n} \frac{\delta}{r}\right)^{k+1}$  centrado en  $f(x)$ . Por lo tanto

$$\text{vol}(f(C_k \cap J)) \leq c^p (\sqrt{n} \delta)^{p(k+1)} \frac{1}{r^{p(k+1)}} =: a \frac{1}{r^{p(k+1)}}$$



## 1.2 Teorema de Sard

---

Uniendo para todo cubo  $J$ ,

$$\text{vol}(f(C_k \cap I)) = \sum \text{vol}(f(C_k \cap J)) \leq r^n a \frac{1}{r^{p(k+1)}} = a r^{n-p(k+1)}$$

para todo  $r > 0$ . Como  $k > \frac{n}{p} - 1$ , entonces  $n - p(k+1) < 0$  y entonces  $\lim_{r \rightarrow +\infty} a r^{n-p(k+1)} = 0$ . Esto prueba que  $\text{vol}(f(C_k \cap I)) = 0$ , terminando la demostración.  $\square$

*Ejemplo 1.2.3.* Sean  $M, N$  variedades con  $\dim M < \dim N$  y sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable. Entonces el teorema de Sard afirma que  $f(M) \subset N$  tiene medida cero.

Utilizaremos la siguiente observación a menudo, refiriéndonos al resultado mentado tan solo como “el teorema de Sard”.

*Observación 1.2.4.* Sea  $\{f_i : M \rightarrow N\}_{i \in \mathbb{N}}$  una familia numerable de funciones diferenciables entre  $M$  y  $N$  variedades. Entonces el conjunto de valores críticos de todas las  $f_i$  a la vez tiene medida cero, pues la intersección de numerables conjuntos de medida cero tiene medida cero.

# Capítulo 2

## Variedades con borde

### 2.1. Productos

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $M$  una  $m$ -variedad y  $N$  una  $n$ -variedad con borde. Entonces  $M \times N$  y  $N \times M$  son  $(m + n)$ -variedades con borde cuyos bordes satisfacen  $\partial(M \times N) = M \times \partial N$  y  $\partial(N \times M) = \partial N \times M$ .*

*Demostración.* Ejercicio para el lector (ya lo hicimos en Cálculo III).  $\square$

Observar que el producto de dos variedades con borde no tiene por qué ser una variedad con borde: tomar  $[0, 1] \times [0, 1]$ , por ejemplo.

Un caso particular que surge a menudo es el de  $M \times [0, 1]$ : es una variedad con borde de dimensión  $m + 1$ , y  $\partial(M \times [0, 1]) = (M \times 0) \cup (M \times 1)$ .

Si  $M$  y  $N$  son orientadas, entonces  $M \times N$  adquiere una *orientación producto*, que describimos a continuación.

Observar primero que dado  $(x, y) \in M \times N$ , entonces  $T_{(x,y)}(M \times N) \simeq T_x M \times T_y N$  canónicamente. Si  $\alpha = \{v_1, \dots, v_m\}$  y  $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$  son bases de  $T_x M$  y  $T_y N$  respectivamente, denotemos por  $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$  a la base  $\{(v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\}$  de  $T_x M \times T_y N$ .

Definimos una orientación en  $M \times N$ , definiendo el signo de  $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$  como el producto de los signos de  $\alpha$  y de  $\beta$ . La verificación de que esto define una orientación en  $M \times N$  es un ejercicio para el lector.

Consideremos ahora el caso particular de  $[0, 1] \times M$ .

**Proposición 2.1.2.** *Sea  $M$  una variedad orientada. Orientemos  $[0, 1] \times M$  con la orientación producto. Orientemos  $\partial([0, 1] \times M) = (0 \times M) \cup (1 \times M)$  como borde de  $M \times [0, 1]$ . Entonces el difeomorfismo  $M \rightarrow 1 \times M$ ,  $x \mapsto (x, 1)$  preserva orientación, y el difeomorfismo  $M \rightarrow 0 \times M$ ,  $x \mapsto (0, x)$  revierte orientación.*

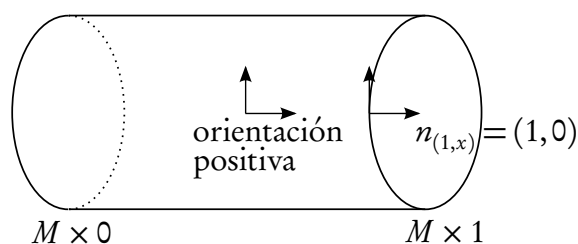


Figura 2.1: Orientación de  $[0, 1] \times S^1$

*Demostración.* Probemos que  $M \rightarrow 1 \times M, x \mapsto (1, x)$  preserva orientación: la otra afirmación se demuestra análogamente.

Si  $(1, x) \in 1 \times M$ , entonces el vector normal saliente en  $(1, x)$  es  $n_{(1,x)} = (1, 0)$  como se aprecia en la figura (2.1).

Toda base de  $T_{(1,x)}(1 \times M) \simeq 0 \times T_x M$  es de la forma  $0 \times \beta$ , donde  $\beta$  es una base de  $T_x M$ . Por definición de la orientación borde,

$$\text{sg}(0 \times \beta) = \text{sg}(n_{(1,x)}, 0 \times \beta)$$

Utilizando la definición de la orientación producto, deducimos que

$$\text{sg}((n_{(1,x)}, 0 \times \beta) = \text{sg}(1 \times 0, 0 \times \beta) = \text{sg}(1) \text{sg}(\beta) = \text{sg}(\beta)$$

de donde  $\beta$  es una base positiva de  $T_x M$  si y sólo si  $0 \times \beta$  es una base positiva de  $T_{(1,x)}(1 \times M)$ , probando el teorema.  $\square$

## 2.2. Preimagen de valor regular

Los siguientes enunciados son adaptaciones directas de teoremas de Cálculo III a variedades.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable entre variedades,  $y \in N$  un valor regular de  $f$ . Entonces  $f^{-1}(y) \subset M$  es una variedad de dimensión  $\dim M - \dim N$ .*

**Teorema 2.2.2.** *Sea  $M$  una variedad y  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si  $y \in \mathbb{R}$  es un valor regular de  $g$ , entonces  $g^{-1}((-\infty, y]) \subset M$  es una variedad con borde de dimensión  $\dim M$ , y  $\partial g^{-1}((-\infty, y]) = g^{-1}(y)$ .*

*Lo mismo vale para  $g^{-1}([y, +\infty))$ .*

**Proposición 2.2.3.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable. Si  $a \in N$  es tal que  $f^{-1}(a)$  es una variedad, probar que  $T_p(f^{-1}(a)) = \ker df_p$  para todo  $p \in f^{-1}(a)$ .*

Ahora demostraremos otro teorema de preimagen de valor regular para variedades con borde.

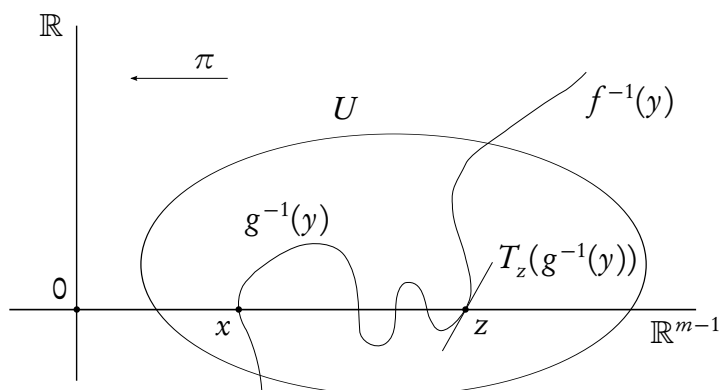


Figura 2.2

**Teorema 2.2.4.** Sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable entre variedades, donde  $M$  es una variedad con borde. Sean  $m = \dim M$ ,  $n = \dim N$ . Sea  $y \in N$  un valor regular de  $f$  y de  $f|_{\partial M}$ . Entonces  $f^{-1}(y) \subset M$  es una variedad con borde de dimensión  $m - n$ , y

$$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$$

*Demostración.* Como el enunciado es local, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $f : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Sea  $x \in f^{-1}(y)$ . Si  $x$  está en el interior de  $\mathbb{H}^m$ , entonces estamos localmente en el caso del teorema 2.2.1, luego se aplica la misma demostración. Podemos suponer entonces que  $x \in \partial \mathbb{H}^m$ .

Por definición de diferenciabilidad y del diferencial, existe  $U \subset \mathbb{R}^m$  un entorno abierto de  $x$  y  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función diferenciable tal que  $g|_{U \cap \mathbb{H}^m} = f|_{U \cap \mathbb{H}^m}$ , y cumple  $dg_{x'} = df_{x'}$  para todo  $x' \in U \cap \mathbb{H}^m$ . De esta forma, como  $x$  es un punto regular de  $f$  entonces también lo es de  $g$ .

Como  $x$  es un punto regular de  $g$  y el conjunto de puntos regulares es abierto (observación 1.0.4), podemos considerar que  $U$  es suficientemente chico de manera que todos sus puntos sean puntos regulares de  $g$ . Esto significa que  $y$  es un valor regular de  $g$ , y por lo tanto por el teorema 2.2.1,  $g^{-1}(y) \subset U$  es una variedad de dimensión  $m - n$ .

Sea  $\pi : g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\pi(x_1, \dots, x_m) = x_m$ . Es la restricción de la proyección de  $\mathbb{R}^m$  sobre su última coordenada.

*Afirmación:* 0 es valor regular de  $\pi$ .

*Demostración:* Sea  $z \in \pi^{-1}(0)$ . Queremos probar que  $d\pi_z : T_z(g^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$  es sobreyectivo. Basta ver que es no nulo. Como  $\pi$  es la restricción de una transformación lineal, entonces  $d\pi_z$  también es la proyección sobre la última coordenada. De esta forma,  $d\pi_z(v) = 0$  para todo  $v \in T_z(g^{-1}(y))$  si y sólo si  $T_z(g^{-1}(y)) \subset \mathbb{R}^{m-1} \times 0$ .

Queremos probar, pues, que  $T_z(g^{-1}(y)) \not\subset \mathbb{R}^{m-1} \times 0$ .

Como  $y$  es valor regular de  $f|_{\partial \mathbb{H}^m}$  entonces  $y$  es valor regular de  $g|_{\partial \mathbb{H}^m}$ . Como  $z \in g^{-1}(y) \cap \pi^{-1}(0) = g^{-1}(y) \cap \partial \mathbb{H}^m$ , entonces  $d(g|_{\partial \mathbb{H}^m})_z$  es sobreyectivo. Pero  $g$  es

## 2.2 Preimagen de valor regular

una extensión diferenciable de  $g|_{\partial\mathbb{H}^m}$ , así que

$$d(g|_{\partial\mathbb{H}^m})_z = dg_z|_{T_z(\partial\mathbb{H}^m)} = dg_z|_{\mathbb{R}^{m-1} \times 0}$$

Pensando  $dg_z|_{\mathbb{R}^{m-1} \times 0}$  como un mapa lineal  $\mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , concluimos por el teorema de las dimensiones que  $m - 1 = \dim \ker(dg_z|_{\mathbb{R}^{m-1} \times 0}) + n$ , de donde

$$\dim(\ker dg_z \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times 0)) = m - n - 1 \quad (2.1)$$

Como  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $z \in g^{-1}(y)$ , entonces  $\ker dg_z = T_z(g^{-1}(y))$ , lo cual implica que tiene dimensión  $m - n$ .

Por lo tanto si  $T_z(g^{-1}(y)) \subset \mathbb{R}^{m-1} \times 0$ , entonces (2.1) sería igual a la dimensión de  $T_z(g^{-1}(y))$  que es  $m - n$ , llegando a una contradicción. ■

Por el teorema 2.2.2, tenemos entonces que  $\pi^{-1}([0, +\infty))$  es una variedad con borde de dimensión  $m - n$ , y su borde es  $\pi^{-1}(0)$ . Pero  $\pi^{-1}([0, +\infty)) = g^{-1}(y) \cap \mathbb{H}^m = U \cap f^{-1}(y)$ ; como  $x$  es arbitrario y  $U$  es un entorno de  $x$ , deducimos que  $f^{-1}(y)$  es una variedad con borde.

Además

$$\pi^{-1}(0) = g^{-1}(y) \cap \partial\mathbb{H}^m = U \cap f^{-1}(y) \cap \partial\mathbb{H}^m$$

y por el teorema 2.2.2,

$$\pi^{-1}(0) = \partial \pi^{-1}([0, +\infty)) = \partial(U \cap f^{-1}(y))$$

Por lo tanto  $\partial(U \cap f^{-1}(y)) = U \cap f^{-1}(y) \cap \partial\mathbb{H}^m$ ; como  $x$  es arbitrario y  $U$  es un entorno de  $x$ , entonces  $\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial\mathbb{H}^m$ . □

*Ejemplo 2.2.5.* La hipótesis de que  $y$  sea valor regular de  $f|_{\partial M}$  se precisa para que la conclusión sea cierta.

En efecto, sea  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x, y) = y - x^2$ . Entonces

$$\nabla f(x, y) = (-2x, 1) \neq (0, 0)$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ . Luego  $f$  no tiene puntos críticos, y en particular 0 es un valor regular.

Por otro lado, observar que  $f|_{\partial\mathbb{H}^2}(x) = -x^2$ , luego 0 no es valor regular de  $f|_{\partial\mathbb{H}^2}$  ya que  $(f|_{\partial\mathbb{H}^2})'(0) = 0$ .

La tesis del teorema 2.2.4 no se cumple, pues  $\emptyset = \partial f^{-1}(0) \neq f^{-1}(0) \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{(0, 0)\}$ .

Utilizaremos el siguiente teorema de clasificación, cuya demostración se encuentra por ejemplo en el apéndice de [Mil].

**Teorema 2.2.6** (de clasificación de 1-variedades). *Toda 1-variedad conexa con borde es difeomorfa a  $S^1$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $[a, b)$  o  $[a, b]$ .*

**Proposición 2.2.7.** *Toda 1-variedad compacta con borde  $A$  siempre tiene un número par de puntos en el borde.*

*Demostración.* Observamos primero que el número de componentes conexas de  $A$  es finito. En efecto: supongamos por absurdo que existe una sucesión  $(C_n)$  de componentes conexas de  $M$  diferentes. Sea  $x_n \in C_n$  para todo  $n$ . Por compacidad de  $A$ , existe una subsucesión convergente de  $(x_n)$ :  $x_{n_k} \rightarrow x \in A$ . Como  $A$  es localmente conexa, existe un entorno abierto y conexo  $U \subset A$  de  $x$ , contradiciendo que  $x_{n_k} \rightarrow x$  y cada  $x_{n_k}$  está en una componente conexa diferente.

Por lo tanto, por la clasificación de 1-variedades se tiene que  $A$  es una unión disjunta de una cantidad finita de copias de  $S^1$  y de intervalos compactos, cuyo borde consiste entonces en una cantidad par de puntos (dos por cada intervalo).  $\square$

## 2.3. Teorema de punto fijo de Brouwer

Aplicaremos ahora los resultados de la sección anterior para demostrar el teorema de punto fijo de Brouwer.

**Teorema 2.3.1** (de la no-retracción). *Sea  $M$  una variedad compacta con borde. Entonces no existe una función diferenciable  $f : M \rightarrow \partial M$  tal que  $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$ .*

*Demostración.* Supongamos por absurdo que existe una tal  $f$ . El teorema de Sard garantiza que existe  $y \in \partial M$  un valor regular de  $f$  y de  $f|_{\partial M}$ .

Por el teorema 2.2.4,  $f^{-1}(y)$  es una 1-variedad con borde, y cumple

$$\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial M = \{x \in \partial M : f(x) = y\} = \{y\} \quad (2.2)$$

ya que  $f|_{\partial M} = \text{id}_{\partial M}$ .

Se aplica además la proposición 2.2.7:  $\partial(f^{-1}(y))$  tiene una cantidad par de puntos en el borde, contradiciendo (2.2).  $\square$

**Teorema 2.3.2** (punto fijo de Brouwer, versión diferenciable). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  el disco unitario cerrado. Sea  $f : D \rightarrow D$  una función diferenciable. Entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Por absurdo, supongamos que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in D$ . Entonces  $f(x)$  y  $x$  determinan una recta en  $\mathbb{R}^n$ . Esta recta corta a  $\partial D$  en dos puntos; le llamamos  $\varphi(x)$  al que está del lado de  $x$  (ver figura 2.3). Esto determina una función  $\varphi : D \rightarrow \partial D$  que cumple  $\varphi|_{\partial D} = \text{id}_{\partial D}$ .

Si probamos que  $\varphi$  es diferenciable, habremos llegado a una contradicción con el teorema de la no-retracción, terminando la demostración.

Escribimos  $\varphi(x) = x + t(x)u(x)$ , donde  $u(x) = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$ , y  $t(x) \geq 0$ . Basta probar que  $t$  es diferenciable.

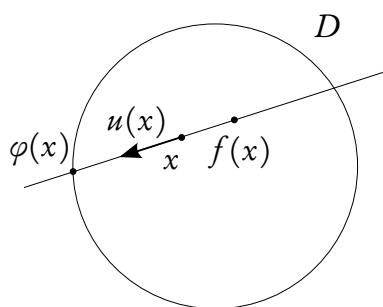


Figura 2.3

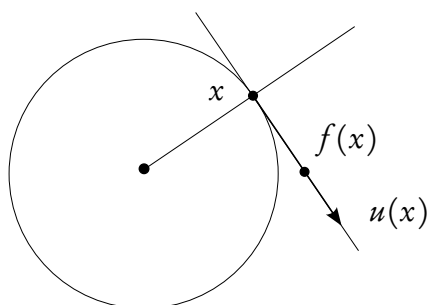


Figura 2.4

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) \in \partial D &\iff \|\varphi(x)\|^2 = 1 \iff \langle x + tu, x + tu \rangle = 1 \\
 &\iff \|x\|^2 + 2\langle x, tu \rangle + t^2\|u\|^2 = 1 \\
 &\iff t^2 + 2\langle x, u \rangle t + \|x\|^2 - 1 = 0 \\
 &\iff t = \frac{-2\langle x, u \rangle \pm \sqrt{4\langle x, u \rangle^2 - 4(\|x\|^2 - 1)}}{2} \\
 &\iff t = -\langle x, u \rangle + \sqrt{\langle x, u \rangle^2 + 1 - \|x\|^2}
 \end{aligned}$$

donde al final nos quedamos con la solución de signo positivo pues debe ser  $t \geq 0$ .

Para verificar la diferenciabilidad de  $t$ , basta verificar que el término debajo de la raíz no se anula.

$$\langle x, u \rangle^2 + 1 - \|x\|^2 = 0 \iff \overbrace{\langle x, u \rangle^2}^{\geq 0} = \overbrace{\|x\|^2 - 1}^{\leq 0} \iff \begin{cases} \langle x, u \rangle = 0 \\ \|x\| = 1 \end{cases}$$

lo cual es absurdo, como indica la figura 2.4:  $f(x)$  estaría fuera de  $D$ . □

Ahora podemos utilizar un resultado de análisis para demostrar el teorema en el caso en que  $f$  es tan solo continua.

**Teorema 2.3.3** (Stone-Weierstrass). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto compacto. Entonces los polinomios  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son densos en el espacio de funciones continuas  $C(D, \mathbb{R})$  con la norma del máximo.*

### 2.3 Teorema de punto fijo de Brouwer

---

*Observación 2.3.4.* Digamos que  $P = (P_1, \dots, P_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un polinomio si  $P_1, \dots, P_n$  son polinomios. Entonces con el teorema de Stone-Weierstrass concluimos que los polinomios son densos en  $C(D, \mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 2.3.5** (punto fijo de Brouwer). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  el disco unitario cerrado. Sea  $f : D \rightarrow D$  una función continua. Entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Por absurdo, supongamos que existe una  $f : D \rightarrow D$  continua tal que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in D$ . Observar que  $\|f\| \leq 1$ .

Como  $D$  es compacto, la función continua  $D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x - f(x)\|$  tiene un mínimo que debe ser positivo, llamémosle  $\mu$ . De esta forma,  $\|f - \text{id}\| \geq \mu > 0$ .

Por el teorema de Stone-Weierstrass, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $P : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un polinomio tal que  $\|f - P\| < \epsilon$ . No es necesariamente  $P(D) \subset D$ , así que lo ajustamos:

$$\|P\| = \|P - f + f\| \geq \|f - P\| + \|f\| < \epsilon + 1$$

Por lo tanto  $\frac{P}{1+\epsilon} : D \rightarrow D$  es una función diferenciable.

Por el teorema 2.3.2,  $\frac{P}{1+\epsilon}$  tiene un punto fijo. Veamos que, por otro lado,  $\|\frac{P}{1+\epsilon} - \text{id}\| > 0$ , llegando a una contradicción.

$$\left\| \frac{P}{1+\epsilon} - \text{id} \right\| = \left\| f - \text{id} - \left( f - \frac{P}{1+\epsilon} \right) \right\| \geq \left| \|f - \text{id}\| - \left\| f - \frac{P}{1+\epsilon} \right\| \right|$$

Por otro lado,

$$\left\| f - \frac{P}{1+\epsilon} \right\| = \frac{1}{1+\epsilon} \|f + \epsilon f - P\| \leq \frac{1}{1+\epsilon} (\overbrace{\|f - P\|}^{< \epsilon} + \epsilon \overbrace{\|f\|}^{\leq 1}) < \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} < 2\epsilon$$

Combinando estas dos desigualdades,  $\|\frac{P}{1+\epsilon} - \text{id}\| \geq |\mu - 2\epsilon| > 0$  tomando  $\epsilon < \frac{\mu}{2}$ , terminando la demostración.  $\square$



# Capítulo 3

## Inmersiones, sumersiones, encajes

**Definición 3.0.6.** Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable entre variedades,  $p \in M$ .

- Si  $df_p$  es inyectivo, decimos que  $f$  es una *inmersión en  $p$* .
- Si  $df_p$  es sobreyectivo, decimos que  $f$  es una *sumersión en  $p$* .

Decimos que  $f$  es una *inmersión* (resp. *sumersión*) si lo es en todo punto.

Si  $f$  es una inmersión que es un homeomorfismo sobre su imagen, decimos que es un *encaje* (en inglés: *embedding*).

No entraremos en gran detalle en el estudio de las inmersiones, sumersiones y encajes (para ello, ver [Lee1], capítulos 7 y 8). Nos interesa no obstante probar primero una propiedad importante de los encajes: si  $f : M \rightarrow N$  es un encaje, entonces  $f(M)$  es una variedad y  $f : M \rightarrow f(M)$  es un difeomorfismo.

Veamos primero que esto ocurre localmente para las inmersiones.

**Proposición 3.0.7.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $p \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  una inmersión en  $p$ . Existe  $U_0 \subset U$  un entorno abierto de  $p$  tal que  $f(U_0)$  es una variedad y  $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow f(U_0)$  es un difeomorfismo.

*Demostración.* Como  $df_p$  es inyectivo, entonces  $\dim \text{Im } df_p = n$  y por lo tanto  $\dim(\text{Im } df_p)^\perp = k - n$ . Existe pues un isomorfismo lineal  $A : \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow (\text{Im } df_p)^\perp$ .

Definimos  $F : U \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k$  como  $F(x, y) = f(x) + Ay$ . Se verifica fácilmente que  $dF_{(p,0)}(u, v) = df_p(u) + Av$ . Este diferencial es inyectivo. En efecto, si  $dF_{(p,0)}(u, v) = 0$  entonces  $df_p(u) = A(-v)$ , luego  $df_p(u) \in \text{Im } A = (\text{Im } df_p)^\perp$ . Debe cumplirse entonces que  $df_p(u) = 0$  y por tanto  $Av = 0$ . Como  $f$  es una inmersión en  $p$  y  $A$  es un isomorfismo, entonces  $u = v = 0$ .

Por el teorema de la función inversa, existen  $U_0 \subset \mathbb{R}^n$  y  $V_0 \subset \mathbb{R}^{k-n}$  entornos abiertos de  $p$  y de  $0$  respectivamente tales que  $F(U_0 \times V_0) \subset \mathbb{R}^k$  es abierto y

$$F|_{U_0 \times V_0} : U_0 \times V_0 \rightarrow F(U_0 \times V_0)$$

es un difeomorfismo. Observar que  $F(U_0 \times 0) = f(U_0)$ .

Entonces  $F(U_0 \times V_0) \subset \mathbb{R}^k$  es un abierto que contiene a  $f(U_0)$ , y

$$F|_{U_0 \times 0} : U_0 \times 0 \rightarrow F(U_0 \times V_0) \cap f(U_0)$$

es un difeomorfismo. Por definición, esto prueba que  $f(U_0)$  es una variedad (identificando  $U_0 \times 0$  con  $U_0$ ). Esto prueba también que  $f : U_0 \rightarrow f(U_0)$  es un difeomorfismo.  $\square$

**Corolario 3.0.8.** *Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  un encaje. Entonces  $f(U)$  es una variedad, y  $f$  es un difeomorfismo sobre su imagen.*

*Demostración.* Sea  $x_0 \in U$ . Por la proposición 3.0.7, existe  $U_0 \subset U$  abierto tal que  $f(U_0)$  es una variedad y  $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow f(U_0)$  es un difeomorfismo. Esto prueba que  $f(U)$  es una variedad, pues  $x_0 \in U$  es arbitrario.

Como  $f$  es un homeomorfismo sobre su imagen, entonces  $f(U_0) \subset f(U)$  es abierto, i.e. existe un abierto  $W \subset \mathbb{R}^k$  tal que  $f(U_0) = f(U) \cap W$ .

Como además  $f^{-1}|_{f(U_0)} = (f|_{U_0})^{-1} : f(U_0) \rightarrow U_0$  es diferenciable, entonces  $f^{-1}|_{f(U) \cap W}$  es diferenciable. El punto  $x_0 \in U$  es arbitrario, así que esto prueba que  $f^{-1}$  es diferenciable.  $\square$

*Observación 3.0.9.* La proposición anterior y su corolario se generalizan *mutatis mutandis* a mapas entre variedades, pero la demostración es más complicada (ver [Lee1], teorema 8.3 y lema 8.18).

*Observación 3.0.10.* Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable, donde  $M$  y  $N$  son variedades de la misma dimensión. Entonces  $f$  es un encaje si y sólo si  $f(M) \subset N$  es abierto y  $f$  es un difeomorfismo sobre su imagen.

Veamos ahora que toda variedad  $M \subset \mathbb{R}^k$  es localmente un conjunto de nivel de una sumersión, y en particular es localmente una preimagen de valor regular.

**Corolario 3.0.11.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una  $n$ -variedad. Entonces para todo  $p \in M$  existe  $W \subset \mathbb{R}^k$  un entorno abierto de  $p$  y una sumersión  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  tal que  $M \cap W = g^{-1}(0)$ .*

*Demostración.* Usamos la construcción de la demostración de la proposición 3.0.7. Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización con  $\varphi(q) = p$ . Observar que  $\varphi$  es una inmersión en  $q$ .

Sea  $A : \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow (\text{Im } d\varphi_q)^\perp = T_p M^\perp$  un isomorfismo lineal. Definimos

$$F : U \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad F(x, y) := \varphi(x) + Ay$$

Sean  $U_0 \subset U$  un entorno abierto de  $q$ ,  $V_0 \subset \mathbb{R}^{k-n}$  un entorno abierto de  $0$  tales que  $F(U_0 \times V_0) \subset \mathbb{R}^k$  es abierto y  $F|_{U_0 \times V_0} : U_0 \times V_0 \rightarrow F(U_0 \times V_0)$  es un difeomorfismo.

Sean  $W = F(U_0 \times V_0) \subset \mathbb{R}^k$  y  $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  la transformación lineal definida como  $\pi(x, y) = y$ . Sea  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  definida como  $g = \pi \circ (F|_{U_0 \times V_0})^{-1}$ . Entonces  $g^{-1}(0) = W \cap M$ , y  $g$  es una sumersión: en efecto, si  $x \in W$ , entonces

$$dg_x \stackrel{\text{r.c.}}{=} d\pi_{F|_{U_0 \times V_0}^{-1}(x)} \circ d(F|_{U_0 \times V_0}^{-1})_x = \pi \circ d(F|_{U_0 \times V_0}^{-1})_x$$

---

es sobreyectivo, pues  $\pi$  lo es y  $d(F|_{U_0 \times V_0}^{-1})_x$  es un isomorfismo. □

*Observación 3.0.12.* El corolario anterior se generaliza de la siguiente manera. Sea  $N$  una  $k$ -variedad y  $M \subset N$  una  $n$ -subvariedad, donde esto significa que la inclusión  $i : M \rightarrow N$  es un encaje. Entonces para todo  $p \in M$  existe  $W \subset N$  un entorno abierto de  $p$  y una sumersión  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  tal que  $W \cap M = g^{-1}(0)$ . Ver [Lee1], proposición 8.12.

# Capítulo 4

## Chichones y particiones de la unidad

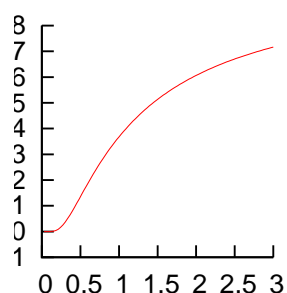
Sea  $X$  un espacio topológico y  $A, B \subset X$  son cerrados tales que  $A \cup B = X$ . Si  $Y$  es otro espacio topológico, para definir un mapa continuo  $X \rightarrow Y$  basta definir dos funciones, una  $A \rightarrow Y$  y otra  $B \rightarrow Y$  que coincidan en  $A \cap B$  (lema A.7 de [Lee1]).

Si queremos hacer algo similar en el contexto diferencial, tenemos que ser un poco más cuidadosos si queremos que el resultado nos quede diferenciable. Para ello es que hay que introducir funciones chichón y particiones de la unidad.

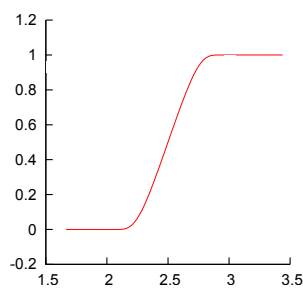
**Proposición 4.0.13.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $0 < a < b$ . Existe una función diferenciable  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , llamada función chichón, tal que  $\rho|_{B(0,a)} = 1$  y  $\rho|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,b)} = 0$ .

*Esbozo de la demostración.* La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$  (ver figura 4.1a)

es diferenciable, como se puede probar con técnicas de cálculo (ver lema 2.20 de [Lee1]). Ahora se trata sencillamente de modificar adecuadamente esta función.



(a) Gráfico de  $f$



(b) Gráfico de  $\psi_{2,3}$

Figura 4.1

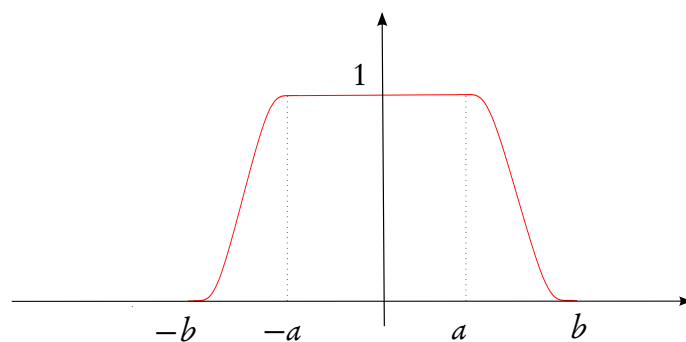


Figura 4.2: Gráfico de  $\rho_{a,b}$

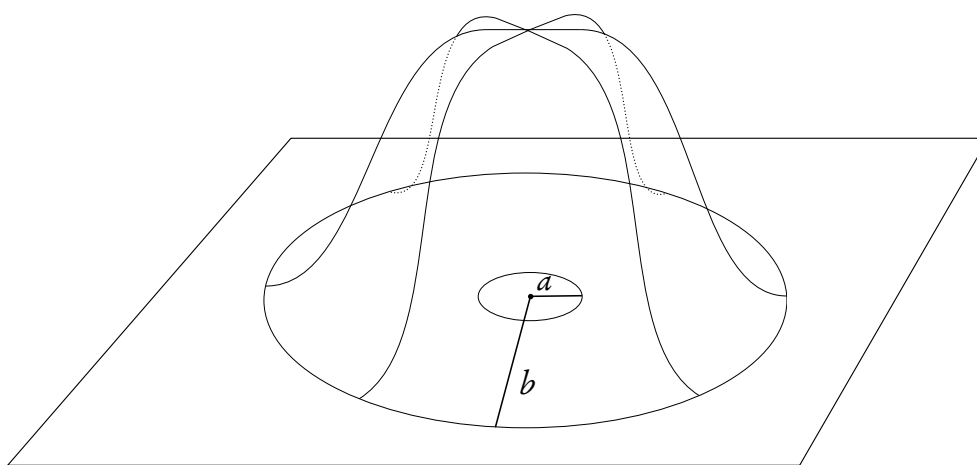


Figura 4.3: Gráfico de  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$

Definimos  $\psi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  como  $\psi_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{f(t-a)}{f(t-a)+f(b-t)} & \text{si } a \leq t \leq b \text{ (ver figura 4.1b).} \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$

4.1b). Es una función diferenciable.

Ahora definimos  $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  como  $\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} \psi_{-b,-a}(t) & \text{si } t < 0 \\ \psi_{-b,-a}(-t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$  (ver figura 4.2).

4.2). Es una función diferenciable, y es la versión unidimensional de nuestra  $\rho$  deseada.

Definimos  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$  como  $\rho(x) = \varphi_{a,b}(\|x\|)$  (ver figura 4.3) y ya está.  $\square$

Gracias a estos chichones en  $\mathbb{R}^n$  se demuestra el teorema de partición de la unidad, que recordamos a continuación.

**Teorema 4.0.14** (partición de la unidad). *Sea  $M$  una variedad y sea  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $M$ . Existen funciones diferenciables  $\{\psi_i : M \rightarrow [0,1]\}_{i \in I}$  tales que:*

- $\text{sop } \psi_i \subset U_i$ ,

---

$\cdot \sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$  para todo  $x \in M$ ,

$\cdot$  todo punto de  $M$  tiene un entorno que interseca a lo sumo finitos  $\text{sop } \psi_i$ .

El conjunto  $\{\psi_i\}_{i \in I}$  se llama partición de la unidad de  $M$  subordinada a  $\mathcal{U}$ .

*Demostración.* Ver [Lee1], teorema 2.25. □

Como consecuencia del teorema de partición de la unidad, podemos definir chichones en variedades.

**Teorema 4.0.15** (existencia de chichones). *Sea  $M$  una variedad,  $A \subset M$  cerrado y  $U \subset M$  abierto con  $A \subset U$ . Existe una función diferenciable  $\rho : M \rightarrow [0, 1]$ , llamada función chichón, tal que  $\rho|_A = 1$  y  $\rho|_{M \setminus U} = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $U_0 = U$  y  $U_1 = M \setminus A$ , y sea  $\{\psi_0, \psi_1\}$  una partición de la unidad subordinada al cubrimiento abierto  $\{U_0, U_1\}$ . Como  $\psi_1|_A = 0$ , entonces  $\psi_0|_A = 1$ , luego tomando  $\rho = \psi_0$  ya está. □

Otra consecuencia del teorema de partición de la unidad que utilizaremos más tarde, es el siguiente

**Lema 4.0.16** (de extensión). *Sea  $M$  una variedad,  $A \subset M$  cerrado, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función diferenciable. Para todo  $U \subset M$  abierto tal que  $A \subset U$ , existe una función diferenciable  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que  $\tilde{f}|_A = f$  y  $\text{sop}(\tilde{f}) \subset U$ .*

*Demostración.* Ver [Lee1], lema 2.27. □

# Capítulo 5

## Homotopías e isotopías

### 5.1. Homotopías

**Definición 5.1.1.** Sean  $f, g : M \rightarrow N$  mapas diferenciables entre variedades. Decimos que una función  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  es una *homotopía* si es diferenciable y  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$ , para todo  $x \in M$ .

Denotaremos a  $F(x, t)$  por  $F_t(x)$ , para todo  $x \in M$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Para probar que esto es una relación de equivalencia utilizaremos chichones.

**Proposición 5.1.2.** Sean  $M$  y  $N$  variedades. La relación “ser homotópico a” en los mapas diferenciables  $M \rightarrow N$  es una relación de equivalencia.

*Demostración.* Claramente es idéntica. Es simétrica, pues si  $F$  es una homotopía tal que  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$  entonces  $G(x, s) = F(x, 1 - s)$  es una homotopía tal que  $G_0 = g$  y  $G_1 = f$ .

Veamos que es transitiva. Supongamos que  $F$  y  $G$  son homotopías tales que  $F_0 = f$ ,  $F_1 = g$ ,  $G_0 = g$ ,  $G_1 = h$ . Sea  $\psi := \psi_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}$  como arriba.

Sean  $F_0(x, t) = F(x, \psi(t))$  y  $G_0(x, t) = G(x, \psi(t))$ . Definimos

$$H(x, t) = \begin{cases} F_0(x, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ G_0(x, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Entonces  $H$  es diferenciable, por lo tanto es una homotopía que cumple  $H_0 = f$ ,  $H_1 = h$ .  $\square$

Podemos decir entonces que “ $f$  y  $g$  son homotópicos”, en cuyo caso escribiremos  $f \simeq g$ .

*Observación 5.1.3.* En la demostración anterior fue necesario introducir los chichones para garantizar la diferenciable de la homotopía. Si tan solo nos interesara su continuidad, no habría sido necesario: las habríamos podido pegar sin introducir  $F_0$  y  $G_0$ .

*Observación 5.1.4.* En la definición de homotopía se puede remplazar el intervalo  $[0, 1]$  por otro intervalo compacto no vacío  $[a, b]$ , lo cual puede a veces resultar conveniente y no introduce una mayor generalidad.

*Observación 5.1.5.* Sean  $M \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f'} \end{matrix} N \begin{matrix} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g'} \end{matrix} Z$  mapas entre variedades. Si  $f \simeq f'$  mediante una homotopía  $F$  y  $g \simeq g'$  mediante una homotopía  $G$ , entonces  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ .

En efecto,  $H : M \times [0, 1] \rightarrow Z$  definida por  $H(x, t) = G(F(x, t), t)$  es la homotopía deseada.

## 5.2. Isotopías

**Definición 5.2.1.** Sean  $f, g : M \rightarrow N$  difeomorfismos. Decimos que  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  es una *isotopía* si:

- $F$  es diferenciable,
- las funciones  $M \rightarrow N, x \mapsto F(x, t)$  son diferenciables para todo  $t \in [0, 1]$ ,
- $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in M$ .

Denotaremos a  $F(x, t)$  por  $F_t(x)$ , para todo  $x \in M, t \in [0, 1]$ .

*Observación 5.2.2.* 1. Análogamente a como hiciéramos con las homotopías, se demuestra que la relación “ser isotópico a” es de equivalencia en los difeomorfismos  $M \rightarrow N$ . Por lo tanto, podemos decir que “ $f$  y  $g$  son isotópicos”.

2. Si  $f, g$  son difeomorfismos isotópicos, entonces son mapas homotópicos.

*Ejemplo 5.2.3.* Sea  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo diferenciable tal que  $\|X(x)\| \leq c$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Consideremos la ecuación diferencial autónoma  $\dot{x} = X(x)$ .

Las soluciones están definidas para todo tiempo por la hipótesis de acotación y el teorema de escape de compactos. Gracias al teorema de Picard, tenemos definido el *flujo* de  $X$ ,  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $t \mapsto \phi_t(x) := \phi(x, t)$  es la única solución maximal que en tiempo 0 vale  $x$ . Es una función diferenciable por el teorema de diferenciabilidad respecto de las condiciones iniciales.

Observar que  $\phi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ . Recordar la *propiedad de grupo*:  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$  para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Deducimos entonces que  $\phi_t$  es un difeomorfismo para todo  $t$ , cuya inversa es  $\phi_{-t}$ .

En conclusión,  $\phi : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una isotopía entre  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  y  $\phi_1$ .

A continuación introducimos dos resultados muy útiles en la teoría que desarrollaremos a posteriori: el lema de homogeneidad y el lema de isotopía.



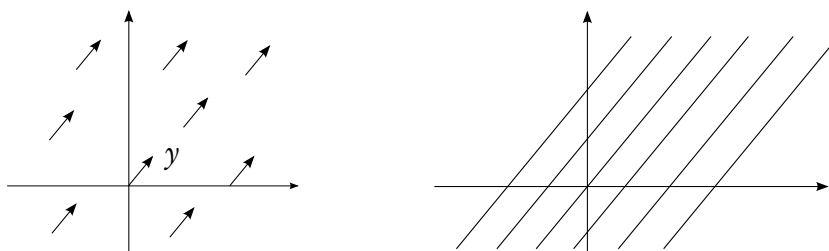


Figura 5.1: El campo  $Y$  y algunas de sus curvas integrales

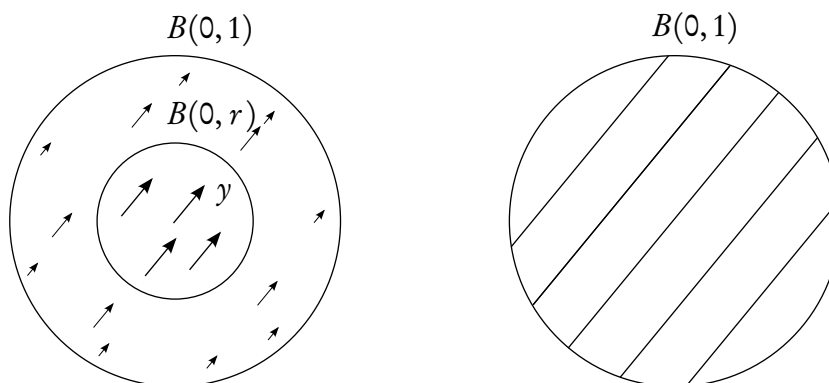


Figura 5.2: El campo  $X$  y algunas de sus curvas integrales

**Lema 5.2.4.** Sea  $y \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ . Existe  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo isotópico a  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  tal que  $h(0) = y$  y la isotopía deja fijos los puntos fuera de  $B(0,1)$ .

*Demostración.* Sea  $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el campo constante  $Y(p) = y$  para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ . Su flujo es  $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi(x, t) = x + ty$  (ver figura 5.1).

Observar que  $\psi_1(0) = y$ ; modificando el campo  $Y$  adecuadamente conseguiremos un campo cuyo flujo en tiempo 1 también valga  $y$ , pero que además sea constante fuera de  $B(0,1)$  en todo tiempo.

Sea  $r \in (0,1)$  tal que  $y \in B(0,r)$ . Sea  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$  el chichón tal que  $\rho|_{\overline{B(0,r)}} = 1$ ,  $\rho|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} = 0$ . Sea  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el campo  $X = \rho Y$  (ver figura 5.2).

Sea  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  el flujo de  $X$ . Como  $X|_{B(0,r)} = Y|_{B(0,r)}$  y  $\psi_1(0) = y \in B(0,r)$ , entonces  $\phi_1(0) = y$ .

Además  $X|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} = 0$ , luego  $\phi_t(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto  $\phi : \mathbb{R}^n \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una isotopía entre  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  y  $\phi_1$ , donde  $\phi_1(0) = y$ , y la isotopía deja fijos los puntos fuera de  $B(0,1)$ .  $\square$

**Lema 5.2.5** (de homogeneidad). Sea  $N$  una variedad conexa. Para todo  $x, y \in N$  existe  $f : N \rightarrow N$  un difeomorfismo isotópico a  $\text{id}_N$  tal que  $f(x) = y$ .

*Demostración.* Sea  $\text{Diff}^0(N)$  el grupo de los difeomorfismos de  $N$  isotópicos a  $\text{id}_N$ . Tenemos una acción  $\text{Diff}^0(N) \times N \rightarrow N$ ,  $f \cdot x := f(x)$ .

La tesis del lema dice que esta acción es transitiva. En otras palabras, debemos probar que esta acción tiene una sola órbita. Como  $N$  es unión disjunta de las órbitas, entonces por la conexión de  $N$  basta probar que las órbitas son abiertas.

Sea  $x \in N$ . Queremos ver que existe  $W \subset N$  un entorno abierto de  $x$  donde todos los puntos están en la misma órbita.

Sea  $\varphi : B(0, 2) \rightarrow N$  una parametrización tal que  $\varphi(0) = x$ . Sea  $W := \varphi(B(0, 1))$ . Sea  $q \in B(0, 1)$ . Veamos que existe  $h \in \text{Diff}^0(N)$  tal que  $h(x) = \varphi(q)$ .

Por el lema 5.2.4, existe  $\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo isotópico a  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  tal que la isotopía deja fijos los puntos fuera de  $B(0, 1)$  y  $\bar{h}(0) = q$ .

Definimos  $h : N \rightarrow N$  como

$$h(p) = \begin{cases} \varphi \bar{h} \varphi^{-1}(p) & \text{si } p \in \varphi(B(0, 2)) \\ p & \text{si } p \in N \setminus \varphi(B(0, 2)) \end{cases}$$

Claramente  $h$  es un difeomorfismo. Además  $h$  es isotópico a  $\text{id}_N$ . En efecto, si  $\bar{F} : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una isotopía entre  $\bar{h}$  e  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ , entonces  $F : N \times [0, 1] \rightarrow N$  definida por

$$F(p, t) = \begin{cases} \varphi \bar{F}(\varphi^{-1}(p), t) & \text{si } p \in \varphi(B(0, 2)) \\ p & \text{si } p \in N \setminus \varphi(B(0, 2)) \end{cases}$$

es una isotopía entre  $h$  e  $\text{id}_N$ , que además cumple  $h(x) = \varphi \bar{h} \varphi^{-1}(x) = \varphi \bar{h}(0) = \varphi(q)$ , y ya está.  $\square$

*Observación 5.2.6.* Sea  $M$  una variedad y sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo isotópico a  $\text{id}_M$ . Entonces  $f$  preserva orientación.

Se puede probar que si  $\dim N \geq 2$ , entonces  $\text{Diff}(N)$ , el grupo de difeomorfismos de  $N$ , actúa  $k$ -transitivamente en  $N$  para todo  $k \geq 1$ . Esto significa que para todo par de  $k$ -uplas  $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in N^k$  con  $x_i \neq x_j, y_i \neq y_j$  si  $i \neq j$  existe un difeomorfismo  $f : N \rightarrow N$  tal que  $f(x_i) = y_i$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

En el siguiente lema identificamos  $M_n(\mathbb{R})$ , el conjunto de matrices  $n \times n$  con coeficientes reales, con  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

**Lema 5.2.7.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función diferenciable tal que  $f(0) = 0$ . Existe una función diferenciable  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  tal que  $f(x) = g(x)x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $g(0) = df_0$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Definimos  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante

$$h(t) = f(tx) \tag{5.1}$$

Por el teorema fundamental del cálculo (coordenada a coordenada), se tiene

$$\int_0^1 b'(t) dt = b(1) - b(0) = f(x) - f(0) = f(x)$$

Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\int_0^1 b'(t) dt = \int_0^1 df_{tx} x dt = \left( \int_0^1 df_{tx} dt \right) x$$

donde consideramos  $df_{tx} \in GL_n(\mathbb{R})$ .

Por lo tanto, si definimos  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  como  $g(x) = \int_0^1 df_{tx} dt$  entonces se tiene que  $f(x) = g(x)x$  para todo  $x$ , y además  $g(0) = \int_0^1 df_0 dt = df_0$ .  $\square$

Sea  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida como  $r(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$  la reflexión en torno del eje  $Ox$ .

**Lema 5.2.8** (de isotopía). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo que preserva (resp. revierte) orientación tal que  $f(0) = 0$ . Existe una isotopía  $F_t$  entre  $f$  e  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  (resp.  $r$ ) tal que  $F_t(0) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .*

*Demostración.* Definimos  $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{f(tx)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ df_0 x & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Observar que  $F_t(0) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$  y que  $F_0 = df_0$ ,  $F_1 = f$ . Claramente  $F_t$  es un difeomorfismo para todo  $t \in [0, 1]$ .

Para probar que  $F$  es diferenciable usamos el lema 5.2.7: existe una función diferenciable  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  tal que  $f(x) = g(x)x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $g(0) = df_0$ . Por lo tanto

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{g(tx)tx}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ df_0 x & \text{si } t = 0 \end{cases} = \begin{cases} g(tx)x & \text{si } t \neq 0 \\ g(0)x & \text{si } t = 0 \end{cases} = g(tx)x$$

para todo  $(t, x) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ , y entonces  $F$  es diferenciable.

Supongamos que  $f$  preserva orientación. Entonces  $\det df_0 > 0$ , y por lo tanto  $df_0 \in GL_n^+(\mathbb{R})$  que es conexo por el teorema A.2.1.

Existe pues una curva diferenciable  $\alpha : [0, 1] \rightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$  que une  $df_0$  con  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  (ver observación 5.2.9 debajo). Definimos entonces  $G : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $G(x, t) = \alpha(t)x$ : esta es una isotopía entre  $df_0$  e  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  que cumple  $G_t(0) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

En conclusión,  $f$  es isotópico a  $df_0$  por una isotopía que deja fijo a 0, y  $df_0$  es isotópico a  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  por otra isotopía que deja fijo a 0. Por transitividad (observación 5.2.2.1) esto termina la demostración de este caso.

Si  $f$  revierte orientación, entonces  $\det df_0 < 0$  y por lo tanto existe una curva diferenciable  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n^-(\mathbb{R})$  que une  $df_0$  con  $r$  (corolario A.2.2). La misma demostración del caso anterior concluye el lema.  $\square$

*Observación 5.2.9.* Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto. Puede probarse que  $U$  es conexo si y sólo si  $U$  es conexo por caminos diferenciables. El recíproco es conocido. Una manera de probar la afirmación directa es: dados dos puntos, unirlos por una curva recta a trozos cuyos trozos son rectas paralelas a los ejes, y usar las funciones del comienzo del capítulo 4 para alisar las esquinas.

**Corolario 5.2.10.** *Todo difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  que preserva (resp. revierte) orientación es isotópico a  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  (resp.  $r$ ).*

*Demostración.* Sea  $f$  un difeomorfismo que preserva orientación, y sea  $y := f(0)$ . Por el lema de homogeneidad, existe un difeomorfismo  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  isotópico a  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  tal que  $g(y) = 0$ .

Entonces  $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo que preserva orientación tal que  $(g \circ f)(0) = 0$ . Por el lema de isotopía,  $g \circ f$  es isotópico a  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ . Entonces si  $\cong$  denota la relación de isotopía,

$$\begin{cases} g \circ f \cong \text{id}_{\mathbb{R}^n} \\ g \cong \text{id}_{\mathbb{R}^n} \end{cases} \implies \text{id}_{\mathbb{R}^n} \cong g \circ f \cong f \implies f \cong \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

terminando la demostración de este caso.

Si  $f$  revierte orientación, la demostración de  $f \cong r$  es análoga.  $\square$

*Observación 5.2.11.* Sean  $M, N$  variedades. Si  $f, g : M \rightarrow N$  son encajes, una isotopía entre  $f$  y  $g$  se define como una función diferenciable  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$  y la función  $x \mapsto F(x, t)$  es un encaje para todo  $t \in [0, 1]$ .

Tendremos ocasión de utilizar una generalización del lema de isotopía a esta situación: en lugar de tomar un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$ , se toma un encaje  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto convexo<sup>1</sup>; se toma  $\text{id}_U$  en lugar de  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$  (resp.  $r_U$ ); la isotopía es  $F_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Observar que la misma demostración funciona, pues como  $U$  es convexo, entonces  $x \in U \Rightarrow tx \in U$  para todo  $t \in [0, 1]$ , y por lo tanto las definiciones (5.1), (5.2) siguen siendo válidas, etc.

<sup>1</sup>Recordar que por la observación 3.0.10, en este caso  $f$  es un encaje si y sólo si  $f(U)$  es abierto y  $f$  es un difeomorfismo sobre su imagen.

## 5.2 Isotopías

---

El caso en que  $f$  revierte orientación se adapta de la misma forma siendo  $r$  cualquier difeomorfismo que revierte orientación. Por ejemplo, si  $U$  es simétrico respecto de algún eje (por ejemplo  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \Rightarrow (-x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ ) podemos tomar la misma  $r$  de antes.

# Capítulo 6

## Teoría del grado módulo 2

Dado un mapa entre variedades de la misma dimensión donde el dominio es compacto, ya sabemos que la preimagen de un valor regular es un conjunto finito (lema 1.0.5). Asimismo vimos que la cantidad de preimágenes de un valor regular no es globalmente constante en los valores regulares en general (ejemplo 1.0.9). Pero sí lo será si la tomamos módulo 2, y a probar eso nos dirigimos.

**Definición 6.0.12.** Sean  $M$  y  $N$  variedades de la misma dimensión, con  $M$  compacta y  $N$  conexa con borde. Sea  $f : M \rightarrow N$ .

Dado  $y \in N$  valor regular de  $f$ , definimos el *grado módulo 2 de  $f$  relativo a  $y$*  como el único entero en  $\{0, 1\}$  que cumple  $\deg_2(f, y) \equiv \#f^{-1}(y) \pmod{2}$ .

En lo que queda del capítulo,  $M$  y  $N$  son variedades de la misma dimensión, con  $M$  compacta y  $N$  conexa con borde, a menos que se especifique de otra forma.

**Lema 6.0.13** (de homotopía). Sean  $f, g : M \rightarrow N$  mapas diferenciables homotópicos. Si  $y \in N$  es valor regular de  $f$  y de  $g$ , entonces  $\deg_2(f, y) = \deg_2(g, y)$ .

*Demostración.* Sea  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  una homotopía tal que  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$ .

Supongamos primero que  $y$  es también valor regular de  $F$ .

Observar que  $y$  es valor regular de  $F|_{\partial(M \times [0, 1])}$  pues  $F|_{M \times 0} = f$  y  $F|_{M \times 1} = g$ . Por el teorema de preimagen de valor regular 2.2.4,  $F^{-1}(y)$  es una 1-variedad con borde, y cumple

$$\begin{aligned} \partial F^{-1}(y) &= F^{-1}(y) \cap \partial(M \times [0, 1]) = F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1) \\ &= [F^{-1}(y) \cap (M \times 0)] \cup [F^{-1}(y) \cap (M \times 1)] \\ &= f^{-1}(y) \sqcup g^{-1}(y) \end{aligned}$$

donde  $\sqcup$  denota la unión disjunta.

Por lo tanto  $\#\partial F^{-1}(y) = \#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$ . Como  $F^{-1}(y)$  es una 1-variedad compacta con borde, entonces por la proposición 2.2.7 tiene un número par de puntos en el borde. Es decir,  $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y) \equiv 0 \pmod{2}$ , y por lo tanto  $\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}$ . En conclusión,  $\deg_2(f, y) = \deg_2(g, y)$ .

Supongamos ahora que  $y$  no es valor regular de  $F$ .

Como las funciones  $y' \mapsto \#f^{-1}(y')$  e  $y' \mapsto \#g^{-1}(y')$  son localmente constantes en los valores regulares de  $f$  y de  $g$  respectivamente (corolario 1.0.7), existe un entorno abierto  $U \subset N$  de  $y$  donde estas funciones son constantes.

Por el teorema de Sard, existe  $z \in U$  que es valor regular de  $f$ ,  $g$  y  $F$ . Por lo tanto

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \equiv \#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y) \pmod{2}$$

terminando la demostración. □

Ahora podemos probar que el grado módulo 2 no depende del valor regular elegido.

**Teorema 6.0.14.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable. Si  $y, z \in N$  son valores regulares de  $N$ , entonces  $\deg_2(f, y) = \deg_2(f, z)$ .*

*Demostración.* Por el lema de homogeneidad, existe  $h : N \rightarrow N$  un difeomorfismo isotópico a  $\text{id}_N$  tal que  $h(y) = z$ . Consideremos  $h \circ f : M \rightarrow N$ .

Observar que  $(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y)$ . Además  $z$  es valor regular de  $h \circ f$ , ya que si  $x \in (h \circ f)^{-1}(z)$ , entonces

$$d(h \circ f)_x \stackrel{\text{r.c.}}{=} dh_{f(x)} \circ df_x = dh_y \circ df_x$$

que es sobreyectivo, pues  $dh_y$  es un isomorfismo al ser  $h$  un difeomorfismo y  $df_x$  es sobreyectivo al ser  $x$  un punto regular de  $f$ . Por lo tanto  $\deg_2(h \circ f, z) = \deg_2(f, y)$ .

Por otro lado, como  $h$  es isotópico a  $\text{id}_N$ , en particular  $h \simeq \text{id}_N$ , y por tanto  $h \circ f \equiv f$ . Como  $z$  es valor regular de  $h \circ f$  y de  $f$ , por el lema de homotopía se tiene entonces que  $\deg_2(f, z) = \deg_2(h \circ f, z)$ .

En conclusión,  $\deg_2(f, y) = \deg_2(f, z)$ . □

**Definición 6.0.15.** Si  $f : M \rightarrow N$  es un mapa diferenciable, definimos  $\deg_2(f)$ , el *grado módulo 2 de  $f$* , como  $\deg_2(f, y)$  donde  $y \in N$  es un valor regular de  $f$ .

*Observación 6.0.16.* Esta definición tiene sentido en virtud del teorema de Sard y del teorema 6.0.14.

**Corolario 6.0.17.** *Si  $f, g : M \rightarrow N$  son mapas diferenciables homotópicos, entonces tienen el mismo grado módulo 2.*

*Demostración.* Por el teorema de Sard existe  $y \in N$  valor regular de  $f$  y de  $g$ . El resultado se deduce del lema de homotopía y de la definición de  $\deg_2$ . □

---

El grado módulo 2 nos da entonces una condición necesaria para que dos mapas sean homotópicos.

*Ejemplo 6.0.18.* Sea  $M$  una variedad compacta y conexa. Entonces  $\deg_2(\text{id}_M) = 1$ .

*Ejemplo 6.0.19.* Consideremos  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . Sea  $f_k : S^1 \rightarrow S^1$  definida como  $f_k(z) = z^k$ . Entonces  $\deg_2(f_k) \equiv k \pmod{2}$ .

Por lo tanto si  $n$  y  $m$  tienen distinta paridad,  $f_n$  y  $f_m$  no pueden ser homotópicos.

Si  $n$  y  $m$  tienen la misma paridad, no podemos decir nada. Resultará que  $f_n \simeq f_m$  si y sólo si  $n = m$ , pero para ello precisamos introducir un invariante más fuerte, el grado de Brouwer.

**Aplicación 6.0.20.** Sea  $M$  una variedad compacta conexa con  $\#M > 1$ . Entonces  $M$  no se puede contraer a un punto, i.e.  $\text{id}_M$  no es homotópica a un mapa constante. Decimos que  $M$  no es contráctil.

*Demostración.* Tenemos que  $\deg_2(\text{id}_M) = 1$ , pero el grado módulo 2 de un mapa constante  $f : M \rightarrow M$  es nulo, pues al ser  $\#M > 1$  existe  $y \in M \setminus f(M)$ , que es un valor regular de  $f$  sin preimágenes.  $\square$

*Ejercicio 6.0.21.* Probar que si  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  son mapas diferenciables en las hipótesis del grado módulo 2, entonces  $\deg_2(g \circ f) = \deg_2(g) \deg_2(f)$ .



# Capítulo 7

## Teoría del grado de Brouwer

Si ahora nuestras variedades son orientables, podemos definir una teoría del grado más potente que el grado módulo dos.

**Definición 7.0.22.** Sea  $T : V \rightarrow W$  un isomorfismo de espacios vectoriales orientados. Definimos

$$\text{sg}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ preserva orientación} \\ -1 & \text{si } T \text{ revierte orientación} \end{cases} = \frac{\det T}{|\det T|}$$

*Observación 7.0.23.* Si  $V \xrightarrow{S} W \xrightarrow{T} Z$  son isomorfismos de espacios vectoriales orientados, entonces  $\text{sg}(S \circ T) = \text{sg}(S)\text{sg}(T)$ .

**Definición 7.0.24.** Sean  $M, N$  variedades orientadas de la misma dimensión, con  $M$  compacta y  $N$  conexa. Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable, y sea  $y \in N$  un valor regular de  $f$ . Definimos el *grado (de Brouwer) de  $f$  en  $y$*  como

$$\text{deg}(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sg}(df_x)$$

Es decir, si  $y \in N$  es un valor regular de  $f$ , en vez de considerar la cantidad de preimágenes de  $y$  módulo 2 como hiciéramos en el capítulo anterior, consideramos las preimágenes de  $y$  con signo: cada preimagen suma 1 o resta 1 según si en esa preimagen  $f$  preserva o revierte orientación.

En lo que queda del capítulo,  $M$  y  $N$  son variedades orientadas de la misma dimensión, con  $M$  compacta y  $N$  conexa, a menos que se especifique de otra forma.

*Observación 7.0.25.* Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable, y sea  $y \in N$  un valor regular de  $f$ . Entonces  $\text{deg}(f, y) \equiv \text{deg}_2(f, y) \pmod{2}$ , sencillamente porque una suma de  $\pm 1$  una cantidad par (resp. impar) de veces es par (resp. impar)

Veamos ahora que si un mapa diferenciable en las hipótesis del grado es una “restricción al borde”, entonces su grado es cero.

**Lema 7.0.26** (del borde). *Supongamos que  $M = \partial W$ , donde  $W$  es una variedad compacta con borde. Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable. Consideremos  $M$  con la orientación borde.*

*Si existe un mapa diferenciable  $F : W \rightarrow N$  tal que  $F|_M = f$ , entonces  $\deg(f, y) = 0$ .*

Para demostrar este lema es conveniente introducir una orientación en una variedad dada como preimagen de valor regular.

**Definición 7.0.27.** Sea  $F : W \rightarrow N$  un mapa diferenciable entre variedades orientadas, donde  $W$  tiene borde. Sea  $y \in N$  un valor regular de  $F$  y de  $F|_{\partial W}$ . Definimos la *orientación preimagen* de la variedad  $F^{-1}(y)$  de la siguiente manera.

Dado  $x \in F^{-1}(y)$ , declaramos como positiva una base  $\{u_1, \dots, u_{w-n}\} \subset T_x F^{-1}(y)$  tal que cuando se completa a una base positiva  $\{u_1, \dots, u_{w-n}, v_1, \dots, v_n\} \subset T_x W$  se tiene que  $\{df_x(v_1), \dots, df_x(v_n)\} \subset T_y N$  es una base positiva.

Es un ejercicio probar que esta definición no depende de las bases consideradas, y que define una orientación en  $W$  (ver [OR], pp. 89-90 para una resolución).

Ahora podemos demostrar el lema.

*Demostración.* Supongamos primero que  $y \in N$  es valor regular de  $f$  y también de  $F$ .

Por el teorema 2.2.4,  $F^{-1}(y)$  es una 1-variedad compacta con borde, así que como dijimos en la demostración de 2.2.7, es una unión disjunta de finitas copias de  $S^1$  y de intervalos compactos. Además,

$$\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial W = f^{-1}(y)$$

y entonces las copias de  $S^1$  no pueden cortar a  $\partial W$ , y las copias de intervalos tienen dos puntos en  $\partial W$ , los extremos (ver figura 7.1).

Basta entonces probar que el signo del diferencial de  $f$  es opuesto en los dos extremos de cada intervalo de  $F^{-1}(y)$ . Sea  $A$  uno de estos.

Dotamos a  $A \subset F^{-1}(y)$  de la orientación preimagen. Como  $A$  es una 1-variedad orientada, existe un campo tangente unitario  $v_1$  en  $A$ , orientado positivamente.

Sea  $a$  el extremo de  $A$  donde  $v_1$  apunta hacia dentro de  $W$ , y  $b$  el extremo donde apunta hacia afuera (ver figura 7.1).

Veamos que  $\text{sg}(df_b) = 1$ . Análogamente se probará que  $\text{sg}(df_a) = -1$ , terminando la demostración de este caso.

Escribamos  $v_1 := v_1(b)$ . Podemos completar  $\{v_1\} \subset T_b A$  a una base positiva

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset T_b W$$

Como  $v_1$  es un vector saliente, por definición de la orientación borde en  $M$  esto significa que  $\{v_2, \dots, v_n\} \subset T_b M$  es una base positiva.

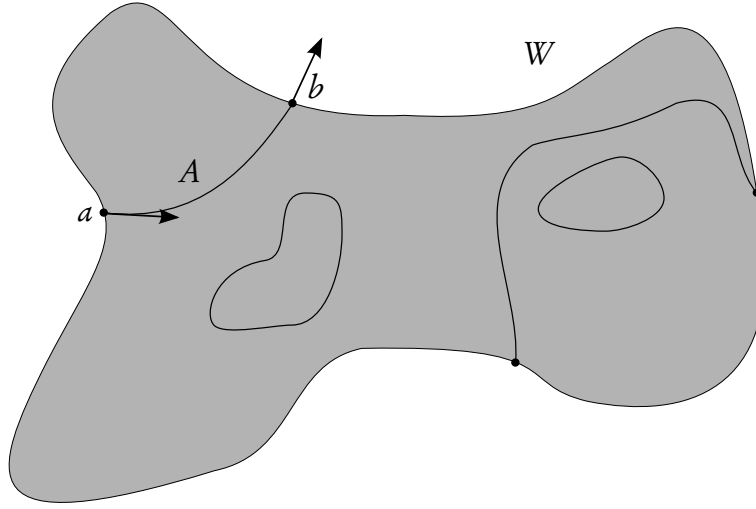


Figura 7.1

Como  $\{v_1\} \subset T_b A$  está orientado positivamente (al ser el campo  $v_1$  compatible con la orientación de  $A$ ) y  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es positiva, por definición de la orientación preimagen esto significa que  $\{df_b(v_2), \dots, df_b(v_n)\} \subset T_y N$  es una base positiva.

Es decir,  $df_b : T_b M \rightarrow T_y N$  manda la base positiva  $\{v_2, \dots, v_n\}$  en la base positiva  $\{df_b(v_2), \dots, df_b(v_n)\}$ , y por lo tanto  $df_b$  preserva orientación. Esto prueba que  $\text{sg}(df_b) = 1$ .

Supongamos ahora que  $y$  es valor regular de  $f$  pero no de  $F$ .

Por el corolario 1.0.7, la función  $y' \mapsto \#f^{-1}(y')$  es localmente constante en los valores regulares de  $f$ . La función  $x \mapsto \text{sg}(df_x)$  también es localmente constante, y por lo tanto  $y' \mapsto \text{deg}(f, y')$  es localmente constante en los valores regulares de  $f$ .

Existe entonces un entorno abierto  $U$  de  $y$  donde  $\text{deg}(f, y') = \text{deg}(f, y)$  para todo  $y' \in U$ . Por el teorema de Sard, existe  $z \in U$  tal que  $z$  es valor regular de  $F$  y de  $f$ .

Por lo recién probado,  $\text{deg}(f, z) = 0$ , y por lo tanto  $\text{deg}(f, y) = 0$ .  $\square$

**Observación 7.0.28.** Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable,  $y \in N$  valor regular de  $f$ . Si  $M = X \cup Y$  es la descomposición en componentes conexas de  $M$  con la orientación inducida, entonces  $\text{deg}(f, y) = \text{deg}(f|_X, y) + \text{deg}(f|_Y, y)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \text{deg}(f, y) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sg}(df_x) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap X} \text{sg}(df_x) + \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap Y} \text{sg}(df_x) \\ &= \text{deg}(f|_X, y) + \text{deg}(f|_Y, y) \end{aligned}$$

La misma observación vale *mutatis mutandis* cuando  $M$  se descompone en finitas componentes conexas.

**Lema 7.0.29** (de homotopía). Sean  $f, g : M \rightarrow N$  mapas diferenciables homotópicos. Si  $y \in N$  es valor regular de  $f$  y de  $g$ , entonces  $\text{deg}(f, y) = \text{deg}(g, y)$ .

*Demostración.* Sea  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  una homotopía tal que  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$ . Por el lema 7.0.26,  $\deg(F|_{\partial([0,1] \times M)}, \gamma) = 0$ . Entonces usando la observación anterior y la proposición 2.1.2,

$$\begin{aligned} 0 &= \deg(F|_{\partial([0,1] \times M)}, \gamma) = \deg(F|_{0 \times M \cup 1 \times M}, \gamma) \\ &= \deg(F|_{0 \times M}, \gamma) + \deg(F|_{1 \times M}, \gamma) \\ &= -\deg(f, \gamma) + \deg(g, \gamma) \end{aligned}$$

terminando la demostración. □

Veamos ahora que el grado de Brouwer no depende del valor regular escogido.

**Proposición 7.0.30.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable. Si  $y, z \in N$  son valores regulares de  $f$ , entonces  $\deg(f, y) = \deg(f, z)$ .*

*Demostración.* Por el lema de homogeneidad, existe  $h : N \rightarrow N$  un difeomorfismo isotópico a la identidad tal que  $h(y) = z$ . Como  $h$  es isotópico a  $\text{id}_N$ , entonces  $h$  preserva orientación (observación 5.2.6), y  $h \circ f$  es homotópico a  $f$ .

Observar que  $z$  es valor regular de  $h \circ f$ , pues  $h$  es un difeomorfismo y  $y$  es valor regular de  $f$ . Entonces por el lema de homotopía se tiene  $\deg(h \circ f, z) = \deg(f, y)$ . Ahora bien, usando la observación 7.0.23,

$$\begin{aligned} \deg(f, y) &= \deg(h \circ f, z) = \sum_{x \in (h \circ f)^{-1}(z)} \text{sg } d(h \circ f)_x \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \sum_{h(f(x))=z} \text{sg}(dh_{f(x)} \circ df_x) \\ &= \sum_{f(x)=y} \text{sg}(df_x) \\ &= \deg(f, y) \end{aligned}$$

terminando la demostración. □

**Definición 7.0.31.** Si  $f : M \rightarrow N$  es un mapa diferenciable, definimos  $\deg(f)$ , el *grado (de Brouwer) de  $f$* , como  $\deg(f, y)$  donde  $y \in N$  es un valor regular de  $f$ .

*Observación 7.0.32.* Esta definición tiene sentido en virtud del teorema de Sard y del teorema 7.0.30.

**Corolario 7.0.33.** *Si  $f, g : M \rightarrow N$  son mapas diferenciables homotópicos, entonces tienen el mismo grado.*

*Demostración.* Por el teorema de Sard, existe  $y \in N$  valor regular de  $f$  y de  $g$ . El resultado se deduce del lema de homotopía y de la proposición 7.0.30. □

Usaremos la fórmula del siguiente ejercicio a menudo:

*Ejercicio 7.0.34.* Probar que si  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  son mapas diferenciables en las hipótesis del grado, entonces  $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$ .

*Ejemplo 7.0.35.* 1. Sea  $M$  una variedad orientada, compacta y conexa. Entonces  $\deg(\text{id}_M) = 1$ .

2. Sea  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Entonces  $\deg(f) = \pm 1$  según si  $f$  preserva o revierte orientación.

3. Sea  $k \in \mathbb{Z}$  y consideremos  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . Sea  $f_k : S^1 \rightarrow S^1$  definida como

$$f_k(z) = \begin{cases} z^k & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ \bar{z}^k & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$$

Entonces  $\deg(f_k) = k$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Esto prueba que hay mapas  $S^1 \rightarrow S^1$  de todos los grados posibles.

Observar que  $f_n$  es homotópico a  $f_m$  si y sólo si  $n = m$ ; comparar con el ejemplo 6.0.19.

*Ejercicio 7.0.36.* En general, dos mapas con el mismo grado pueden no ser homotópicos. Probar que si  $T^2 = S^1 \times S^1$ , entonces el mapa  $f : T^2 \rightarrow T^2$ ,  $f(z, w) = (z, zw)$  tiene grado 1 pero no es homotópico a la identidad.

El fenómeno del ejercicio anterior no puede ocurrir en mapas cuyo codominio es una esfera. En efecto, un teorema de Hopf afirma que si  $M$  es una variedad compacta y orientada y  $f, g : M \rightarrow S^n$  son mapas diferenciables, entonces  $\deg(f) = \deg(g)$  si y sólo si  $f$  y  $g$  son homotópicos (ver [Mil], §7).

*Ejemplo 7.0.37.* 1. Sea  $r_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $r_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$  la reflexión en torno del eje  $Ox_i$ . Como  $r_i$  es un difeomorfismo que revierte orientación, entonces  $\deg r_i = -1$ .

2. Sea  $a : S^n \rightarrow S^n$  el mapa antipodal (o la antípoda):  $a(x) = -x$ . Como  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , entonces  $a = r_1 \circ \dots \circ r_{n+1}$ . Por lo tanto  $\deg a = (-1)^{n+1}$ .

En particular, si  $n$  es par, entonces  $\deg a = -1$ , y por lo tanto el mapa antipodal no es homotópico a la identidad.

Si  $n = 2k - 1$  es impar, entonces  $S^n \subset \mathbb{C}^k$ ,  $S^n = \{(z_1, \dots, z_k) : \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2} = 1\}$ , y  $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  definida como  $F(z_1, \dots, z_k, t) = (e^{\pi i t} z_1, \dots, e^{\pi i t} z_k)$  es una homotopía entre el mapa antipodal y la identidad.

En conclusión, el mapa antipodal de  $S^n$  es homotópico a  $\text{id}_{S^n}$  si y sólo si  $n$  es impar.

# Capítulo 8

## Campos de vectores

**Definición 8.0.38.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad. Un *campo de vectores* (diferenciable) en  $M$  es una función diferenciable  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que  $X(p) \in T_p M$  para todo  $p \in M$ .

Decimos que  $p \in M$  es una *singularidad de  $X$*  si  $X(p) = 0$ .

Denotaremos por  $\mathcal{X}(M)$  al conjunto de campos de vectores en  $M$ . Observar que es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y un  $C^\infty(M)$ -módulo, con la acción  $(f \cdot X)(p) := f(p)X(p)$ .

### 8.1. Teorema de la bola peluda

*Observación 8.1.1.* Sea  $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  una función diferenciable. Entonces  $X$  es un campo de vectores en  $S^n$  si y sólo si  $\langle p, X(p) \rangle = 0$  para todo  $p \in S^n$ , pues  $T_p S^n = \{p\}^\perp$ .

Ahora aplicaremos la teoría del grado de Brouwer para demostrar una generalización de un teorema clásico:  $S^2$  no admite un campo de vectores sin singularidades.

**Teorema 8.1.2** (de la bola peluda).  $S^n$  admite un campo de vectores sin singularidades si y sólo si  $n$  es impar.

*Demostración.* Probemos primero que si  $n$  es par entonces  $S^n$  no admite un campo de vectores sin singularidades.

Por absurdo, supongamos que existe  $X \in \mathcal{X}(S^n)$  tal que  $X(p) \neq 0$  para todo  $p \in S^n$ . Podemos por lo tanto dividirlo por su norma, así que suponemos sin pérdida de generalidad que  $\|X(p)\| = 1$  para todo  $p \in S^n$ .

Definamos una homotopía entre la antípoda de  $S^n$  e  $\text{id}_{S^n}$ , llegando a una contradicción con el ejemplo 7.0.37.2.

Definimos  $F : S^n \times [0, \pi] \rightarrow S^n$  como  $F(p, t) = (\cos t)p + (\sin t)X(p)$ . Está definida, pues

$$\langle F(p, t), F(p, t) \rangle = \cos^2(t) \overbrace{\|p\|^2}^{=1} + 2 \sin t \cos t \overbrace{\langle p, X(p) \rangle}^{=0} + \sin^2(t) \overbrace{\|X(p)\|^2}^{=1} = 1$$

Además  $F(p, 0) = p$  y  $F(p, \pi) = -p$ , por lo tanto  $F$  es la homotopía buscada.

Veamos ahora que  $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$  admite un campo de vectores sin singularidades.

Definimos  $X : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  como

$$X(x_1, \dots, x_{2n}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2n}, -x_{2n-1})$$

Claramente  $X$  es diferenciable y  $\langle p, X(p) \rangle = 0$  para todo  $p \in S^{2n-1}$ , por lo tanto  $X \in \mathcal{X}(S^{2n-1})$ . Además  $\|X(p)\| = \|p\| = 1$  para todo  $p \in S^{2n-1}$ , luego  $X$  es un campo de vectores en  $S^{2n-1}$  sin singularidades.  $\square$

La demostración de la primera parte del teorema anterior se resume así: si existiera un campo  $X$  sin singularidades en  $S^{2n}$ , entonces podríamos definir una homotopía entre la identidad y la antípoda, desplazando cada punto  $p$  hacia  $-p$  en la dirección del semicírculo máximo determinado por  $X(p)$ .

## 8.2. En coordenadas

**Definición 8.2.1.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una  $n$ -variedad,  $p \in M$ ,  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización alrededor de  $p$ . Sea  $\{e_i\}_i \subset \mathbb{R}^n$  la base canónica. Definimos  $E_i : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$  como  $E_i(\varphi(q)) = d\varphi_q(e_i)$ .

Decimos que  $\{E_i\}_i$  es el *referencial local asociado a la parametrización*  $\varphi$ . Observar que  $\{E_i(p)\}_i$  es una base de  $T_p M$  para todo  $p \in \varphi(U)$ .

**Proposición 8.2.2.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad,  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$  una parametrización y  $\{E_i\}_i$  su referencial local asociado. Entonces

$$E_i = \sum_k \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1} \right)$$

para todo  $i$ . En particular,  $E_i \in \mathcal{X}(\varphi(U))$  para todo  $i$ .

*Demostración.* Sea  $\hat{p} \in U$  y  $p := \varphi(\hat{p})$ . Entonces

$$E_i(p) = d\varphi_{\hat{p}}(e_i) = \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\hat{p}) \right)_{k,j} e_i = \sum_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\hat{p}) \quad \square$$

Obtenemos ahora una manera local de verificar que un campo de vectores es diferenciable:

**Corolario 8.2.3.** Sea  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función tal que  $X(p) \in T_p M$  para todo  $p \in M$ . Entonces  $X \in \mathcal{X}(M)$  si y sólo si existe un atlas  $\{\varphi : U \rightarrow M\}$  tal que si  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i E_i$  para ciertas funciones  $\varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $a_i \in C^\infty(\varphi(U))$ .

### 8.3. Pushforward

**Definición 8.3.1.** Sean  $M \subset \mathbb{R}^k$  y  $N \subset \mathbb{R}^p$  variedades, y sea  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Si  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es tal que  $X(p) \in T_p M$  para todo  $p \in M$ , definimos una función  $f_*(X) : N \rightarrow \mathbb{R}^p$  tal que  $f_*(X)(q) \in T_q N$ , llamada el *pushforward* de  $X$  por  $f$ , de la siguiente manera:

$$f_*(X)(q) = df_{f^{-1}(q)}(X(f^{-1}(q)))$$

Es decir, si  $q = f(p)$  entonces  $f_*(X)(q) = df_p(X(p))$ .

*Observación 8.3.2.* Si  $f$  no es un difeomorfismo entonces el pushforward no puede definirse, en general.

**Proposición 8.3.3.** Sea  $\mathcal{X}_0(M)$  el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de las funciones  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tales que  $X(p) \in T_p M$  para todo  $p \in M$ , de manera que  $f_* : \mathcal{X}_0(M) \rightarrow \mathcal{X}_0(N)$ . El pushforward satisface las siguientes propiedades:

1.  $(\text{id}_M)_* = \text{id}_{\mathcal{X}_0(M)}$ ,
2. Si  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  son difeomorfismos entre variedades, entonces  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ .
3. Si  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo entre variedades, entonces  $f_* : \mathcal{X}_0(M) \rightarrow \mathcal{X}_0(N)$  es un isomorfismo de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales, y  $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$ .

*Demostración.* Ejercicio para el lector. □

Queremos ver que si  $X \in \mathcal{X}(M)$  entonces  $f_*(X) \in \mathcal{X}(N)$ . Para ello, encontremos primero la expresión de  $f_*(X)$  en coordenadas locales.

**Proposición 8.3.4.** Sean  $M \subset \mathbb{R}^k$  y  $N$  variedades y sea  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Sea  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función tal que  $X(p) \in T_p M$  para todo  $p \in M$ . Sean  $\varphi : U \rightarrow M$  y  $\psi : V \rightarrow N$  parametrizaciones. Sea  $\hat{f}$  la expresión en coordenadas locales de  $f$ , i.e.  $f : U \rightarrow V$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{\hat{f}} & V \end{array}$$

Sean  $\{E_i\}_i$  y  $\{F_j\}_j$  los referenciales locales asociados a  $\varphi$  y a  $\psi$  respectivamente. Escribimos  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i E_i$  con  $a_i : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones. Entonces si  $f(\varphi(U)) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ , se tiene

$$f_*(X|_{\varphi(U)})|_{\psi(V)} = \sum_{i,j} (a_i \circ f^{-1}) \left( \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial x_i} \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1} \right) F_j \quad (8.1)$$



### 8.3 Pushforward

En otras palabras, si  $p \in \varphi(U)$  y  $q := f(p) \in \psi(V)$ ,  $\hat{p} := \varphi^{-1}(p)$  entonces

$$f_*(X)(q) = \sum_{i,j} a_i(p) \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial x_i}(\hat{p}) F_j(q)$$

*Demostración.* Calculemos:

$$f_*(X)(q) = df_p(X(p)) = df_p \left( \sum_i a_i(p) E_i(p) \right) = \sum_i a_i(p) df_p(E_i(p))$$

Tenemos entonces que calcular  $df_p(E_i(p))$ . Si  $\hat{q} := \psi^{-1}(q)$ , entonces

$$\begin{aligned} df_p(E_i(p)) &= df_p(d\varphi_{\hat{p}}(e_i)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d(f \circ \varphi)_{\hat{p}}(e_i) \\ &= d(\psi \circ \hat{f})_{\hat{p}}(e_i) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d\psi_{\hat{q}}(d\hat{f}_{\hat{p}}(e_i)) \\ &= \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial x_j}(\hat{q}) \right)_{s,j} \left( \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_r}(\hat{p}) \right)_{k,r} e_i \\ &= \left( \sum_k \frac{\partial \psi_s}{\partial x_k}(\hat{q}) \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_j}(\hat{p}) \right)_{s,j} e_i \\ &= \sum_{s,k} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_k}(\hat{q}) \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_i}(\hat{p}) e_s \\ &= \sum_k \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_i}(\hat{p}) \sum_s \frac{\partial \psi_s}{\partial x_k}(\hat{q}) e_s \\ &= \sum_k \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_i}(\hat{p}) d\psi_{\hat{q}}(e_k) \\ &= \sum_k \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_i}(\hat{p}) F_k(q) \end{aligned}$$

Esto termina la demostración. □

*Observación 8.3.5.* Cuando calculamos  $df_p(E_i(p))$  obtuvimos que la matriz asociada de  $df_p$  en las bases  $\{E_i\}_i$  y  $\{F_j\}_j$  es la matriz jacobiana de  $\hat{f}$ , como era esperable.

*Observación 8.3.6.* Sea  $M$  una  $n$ -variedad y  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que  $X(p) \in T_p M$  para todo  $p \in M$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización. Escribimos  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i E_i$  con  $a_i : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ . Hagamos un abuso de notación y consideremos  $e_i \in \mathcal{X}(U)$  definido como  $e_i(q) = e_i$  para todo  $q \in U$ , donde a la derecha  $e_i \in \mathbb{R}^n$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)}) = \sum_i (a_i \circ \varphi) e_i$$

En efecto, esto se deduce de la proposición 8.3.4 tomando como  $f$  a  $\varphi^{-1}$ , o simplemente aplicando  $\varphi_*$  a la expresión de la derecha.

**Corolario 8.3.7.** *Si  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo entre variedades y  $X \in \mathcal{X}(M)$ , entonces  $f_*(X) \in \mathcal{X}(N)$ .*

*Demostración.* La expresión (8.1) da una expresión local para el pushforward que prueba que es diferenciable, en virtud del corolario 8.2.3.  $\square$

Por una demostración libre de coordenadas del corolario anterior, ver [Lee1b], p.183, donde se utiliza que el diferencial total  $df : TM \rightarrow TN$  es diferenciable.

*Observación 8.3.8.* Tenemos entonces definido un mapa  $f_* : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N)$ . La proposición 8.3.3 se adapta a este mapa. De esta forma, el pushforward define un functor  $\mathcal{X} : \text{Difeo} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}}$ , donde Difeo es la categoría cuyos objetos son variedades diferenciables y cuyas flechas son los difeomorfismos.

Para verificar que un campo es diferenciable, basta ver que lo es su expresión en el espacio euclídeo.

**Corolario 8.3.9.** *Sea  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función tal que  $X(p) \in T_p M$  para todo  $p \in M$ . Entonces  $X \in \mathcal{X}(M)$  si y sólo si existe un atlas  $\{\varphi : U \rightarrow M\}$  tal que  $\varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)}) \in \mathcal{X}(U)$  para toda  $\varphi$ .*

*Demostración.* Si  $\varphi : U \rightarrow M$  es una parametrización, denotemos por  $\{E_i\}_i$  al referencial asociado y escribamos  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i E_i$  con  $a_i : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{X}(M) &\stackrel{8.2.3}{\iff} \text{ existe un atlas } \{\varphi : U \rightarrow M\} \text{ tal que } a_i \in C^\infty(M) \text{ para todo } i \\ &\iff \text{ existe un atlas } \{\varphi : U \rightarrow M\} \text{ tal que } a_i \circ \varphi \in C^\infty(U) \text{ para todo } i \\ &\stackrel{8.3.6}{\iff} \text{ existe un atlas } \{\varphi : U \rightarrow M\} \text{ tal que } \varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)}) \in \mathcal{X}(U) \text{ para toda } \varphi \\ &\stackrel{8.2.3}{\iff} \end{aligned}$$

$\square$

## 8.4. Índice de una singularidad de un campo de vectores

Sea  $X$  un campo en una variedad  $M$ . Si  $p \in M$  es tal que  $X(p) \neq 0$ , entonces se puede demostrar que existen  $U, U' \subset M$  abiertos,  $p \in U$  y  $h : U \rightarrow U'$  un difeomorfismo de tal forma que  $h$  lleva las curvas integrales de  $X|_U$  en curvas integrales de un campo constante en  $U'$ . Es decir, en un punto donde el campo no se anula, la dinámica es localmente trivial (ver figura 8.1; ver [Lee1b], teorema 9.22 para un enunciado preciso y su demostración).

Nos interesa entonces el comportamiento del campo en sus singularidades (aisladas): es allí donde está la información interesante del campo. Gran evidencia de este hecho es el teorema de Poincaré-Hopf, que demostraremos en este capítulo.

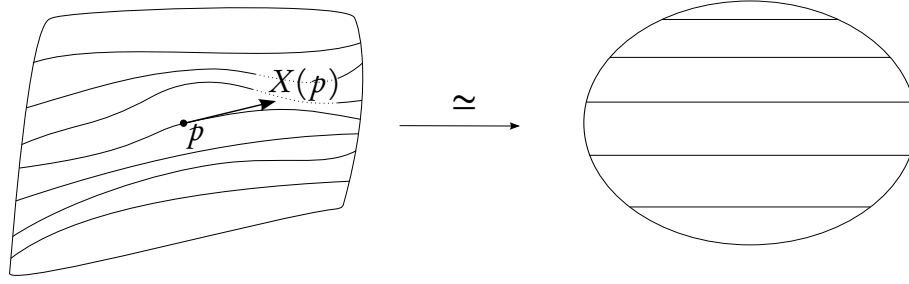


Figura 8.1: La dinámica en un punto que no es una singularidad es localmente trivial

Definamos pues el índice de una singularidad aislada de un campo de vectores en una variedad. Para ello, lo definiremos primero para un campo en  $\mathbb{R}^n$ .

### 8.4.1. En $\mathbb{R}^n$

**Definición 8.4.1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de vectores. Sea  $z \in U$  una singularidad aislada de  $X$ , es decir, existe  $\epsilon > 0$  tal que en  $B(z, \epsilon)$  la única singularidad de  $X$  es  $z$ .

Definimos el *índice* de  $X$  en  $z$  como  $\text{ind}_z(X) = \text{deg } \hat{X}$ , donde

$$\hat{X} : \partial B(z, \epsilon) \rightarrow S^{n-1}, \quad \hat{X}(p) := \frac{X(p)}{\|X(p)\|}$$

Es decir,  $\text{ind}_z(X)$  cuantifica el cambio en la dirección de  $X$  en torno de  $z$ .

**Lema 8.4.2.** La definición anterior no depende del  $\epsilon$  utilizado.

*Demostración.* Sean  $0 < \epsilon_0 < \epsilon_1$  de manera que  $X$  no se anula en  $\overline{B(z, \epsilon_1)} \setminus \{z\}$ .

Sea  $M := \overline{B(z, \epsilon_1)} \setminus B(z, \epsilon_0)$ . Es una variedad con borde orientada y compacta. Observar que  $\partial M = \partial B(z, \epsilon_1) \cup (-\partial B(z, \epsilon_0))$  con la orientación borde.

Sea  $F : M \rightarrow S^{n-1}$ ,  $F(p) = \frac{X(p)}{\|X(p)\|}$ . Por el lema del borde y la observación 7.0.28, se tiene

$$0 = \text{deg}(F|_{\partial M}) = \text{deg}(F|_{\partial B(z, \epsilon_1)}) - \text{deg}(F|_{\partial B(z, \epsilon_0)})$$

terminando la demostración. □

*Ejemplo 8.4.3.* 1. Sea  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $X(p) := p$ , el campo identidad. El origen es una singularidad aislada, llamada *repulsor* (ver figura 8.2).

Se tiene que  $\hat{X} : \partial B(0, 1) \rightarrow S^{n-1}$  es  $\hat{X}(p) = p$ , luego  $\hat{X} = \text{id}_{S^{n-1}}$  y por lo tanto  $\text{ind}_0(X) = \text{deg id}_{S^{n-1}} = 1$ .

2. Sea  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $X(p) := -p$ . El origen es una singularidad aislada, llamada *atractor*.

Se tiene que  $\hat{X} : \partial B(0, 1) \rightarrow S^{n-1}$  es  $\hat{X}(p) = -p$ , luego  $\hat{X} = a$ , el mapa antípoda de  $S^{n-1}$ . Por lo tanto  $\text{ind}_0(X) = \text{deg } a = (-1)^n$ .

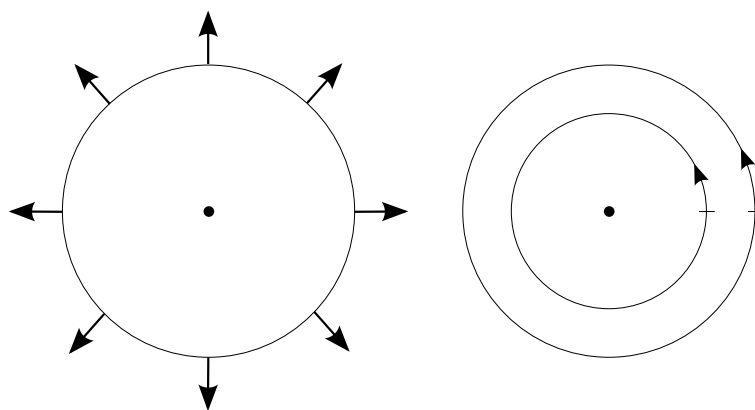


Figura 8.2: Repulsor en  $\mathbb{R}^2$

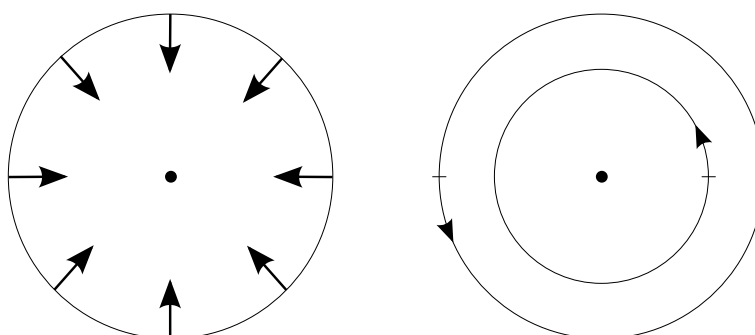


Figura 8.3: Atractor en  $\mathbb{R}^2$

3. Sea  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X(x, y) := (-y, x)$ . Este campo exhibe un fenómeno de *circulación* alrededor del origen (ver figura 8.4). El origen es una singularidad aislada. Su índice es 1.
4. Sea  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X(x, y) := (x, -y)$ . Identificando  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , es  $X(z) = \bar{z}$ . El origen es una singularidad aislada, llamada *punto de silla* (ver figura 8.5).  
Tomando  $B(0, 1)$ , se observa que  $\widehat{X} = a$ , luego  $\text{ind}_0(X) = -1$  por el ejemplo anterior.
5. Sea  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X(z) := z^2$ . Este campo exhibe un fenómeno de *dipolo* (ver figura 8.6). El origen es una singularidad aislada. Por el ejemplo 7.0.35.3, es  $\text{ind}_0(X) = 2$ .
6. Sea  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X(z) := \bar{z}^3$  (ver figura 8.7). El origen es una singularidad aislada. Por el ejemplo 7.0.35.3, es  $\text{ind}_0(X) = -3$ .
7. Utilizando el ejemplo 7.0.35.3, podemos conseguir todos los enteros distintos de cero como índices de una singularidad aislada de algún campo en  $\mathbb{R}^2$ . El campo de la figura 8.8 tiene una singularidad aislada en el origen con índice cero.

Verifiquemos que el índice de una singularidad de un campo de vectores se preserva por pushforwards.

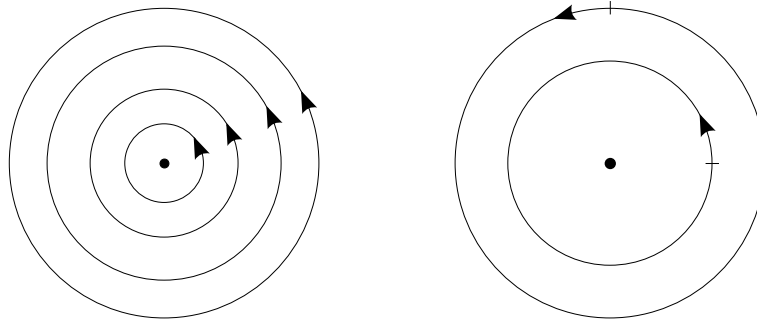


Figura 8.4: Circulación alrededor del origen. Se exhiben algunas curvas integrales.

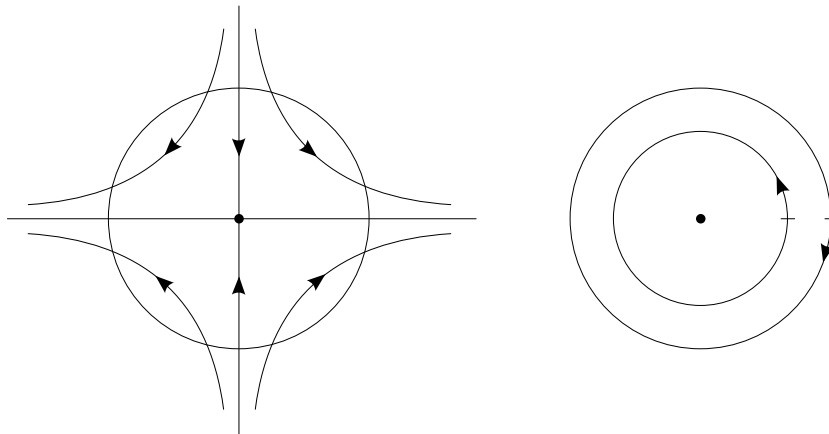


Figura 8.5: Punto de silla en  $\mathbb{R}^2$ . Se exhiben algunas curvas integrales.

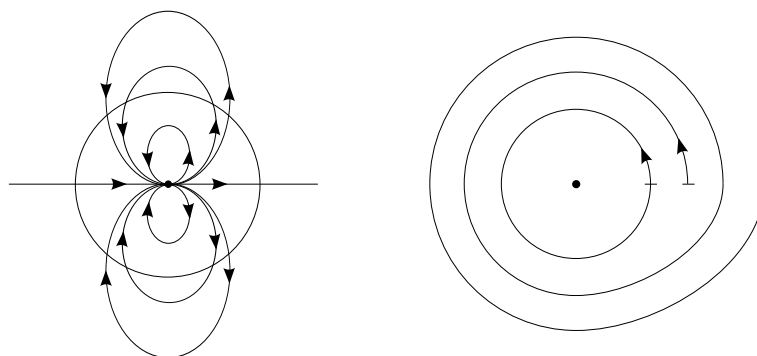


Figura 8.6: Dipolo

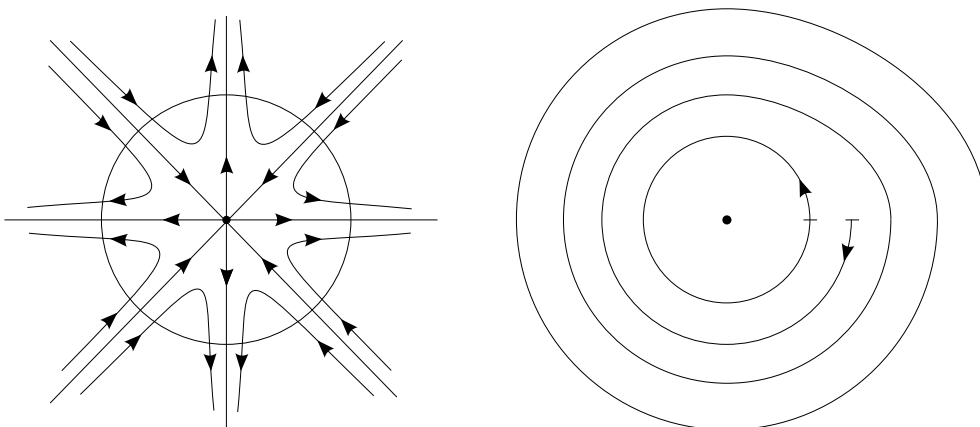


Figura 8.7: Una singularidad de índice  $-3$ , con algunas curvas integrales del campo

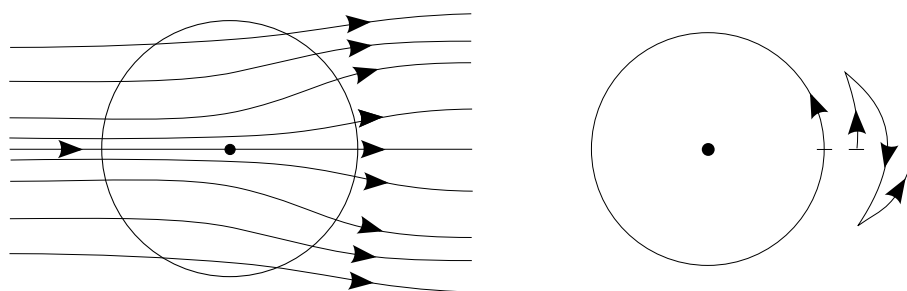


Figura 8.8: Una singularidad de índice  $0$ , con algunas curvas integrales del campo

**Lema 8.4.4.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y convexo, y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un encaje con  $f(0) = 0$ . Sea  $X \in \mathcal{X}(U)$  con una singularidad aislada en 0. Entonces  $\text{ind}_0(X) = \text{ind}_0(f_*(X))$ .<sup>1</sup>

*Demostración.* Supongamos primero que  $f$  preserva orientación.

Por la observación 5.2.11 que sigue al lema de isotopía, existe una isotopía  $f_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f_0 = \text{id}_U$ ,  $f_1 = f$  y  $f_t(0) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Consideremos los campos  $Y_t := (f_t)_*(X) \in \mathcal{X}(f_t(U))$ .

*Afirmación:* existe  $r > 0$  tal que  $f_t$  está definido en  $\overline{B(0, r)}$  e  $Y_t$  no tiene singularidades en  $\partial B(0, r)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ .

*Demostración:* Sea  $r_0 > 0$  tal que  $X$  no tiene singularidades en  $\overline{B(0, r_0)} \setminus \{0\}$ . Entonces  $Y_t$  no tiene singularidades en  $f_t(\overline{B(0, r_0)}) \setminus \{0\}$ , pues al ser  $f_t$  un difeomorfismo es  $d(f_t)_p$  un isomorfismo para todo  $p$ .

Debemos ver que existe  $r > 0$  tal que  $\overline{B(0, r)} \subset f_t(\overline{B(0, r_0)})$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Supongamos que esto es falso. Existen entonces  $p_n \in \partial B(0, r_0)$ ,  $t_n \in [0, 1]$  tales que  $\lim_n f_{t_n}(p_n) = 0$ . Por compacidad de  $\partial B(0, r_0)$  y de  $[0, 1]$ , existen subsucesiones convergentes  $p_{n_k} \rightarrow p_0 \in \partial B(0, r_0)$ ,  $t_{n_k} \rightarrow t_0 \in [0, 1]$ . Por lo tanto  $f_{t_0}(p_0) = 0$  con  $p_0 \in \partial B(0, r_0)$ , lo cual contradice que  $f_{t_0}$  sea un difeomorfismo ya que  $f_{t_0}(0) = 0$  y  $p_0 \neq 0$ . ■

Definimos entonces  $F : \partial B(0, r) \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$  como  $F(p, t) = \frac{Y_t(p)}{\|Y_t(p)\|}$ . De esta forma,

$$F(p, 0) = \frac{X(p)}{\|X(p)\|} = \widehat{X}(p) \quad \text{y} \quad F(p, 1) = \frac{f_*(X)(p)}{\|f_*(X)(p)\|} = \widehat{f_*(X)}(p)$$

y por lo tanto  $F$  es una homotopía entre  $\widehat{X}$  y  $\widehat{f_*(X)}$ . Como el grado es invariante por homotopías, entonces  $\deg \widehat{X} = \deg \widehat{f_*(X)}$  y por lo tanto  $\text{ind}_0(X) = \text{ind}_0(f_*(X))$ .

Supongamos ahora que  $f$  revierte orientación. Sea  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una reflexión, de manera que  $r \circ r = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ . Entonces  $f = (f \circ r) \circ r$ : es composición de un difeomorfismo que preserva orientación y una reflexión. Por la parte anterior y las propiedades del pushforward, basta ver que  $\text{ind}_0(r_*(X)) = \text{ind}_0(X)$ .

Observar que  $r$  es una isometría lineal. Supongamos que  $r(p) = q$ . Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{r_*(X)}(q) &= \frac{r_*(X)(q)}{\|r_*(X)(q)\|} = \frac{dr_p(X(p))}{\|dr_p(X(p))\|} = \frac{r(X(p))}{\|r(X(p))\|} \\ &= \frac{r(X(p))}{\|X(p)\|} = r \left( \frac{X(p)}{\|X(p)\|} \right) = r(\widehat{X}(p)) \\ &= r \circ \widehat{X} \circ r^{-1}(q) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Observar que  $f_*(X)$  tiene sentido, pues por la observación 3.0.10 es  $f(U)$  abierto y  $f : U \rightarrow f(U)$  es un difeomorfismo.

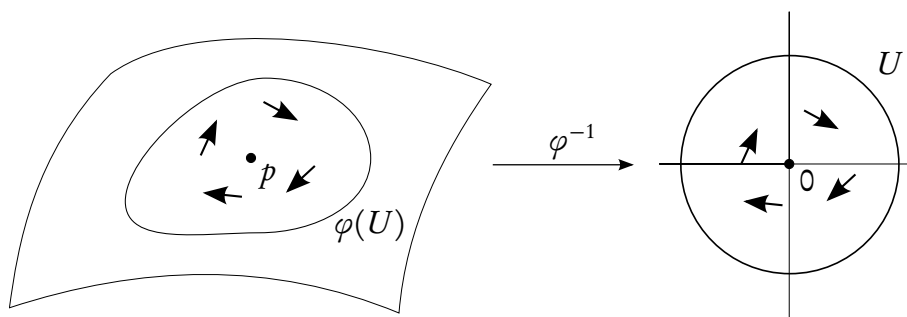


Figura 8.9

Por lo tanto  $\widehat{r_*(X)} = r \circ \widehat{X} \circ r^{-1} = r \circ \widehat{X} \circ r$ , y entonces por el ejercicio 6.0.21:

$$\text{ind}_0(r_*(X)) = \text{deg}(\widehat{r_*(X)}) = \text{deg}(r \circ \widehat{X} \circ r) = (-1) \cdot \text{deg}(\widehat{X}) \cdot (-1) = \text{ind}_0(X)$$

terminando la demostración. □

### 8.4.2. En variedades

**Definición 8.4.5.** Sea  $M$  una variedad,  $X \in \mathcal{X}(M)$  y  $p \in M$  una singularidad aislada de  $X$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización tal que  $\varphi(0) = p$ . Definimos el *índice* de  $X$  en  $p$  (ver figura 8.9) como

$$\text{ind}_p(X) = \text{ind}_0 \varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)})$$

Para verificar que este concepto está bien definido, precisamos del siguiente

**Lema 8.4.6.** *La definición anterior no depende de la parametrización utilizada.*

*Demostración.* Sean  $\varphi : U \rightarrow M$ ,  $\psi : V \rightarrow M$  parametrizaciones tales que  $\varphi(0) = p = \psi(0)$ . Podemos suponer que  $\varphi(U) = \psi(V)$ . Como  $\mathbb{R}^n$  es localmente convexo, podemos además suponer que  $U$  es convexo.

Sea  $f : U \rightarrow V$ ,  $f := \psi^{-1} \circ \varphi$ . Observar que  $f(0) = 0$ .

$$\begin{array}{ccc} & \varphi(U) = \psi(V) & \\ \varphi \nearrow & & \nwarrow \psi \\ U & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

Sean  $Y := \varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)})$  y  $Z := \psi_*^{-1}(X|_{\psi(V)})$ . Queremos probar que  $\text{ind}_0(Y) = \text{ind}_0(Z)$ . Observar que  $f_*(Y) = Z$ . En efecto,

$$f_*(Y) = f_* \varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)}) = (f \circ \varphi^{-1})_*(X|_{\varphi(U)}) = \psi_*^{-1}(X|_{\psi(V)}) = Z$$

La demostración se termina entonces aplicando el lema 8.4.4. □



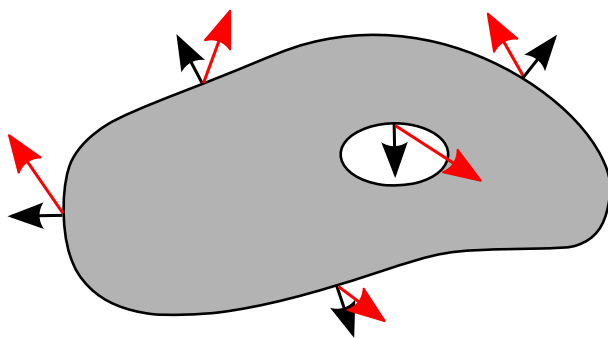


Figura 8.10: En negro, el mapa de Gauss; en rojo, un campo saliente

## 8.5. Teorema de Poincaré-Hopf

### 8.5.1. Poincaré-Hopf para $n$ -variedades en $\mathbb{R}^n$

**Definición 8.5.1.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una  $n$ -variedad con borde orientada. Dotando a  $\partial M$  de la orientación borde, existe un único campo normal saliente y unitario  $g : \partial M \rightarrow S^{n-1}$ : le llamamos *mapa de Gauss* de  $M$  (o de  $\partial M$ ).

Explícitamente,  $g \in \mathcal{X}(\partial M)$  es el único campo que satisface  $g(p) \in (T_p \partial M)^\perp$  saliente,  $\|g(p)\| = 1$ , para todo  $p \in \partial M$ .

Un campo  $X \in \mathcal{X}(M)$  se dice *saliente* si  $\langle X(p), g(p) \rangle > 0$  para todo  $p \in \partial M$ , i.e. si  $X(p)$  y  $g(p)$  forman un ángulo en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  para todo  $p \in \partial M$  (ver figura ??).

Probaremos primero el teorema de Poincaré-Hopf en el contexto de la definición anterior.

*Observación 8.5.2.* Si  $M$  es compacta, entonces un campo en  $M$  tiene sólo singularidades aisladas si y sólo si tiene finitas singularidades.

**Lema 8.5.3.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una  $n$ -variedad compacta con borde orientada, y sea  $X \in \mathcal{X}(M)$  un con finitas singularidades, sin singularidades en  $\partial M$ . Entonces

$$\sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X) = \text{deg } \widehat{X}$$

donde  $\widehat{X} : \partial M \rightarrow S^{n-1}$  está definido como  $\widehat{X}(p) = \frac{X(p)}{\|X(p)\|}$ .

*Demostración.* Sean  $p_1, \dots, p_k \in \overset{\circ}{M}$  las singularidades de  $X$ . Como son aisladas, existen  $B_i \subset \overset{\circ}{M}$  bolas de centro  $p_i$  dos a dos disjuntas. Sea  $N = M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_i$ ; es una  $n$ -variedad compacta con borde donde  $X$  no tiene singularidades (ver figura 8.11). Dotamos a  $N$  de la misma orientación que  $M$ .

Sea  $F : N \rightarrow S^{n-1}$  definida como  $F(p) = \frac{X(p)}{\|X(p)\|}$ . Por definición,  $\text{deg } F|_{\partial B_i} = \text{ind}_{p_i}(X)$  para todo  $i$  y  $F|_{\partial M} = \widehat{X}$ .

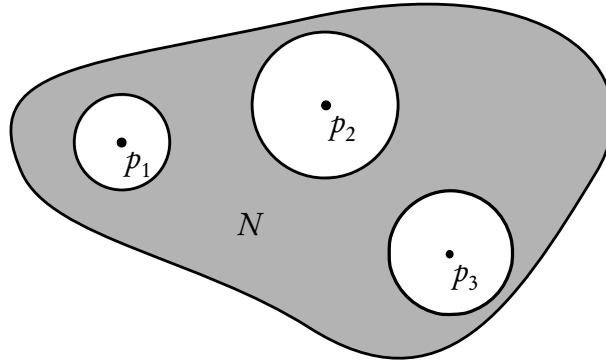


Figura 8.11

Observar que  $\partial N = \partial M \cup \bigcup_{i=1}^k (-\partial B_i)$  pues la orientación de  $\partial B_i$  como borde de  $N$  es la opuesta a la que le induce  $M$ . Por el lema del borde, tenemos que  $\deg F|_{\partial N} = 0$ , y en virtud de la observación 7.0.28,

$$0 = \deg F|_{\partial M} - \sum_{i=1}^k \deg F|_{\partial B_i} \implies \deg \widehat{X} = \sum_{i=1}^k \text{ind}_{p_i}(X)$$

terminando la demostración. □

Ahora ya podemos probar un caso particular del teorema de Poincaré-Hopf, que nos servirá en la demostración del caso general.

**Proposición 8.5.4.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una  $n$ -variedad compacta con borde orientada, y sea  $X$  un campo saliente en  $M$  con finitas singularidades. Entonces*

$$\sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X) = \deg g$$

donde  $g$  es el mapa de Gauss de  $\partial M$ .

*Demostración.* Utilizando la nomenclatura del lema 8.5.3, sólo nos falta probar que  $\deg \widehat{X} = \deg g$ . Para ello, veamos que  $\widehat{X}$  y  $g$  son mapas homotópicos.

Sea  $G : \partial M \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$  definida como  $G(p, t) = \frac{tg(p) + (1-t)\widehat{X}(p)}{\|tg(p) + (1-t)\widehat{X}(p)\|}$ .

Está bien definida, i.e.  $tg(p) + (1-t)\widehat{X}(p) \neq 0$  para todo  $(p, t)$ : en efecto, para  $t = 0$  y  $t = 1$  es claro, y para  $t \neq 0, 1$  si fuera  $tg(p) + (1-t)\widehat{X}(p) = 0$ , entonces  $\widehat{X}(p) = \frac{-t}{1-t} g(p)$  lo cual contradice que  $X$  sea saliente.

Por lo tanto  $G$  es una homotopía entre  $G_0 = \widehat{X}$  y  $G_1 = g$ , lo cual termina la demostración. □

### 8.5.2. Singularidades no degeneradas

Para demostrar el teorema de Poincaré-Hopf estudiaremos primero el caso en que las singularidades del campo son no degeneradas. Definimos primero este concepto en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , y luego en variedades.

**Definición 8.5.5.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto, y  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de vectores. Sea  $p \in U$  una singularidad de  $X$ . Decimos que  $p$  es una *singularidad no degenerada* de  $X$  si  $dX_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo lineal, i.e. si  $X$  es un difeomorfismo local en  $p$ .

*Ejemplo 8.5.6.* (cf. ejemplo 8.4.3)

1. Sea  $X(x, y) = (x, y)$  el repulsor. Entonces  $dX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y por lo tanto 0 es una singularidad no degenerada de índice 1.
2. Sea  $X(x, y) = (-x, -y)$  el atractor. Entonces  $dX_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  y por lo tanto 0 es una singularidad no degenerada de índice 1.
3. Sea  $X(x, y) = (x, -y)$  el punto de silla. Entonces  $dX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  y por lo tanto 0 es una singularidad no degenerada de índice  $-1$ .
4. Sea  $X(x, y) = (-2y, 2x)$  una homotecia de la circulación. Entonces  $dX_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  y por lo tanto 0 es una singularidad no degenerada de índice 1.

El lector habrá observado que todas las singularidades no degeneradas de este ejemplo tienen índice  $\pm 1$ , que es además el signo de la transformación lineal  $dX_0$ . Probaremos que esto vale en general en la proposición 8.5.10.

Ahora extendemos la definición de singularidad no degenerada a variedades.

**Lema 8.5.7.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una  $n$ -variedad,  $X \in \mathcal{X}(M)$  y  $p \in M$  una singularidad de  $X$ . Entonces  $dX_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^k$  cumple  $dX_p(T_p M) \subset T_p M$ , y si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización con  $\varphi(0) = p$ , entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 T_p M & \xrightarrow{dX_p} & T_p M \\
 d\varphi_0 \uparrow & & \uparrow d\varphi_0 \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d(\varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U))}_0)} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

## 8.5 Teorema de Poincaré-Hopf

*Demostración.* Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización con  $\varphi(0) = p$  y  $\{E_i\}_i$  su referencial local asociado. Escribimos

$$X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i E_i$$

donde  $a_i \in C^\infty(\varphi(U))$ .

Observar que  $a_i(p) = 0$  para todo  $i$ , pues  $0 = X(p) = \sum_i a_i(p) E_i(p)$ , pero como  $\{E_i(p)\}_i$  es base de  $T_p M$ , entonces  $a_i(p) = 0$  para todo  $i$ .

Sea  $V \in T_p M$ ,  $V = d\varphi_0(v)$  con  $v \in T_0 U = \mathbb{R}^n$ . Entonces  $v = \dot{\alpha}(0)$  para cierta  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  con  $\alpha(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} dX_p(V) &= dX_p(d\varphi_0(v)) \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} d(X \circ \varphi)_0(v) \\ &= d(X \circ \varphi)_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)) \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X \circ \varphi \circ \alpha)(t) \\ &= \sum_i \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (a_i \circ \varphi \circ \alpha)(t) E_i(p) + \sum_i \overbrace{a_i(p)}{=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (E_i \circ \varphi \circ \alpha)(t) \\ &= \sum_i \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (a_i \circ \varphi \circ \alpha)(t) E_i(p) \end{aligned}$$

Como  $\{E_i(p)\}_i$  es base de  $T_p M$ , esto prueba que  $dX_p(V) \in T_p M$ .

Probemos ahora que el diagrama conmuta. Dado  $v \in \mathbb{R}^n$ , lo escribimos como antes:  $v = \dot{\alpha}(0)$  para cierta  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  con  $\alpha(0) = 0$ . Siguiendo la cuenta donde la dejamos,

$$\begin{aligned} dX_p(d\varphi_0(v)) &= \sum_i \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (a_i \circ \varphi \circ \alpha)(t) E_i(p) \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \sum_i d(a_i \circ \varphi)_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)) E_i(p) \\ &= \sum_i d(a_i \circ \varphi)_0(v) d\varphi_0(e_i) \\ &= d\varphi_0 \left( \sum_i d(a_i \circ \varphi)_0(v) e_i \right) \end{aligned}$$

Para terminar de probar que el diagrama conmuta, basta ver que

$$\sum_i d(a_i \circ \varphi)_0(v) e_i = d(\varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)}))_0(v)$$

Pero esto es cierto, pues por la observación 8.3.6 se tiene que

$$\varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)}) = \sum_i (a_i \circ \varphi) e_i \quad \square$$

**Definición 8.5.8.** Sea  $M$  una variedad,  $X \in \mathcal{X}(M)$  y  $p \in M$  una singularidad de  $X$ . Decimos que  $p$  es una *singularidad no degenerada* si  $dX_p : T_p M \rightarrow T_p M$  es un isomorfismo lineal.

*Observación 8.5.9.* Por el teorema de la función inversa, un campo es un difeomorfismo local en una singularidad no degenerada, por lo tanto las singularidades no degeneradas son aisladas.

**Proposición 8.5.10.** Sea  $M$  una variedad y  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Si  $p \in M$  es una singularidad no degenerada de  $X$ , entonces  $\text{ind}_p(X) = \text{sg}(dX_p)$ ; en particular,  $\text{ind}_p(X) = \pm 1$ .

*Demostración.* Basta probarlo para el caso de un campo en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  con la singularidad no degenerada en 0.

En efecto: sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización tal que  $\varphi(0) = p$ . Entonces por definición,  $\text{ind}_p(X) = \text{ind}_0(\varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)}))$ . Por el lema 8.5.7, como  $d\varphi_0$  es un isomorfismo entonces  $dX_p$  es un isomorfismo si y sólo si  $d(\varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)}))$  lo es. Es decir,  $p$  es una singularidad no degenerada de  $M$  si y sólo si 0 es una singularidad no degenerada de  $\varphi_*^{-1}(X|_{\varphi(U)})$ . Esto prueba la afirmación.

Suponemos entonces que  $X \in \mathcal{X}(U)$  donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, y  $0 \in U$  es una singularidad no degenerada de  $X$ .

Por el teorema de la función inversa, existe  $U_0 \subset U$  un entorno abierto y convexo de 0 tal que  $X(U_0)$  es abierto y  $X|_{U_0} : U_0 \rightarrow X(U_0)$  es un difeomorfismo.

Supongamos primero que  $X|_{U_0}$  preserva orientación, de manera que  $\text{sg}(dX_0) = 1$ . Por la observación 5.2.11 que sigue al lema de isotopía, existe una isotopía  $X_t : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $X_t(0) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $X_0 = X|_{U_0}$  y  $X_1 = \text{id}_{U_0}$ .

Sea  $a > 0$  tal que  $\overline{B(0, a)} \subset U_0$ . Como  $X_t$  es difeomorfismo para todo  $t$  y  $X_t(0) = 0$ , entonces  $X_t$  no tiene singularidades en  $\partial B(0, a)$  para todo  $t$ . Definimos

$$F : \partial B(0, a) \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}, \quad F(p, t) := \frac{X_t(p)}{\|X_t(p)\|}$$

Entonces  $F$  es una homotopía entre  $F_0 = \widehat{X}$  y  $F_1 = \frac{\text{id}_{\partial B(0, a)}}{a}$  que tiene grado 1, luego  $1 = \text{deg } \widehat{X} = \text{ind}_0(X)$ , y esto termina la demostración en este caso.

Supongamos ahora que  $X|_{U_0}$  revierte orientación, de manera que  $\text{sg}(dX_0) = -1$ . Podemos achicar  $U_0$  para que  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \Rightarrow (-x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_0$ . La misma demostración de recién, *mutatis mutandis*, prueba que  $\widehat{X}$  es homotópico a  $\frac{r}{a}$  como en la observación 5.2.11. Como  $\text{deg } \frac{r}{a} = -1$ , esto termina la demostración.  $\square$

*Ejemplo 8.5.11.* ■ Toda singularidad no degenerada tiene índice  $\pm 1$ , pero el recíproco es falso: hay singularidades con índice  $\pm 1$  que son degeneradas.

En efecto, sea  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido como  $X(x, y) = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2))$ . Entonces 0 es una singularidad aislada de  $X$ , y en cualquier circunferencia en torno de  $X$  se tiene que  $X$  es la identidad, luego  $\text{ind}_0(X) = 1$ . Sin embargo,

$$dX_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 + 3y^2 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego 0 es una singularidad degenerada de  $X$ .

- Por el lema anterior, las singularidades de los ejemplos de 8.4.3 que tienen índice  $\neq \pm 1$  deben ser degeneradas.

Veamos ahora que podemos “explotar” una singularidad degenerada en un número finito de singularidades no degeneradas, sin alterar el índice total.

**Teorema 8.5.12.** Sean  $M$  una  $n$ -variedad compacta y  $X \in \mathcal{X}(M)$  un campo con finitas singularidades. Existe un campo  $Y \in \mathcal{X}(M)$  tal que todas sus singularidades son no degeneradas y  $\sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X) = \sum_{Y(q)=0} \text{ind}_q(Y)$ .

*Demostración.* Sea  $p \in M$  una singularidad de  $X$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización tal que  $\varphi(0) = p$  y tal que en  $\varphi(U)$  la única singularidad de  $X$  es  $p$ . Por definición,  $\text{ind}_p(X) = \text{ind}_0(\varphi_*^{-1}(X))$  con  $\varphi_*^{-1}(X) \in \mathcal{X}(U)$ . Escribamos  $X_0 := \varphi_*^{-1}(X)$ .

Sean  $B, B_0 \subset U$  bolas centradas en 0 tales que  $\overline{B_0} \subset B$ . Como  $\overline{B} \setminus B_0$  es compacto, existe  $r := \min_{q \in \overline{B} \setminus B_0} \|X_0(q)\|$ . Observar que como  $X$  no tiene singularidades en  $\varphi(U) \setminus \{p\}$  entonces  $X_0$  no tiene singularidades en  $U \setminus \{0\}$ . Por lo tanto  $r > 0$ .

Sea  $\rho : U \rightarrow [0, 1]$  una función chichón tal que  $\rho|_{\overline{B_0}} = 1$ ,  $\rho|_{U \setminus B} = 0$ . Por el teorema de Sard, existe  $v \in \mathbb{R}^n$  valor regular de  $X_0$  tal que  $\|v\| < \frac{r}{2}$ .

Definimos  $Y_0 \in \mathcal{X}(U)$  como  $Y_0 = X_0 - \rho v$ . Observar que  $Y_0$  coincide con  $X_0$  fuera de  $B$ . Además, las singularidades de  $Y_0$  deben estar en  $B_0$ . En efecto, si  $q \in U \setminus B$  entonces  $Y_0(q) = X_0(q) \neq 0$ , y si  $q \in B \setminus B_0$ , entonces

$$\|Y_0(q)\| = \|X_0(q) - \rho(q)v\| \geq \overbrace{\|X_0(q)\|}^{\geq r} - \overbrace{\rho(q)\|v\|}^{< r/2} \geq \frac{r}{2} > 0$$

Por lo tanto, como  $Y_0|_{B_0} = X_0 - v$ , entonces  $q$  es una singularidad de  $Y_0$  si y sólo si  $q \in B_0$  y  $X_0(q) = v$ .

Ahora bien, las singularidades de  $Y_0$  son no degeneradas. En efecto, si  $q \in U$  es una singularidad de  $Y_0$ , entonces  $q \in B_0$  y  $X_0(q) = v$ . Como  $Y_0|_{B_0} = X_0|_{B_0} - v$ , entonces  $d(Y_0)_q = d(X_0)_q$  que es sobreyectivo (y por lo tanto un isomorfismo) pues  $v$  es valor regular de  $X_0$ . Por lo tanto  $d(Y_0)_q$  es un isomorfismo, i.e.  $q$  es una singularidad no degenerada de  $Y_0$ .

## 8.5 Teorema de Poincaré-Hopf

Además,  $\sum_{Y_0(q)=0} \text{ind}_q(Y_0) = \text{ind}_0(X_0)$ . En efecto, si  $\widehat{X}_0 : \partial B \rightarrow S^{n-1}$  está definido como  $\widehat{X}_0(q) = \frac{X_0(q)}{\|X_0(q)\|} = \frac{Y_0(q)}{\|Y_0(q)\|}$ , entonces  $\text{ind}_0(X_0) = \text{deg } \widehat{X}_0 = \sum_{Y_0(q)=0} \text{ind}_q(Y_0)$  por el lema 8.5.3.

Observar que  $Y|_{U \setminus B} = X|_{U \setminus B}$ . De esta forma, si hacemos este procedimiento con todas las singularidades de  $X$  y hacemos el pushforward de todos los campos  $Y_0$  obtenidos, podemos pegarlos a un campo  $Y \in \mathcal{X}(M)$  que cumple lo deseado.  $\square$

### 8.5.3. Poincaré-Hopf en general

Ahora ya podemos demostrar el teorema de Poincaré-Hopf. Utilizaremos los resultados de la sección C.1.

**Teorema 8.5.13** (Poincaré-Hopf). *Sean  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad compacta y  $X \in \mathcal{X}(M)$  un campo con un número finito de singularidades. Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $N_\epsilon(M)$  satisface el teorema del entorno tubular (teorema B.2.2). Entonces*

$$\sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X) = \text{deg } g$$

donde  $g : \partial N_\epsilon(M) \rightarrow S^{k-1}$  es el mapa de Gauss de  $N_\epsilon(M)$ , considerando a  $N_\epsilon(M)$  con la orientación de  $\mathbb{R}^k$ .

*Demostración.* Por el teorema 8.5.12, podemos suponer que las singularidades de  $X$  son no degeneradas.

La idea es extender  $X$  a un campo  $Y \in \mathcal{X}(N_\epsilon(M))$  saliente que tenga las mismas singularidades que  $X$  y que tengan el mismo índice; aplicándole a  $Y$  la proposición 8.5.4 se concluirá el teorema.

Definimos  $Y : N_\epsilon(M) \rightarrow \mathbb{R}^k$  como  $Y(p+v) = X(p) + v$ , para todo  $p+v \in N_\epsilon(M)$  en la escritura del teorema del entorno tubular (que llamaremos *escritura estándar* en el resto de la prueba; ver figura 8.12). Observar que  $Y(x) = X(r(x)) + x - r(x)$  para todo  $x \in N_\epsilon(M)$ , luego  $Y$  es diferenciable. Claramente  $Y|_M = X$ .

Verifiquemos que  $Y$  es saliente a  $N_\epsilon(M)$ , i.e. que  $\langle Y(x), g(x) \rangle > 0$  para todo  $x \in \partial N_\epsilon(M)$ . Para ello debemos calcular  $g$ .

Sea  $\varphi : N_\epsilon(M) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\varphi(p+v) = \|v\|^2$  para todo  $p+v \in N_\epsilon(M)$  en escritura estándar. Observar que  $\partial N_\epsilon(M) = \varphi^{-1}(\epsilon^2)$ , luego  $T_x(\partial N_\epsilon(M)) = \{\nabla\varphi(x)\}^\perp$  para todo  $x \in \partial N_\epsilon(M)$  (proposición C.1.3). Además  $\nabla\varphi(x)$  es un vector saliente (proposición C.1.7).

Entonces  $g(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}$  para todo  $x \in \partial N_\epsilon(M)$ . Para calcular  $g$  debemos entonces calcular  $\nabla\varphi$ .

*Afirmación:*  $\nabla\varphi(p+v) = 2v$  para todo  $p+v \in N_\epsilon(M)$  en escritura estándar.

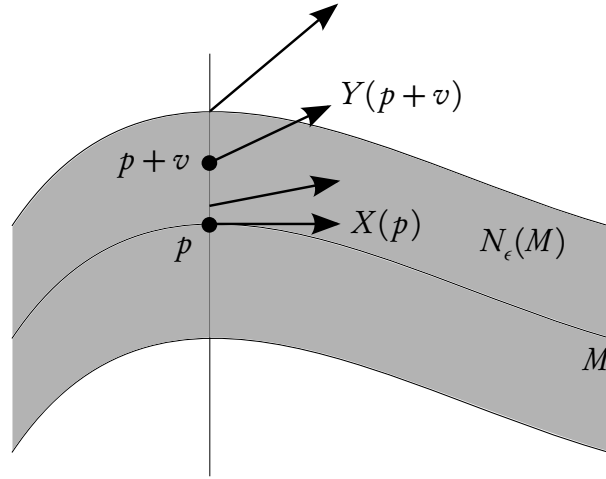


Figura 8.12: El campo  $Y$

*Demostración:* Sea  $x = p + v \in N_\epsilon(M)$  en escritura estándar. Para calcular  $\nabla\varphi(x)$  basta calcular  $d\varphi_x$ .

Sea  $V \in T_x(N_\epsilon(M))$ . Entonces  $V = \dot{\alpha}(0)$ , donde  $\alpha : I \rightarrow N_\epsilon(M)$  es una curva con  $\alpha(0) = x$ . Para todo  $t \in I$  podemos escribir  $\alpha(t) = p(t) + v(t)$  en escritura estándar. De esta forma,  $p + v = p(0) + v(0)$  y por lo tanto  $p = p(0), v = v(0)$ . Ahora,

$$\begin{aligned} d\varphi_x(V) &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(p(t) + v(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|v(t)\|^2 \\ &= 2\langle v(0), \dot{v}(0) \rangle \stackrel{*}{=} 2\langle v(0), \dot{p}(0) + \dot{v}(0) \rangle = 2\langle v(0), \dot{\alpha}(0) \rangle = \langle 2v, V \end{aligned}$$

donde en  $*$  usamos que  $\langle v(0), \dot{p}(0) \rangle = 0$  ya que  $v(0) \in T_{p(0)}M^\perp$  y  $\dot{p}(0) \in T_{p(0)}M$ .

Como  $\langle \nabla\varphi(p + v), V \rangle = d\varphi_{p+v}(V) = \langle 2v, V \rangle$  para todo  $V \in T_x(N_\epsilon(M))$ , esto prueba que  $\nabla\varphi(p + v) = 2v$ . ■

En conclusión,  $g(p + v) = \frac{v}{\epsilon}$  para todo  $p + v \in \partial N_\epsilon(M)$  en escritura estándar.

Ahora podemos verificar que  $Y$  es un campo saliente. Sea  $p + v \in \partial N_\epsilon(M)$  en escritura estándar. Entonces

$$\langle Y(p + v), g(p + v) \rangle = \left\langle X(p) + v, \frac{v}{\epsilon} \right\rangle = \frac{1}{\epsilon} \left( \underbrace{\langle X(p), v \rangle}_{=0} + \|v\|^2 \right) = \frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \epsilon > 0$$

Observar que las singularidades de  $Y$  son las de  $X$ : en efecto, si  $p + v \in N_\epsilon(M)$  está en escritura estándar, entonces como  $X(p) \in T_pM$  y  $v \in T_pM^\perp$ ,

$$Y(p + v) = 0 \iff X(p) + v = 0 \iff X(p) = 0 = v \iff p + v \in M \text{ y } X(p + v) = 0$$



Por la proposición 8.5.4,  $\sum_{Y(p)=0} \text{ind}_p(Y) = \text{deg } g$ . Como las singularidades de  $X$  y las de  $Y$  coinciden, basta probar que  $\text{ind}_p(Y) = \text{ind}_p(X)$  para toda singularidad de  $X$ . Sea  $p \in M$  una singularidad de  $X$ .

Como estamos asumiendo que las singularidades de  $X$  son no degeneradas, entonces por la proposición 8.5.10 se tiene que  $\text{ind}_p(X) = \text{sg}(dX_p)$ . Veamos entonces que  $\det(dX_p) = \det(dY_p)$ . Esto probará que  $\text{sg}(dX_p) = \text{sg}(dY_p)$  y que las singularidades de  $Y$  son no degeneradas, de manera que  $\text{ind}_p(Y) = \text{sg}(dY_p)$ . Se tendrá, pues, la igualdad  $\text{ind}_p(Y) = \text{ind}_p(X)$ , lo cual terminará la demostración.

Descomponemos  $\mathbb{R}^k = T_p M \oplus T_p M^\perp$  y calculamos  $dY_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  en cada sumando directo.

- Sea  $v \in T_p M^\perp$ . Sea  $\alpha : I \rightarrow N_\epsilon(M)$  definida como  $\alpha(t) = p + tv$ : está bien definida para  $I$  suficientemente chico de manera que  $\|tv\| \leq \epsilon$  para todo  $t \in I$ . Tenemos  $\alpha(0) = p, \dot{\alpha}(0) = v$ .

Ahora calculamos:

$$dY_p(v) \stackrel{\text{r.c.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(p + tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X(p) + tv) = v$$

de donde  $dY_p|_{T_p M^\perp} = \text{id}_{T_p M^\perp}$ .

- Sea  $u \in T_p M$ . Entonces  $u = \dot{\alpha}(0)$  para cierta curva  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$ . Ahora calculamos:

$$dY_p(u) \stackrel{\text{r.c.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(\alpha(t)) \stackrel{Y|_M=X}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\alpha(t)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} dX_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)) = dX_p(u)$$

y por lo tanto  $dY_p|_{T_p M} = dX_p$ .

En definitiva,  $dY_p = \begin{pmatrix} dX_p & 0 \\ 0 & \text{id}_{T_p M^\perp} \end{pmatrix}$  y por lo tanto  $\det dY_p = \det dX_p$ . Esto termina la demostración.  $\square$

## 8.6. Característica de Euler

Por el corolario C.2.11, en toda variedad compacta existe un campo de vectores con finitas singularidades. En virtud de este resultado y del teorema de Poincaré-Hopf podemos hacer la siguiente definición.

**Definición 8.6.1.** Sea  $M$  una variedad compacta y  $X \in \mathcal{X}(M)$  con finitas singularidades. Definimos la *característica de Euler* de  $M$  como  $\chi(M) = \sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X)$ .

*Observación 8.6.2.* En virtud del ejercicio recién mencionado y del teorema 8.5.12 se tiene entonces que toda variedad compacta admite un campo de vectores cuyas singularidades son no degeneradas.

*Observación 8.6.3.* La característica de Euler de una variedad compacta se define clásicamente de otra manera, utilizando triangulaciones. Se prueba que ambas definiciones coinciden. Ver [GP], capítulo 3, §7, u [OR], §7.4 para más detalles.

*Ejercicio 8.6.4.* Probar que si  $M$  y  $N$  son variedades difeomorfas, entonces  $\chi(M) = \chi(N)$ .

El ejercicio anterior nos dice que la característica de Euler es un invariante diferenciable. El teorema de Poincaré-Hopf muestra entonces la obstrucción topológica que una variedad compacta dada impone a los campos de vectores que admite: sus singularidades no pueden ser de cualquier tipo.

**Proposición 8.6.5.** Sean  $M, N$  variedades compactas. Entonces  $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$ .

*Demostración.* Sean  $X \in \mathcal{X}(M), Y \in \mathcal{X}(N)$  campos de vectores cuyas singularidades son no degeneradas. Sea  $Z \in \mathcal{X}(M \times N)$  definido como  $Z = (X, Y)$ . Sea  $(p, q) \in M \times N$  una singularidad de  $Z$ , i.e.  $X(p) = Y(q) = 0$ .

Observar que  $dZ_{(p,q)} = \begin{pmatrix} dX_p & 0 \\ 0 & dY_q \end{pmatrix}$ , luego como  $p$  y  $q$  son singularidades no degeneradas de  $X$  y de  $Y$  respectivamente, se tiene que  $(p, q)$  es una singularidad no degenerada de  $Z$ . Tenemos entonces que  $\text{ind}_{(p,q)}(Z) = \text{sg}(dZ_{(p,q)}) = \text{sg}(dX_p)\text{sg}(dY_q)$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \chi(M \times N) &= \sum_{Z(p,q)=0} \text{ind}_{(p,q)}(Z) = \sum_{\substack{X(p)=0 \\ Y(q)=0}} \text{sg}(dX_p)\text{sg}(dY_q) \\ &= \sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X) \sum_{Y(q)=0} \text{ind}_q(Y) \\ &= \chi(M)\chi(N) \end{aligned} \quad \square$$

*Ejemplo 8.6.6.* 1.  $\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$  : para todo  $n$  definimos el *campo norte-sur*

en  $S^n$ : es  $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  definido como

$$X(p) = P_{T_p S^n}(S) = P_{\{p\}^\perp}(S) = S - \langle S, p \rangle p$$

donde  $P_W$  indica la proyección ortogonal sobre el subespacio  $W$ , y  $S = -e_n$  es el polo sur (ver figura 8.13). Sea  $N = e_n$  el polo norte.

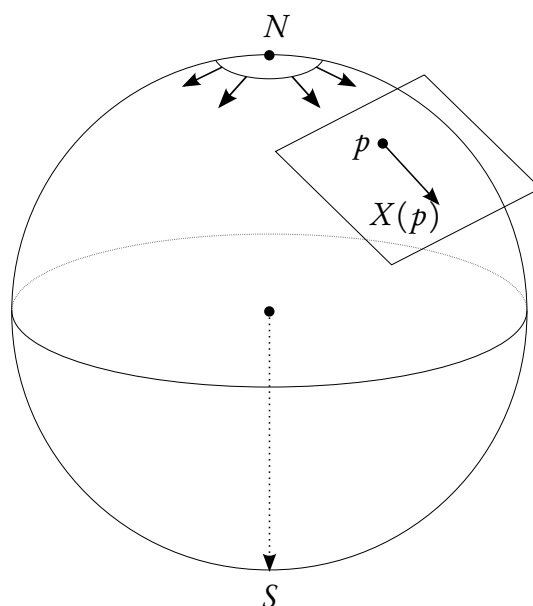


Figura 8.13: Campo norte-sur en  $S^2$

Observar que  $N$  y  $S$  son las únicas singularidades de  $X$ . Además,  $\text{ind}_N(X) = 1$  (pues  $\widehat{X} = \text{id}$ ) e  $\text{ind}_S(X) = (-1)^n$  (pues en este caso  $\widehat{X} = a$  siendo  $a$  el mapa antipodal de  $S^{n-1}$ ).

Entonces  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$  obteniendo lo que buscábamos. En particular,  $S^2$  tiene característica de Euler 2, y podemos concluir el teorema de la bola peluda como caso particular del teorema de Poincaré-Hopf.

2. Sea  $T^n := (S^1)^n$  el toro  $n$ -dimensional. Entonces  $\chi(T^n) = 0$ , pues en virtud del ítem anterior y de la proposición 8.6.5 se tiene que  $\chi(T^n) = (\chi(S^1))^n = 0$ .

**Proposición 8.6.7.** Sean  $M$  una  $n$ -variedad y  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una isometría lineal. Sea  $X \in \mathcal{X}(M)$  un campo con una singularidad en  $p \in M$ . Entonces

$$\text{ind}_p(T \circ X) = \text{sg}(T) \text{ind}_p(X)$$

*Demostración.* Observar primero que como  $T$  es una isometría lineal, entonces es un isomorfismo lineal y por lo tanto las singularidades de  $T \circ X$  son las de  $X$ .

Tenemos que  $\text{ind}_p(T \circ X) = \text{deg}(\widehat{T \circ X})$  donde  $\widehat{T \circ X} : \partial B(p, \epsilon) \rightarrow S^{n-1}$  está definida como  $\widehat{T \circ X}(x) = \frac{T(X(x))}{\|T(X(x))\|}$ . Entonces explotando el hecho que  $T$  es una isometría lineal se tiene, para  $x \in M$ ,

$$\widehat{T \circ X}(x) = \frac{T(X(x))}{\|T(X(x))\|} = \frac{T(X(x))}{\|X(x)\|} = T\left(\frac{X(x)}{\|X(x)\|}\right) = T(\widehat{X}(x))$$

de donde  $\widehat{T \circ X} = T \circ \widehat{X}$ . Por lo tanto

$$\text{ind}_p(T \circ X) = \text{deg}(\widehat{T \circ X}) = \text{deg}(T) \text{deg}(\widehat{X}) = \text{sg}(T) \text{ind}_p(X) \quad \square$$

Veamos ahora que la característica de Euler sólo es interesante para variedades de dimensión par:

**Proposición 8.6.8.** *Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión impar. Entonces  $\chi(M) = 0$ .*

*Demostración.* Sean  $X \in \mathcal{X}(M)$  con finitas singularidades y  $n = \dim M$ . Consideremos  $-X \in \mathcal{X}(M)$ : tiene las mismas singularidades. Observar que por la proposición 8.6.7 se tiene que  $\text{ind}_p(-X) = \text{sg}(a) \text{ind}_p(X) = (-1)^n \text{ind}_p(X) = -\text{ind}_p(X)$  siendo  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $a(x) := -x$ . Entonces

$$\chi(M) = \sum_{-X(p)=0} \text{ind}_p(-X) = - \sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X) = -\chi(M)$$

y por lo tanto  $\chi(M) = 0$ . □

*Observación 8.6.9.* Se puede probar que si  $M$  es una variedad compacta y conexa tal que  $\chi(M) = 0$  entonces admite un campo de vectores sin singularidades (ver p.146 de [GP]).

# Capítulo 9

## Teorema de Gauss-Bonnet

En la sección 8.5.1 definimos el mapa de Gauss para el borde de una  $n$ -variedad orientada con borde en  $\mathbb{R}^n$ . Observar que en este caso  $\partial M$  es una  $(n - 1)$  variedad en  $\mathbb{R}^n$ , que consideramos orientada con la orientación borde. Podemos entonces definir el mapa de Gauss con más generalidad.

**Definición 9.0.10.** Decimos que  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es una *hipersuperficie* si es una  $n$ -variedad compacta orientada. El *mapa de Gauss* de una hipersuperficie es el campo normal saliente y unitario  $g : M \rightarrow S^n$ , donde *saliente* significa que si  $p \in M$  y  $(v_1, \dots, v_n)$  es una base positiva de  $T_p M$ , entonces  $(g(p), v_1, \dots, v_n)$  es una base positiva de  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la orientación usual.

Observar que no se precisa que  $M$  sea compacta para que la definición del mapa de Gauss tenga sentido, sin embargo lo definimos en este caso porque es el que nos interesa. Notamos además que en realidad en el caso compacto y conexo esta definición no generaliza realmente a la anterior, pues toda hipersuperficie compacta y conexa es el borde de una variedad (ver teorema de separación de Jordan-Brouwer, [GP] p. 89).

Del teorema de Poincaré-Hopf tenemos que si  $M \subset \mathbb{R}^k$  es una variedad compacta, entonces  $\chi(M) = \deg G$  donde  $G : \partial N_\epsilon(M) \rightarrow S^{k-1}$  es el mapa de Gauss del entorno tubular. ¿Qué pasa si  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es una hipersuperficie?

Si  $\dim M$  es impar, ya vimos que  $\chi(M) = 0$ . Pero si no, si  $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  es una hipersuperficie, probemos que  $\chi(M) = 2 \deg g$  donde  $g : M \rightarrow S^{2n}$  es el mapa de Gauss de  $M$  (ver figura 9.1).

**Teorema 9.0.11.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  una hipersuperficie y  $g : M \rightarrow S^{2n}$  el mapa de Gauss de  $M$ . Entonces  $\chi(M) = 2 \deg g$ .

*Demostración.* Definamos un campo adecuado en  $M$  para calcular  $\chi(M)$ .

Por el teorema de Sard, existe  $a \in S^{2n}$  valor regular de  $g$  y de  $-g$ . De esta forma,  $a$  y  $-a$  son valores regulares de  $g$ . Proyectamos ortogonalmente  $-a$  sobre  $T_p M$  y a ese vector le llamamos  $X(p)$  (ver figura 9.2), i.e.

$$-a = \langle -a, g(p) \rangle g(p) + X(p) \implies X(p) = \langle a, g(p) \rangle g(p) - a$$

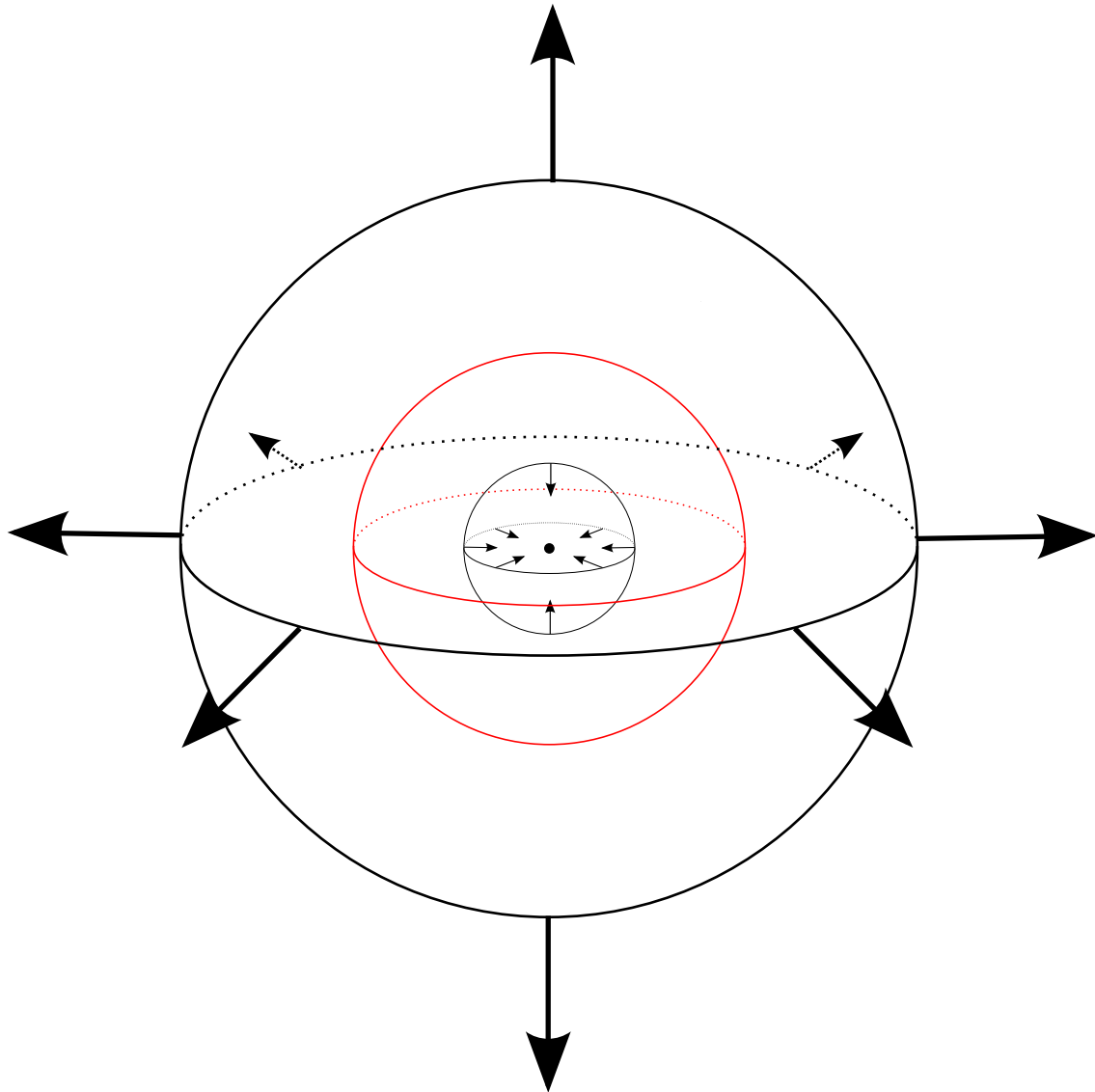


Figura 9.1:  $\chi(S^2) = 2 = 2 \deg(g)$ . En rojo, la esfera  $S^2$ ; la región delimitada por las otras dos esferas concéntricas forman un entorno tubular  $N_\epsilon(S^2)$ , del cual está dibujado el mapa de Gauss. Es clave observar que el grado de la antípoda de  $S^2$  es  $-1$ , y la esfera de adentro de  $\partial N_\epsilon(S^2)$  está orientada negativamente. Por lo tanto el grado del mapa de Gauss del entorno tubular es  $1 + (-1)(-1) = 2$ . Este caso es sencillo porque es fácil calcular el grado del mapa de Gauss de un entorno tubular de  $S^2$ . Una parte importante de la prueba del teorema 9.0.11 es definir un campo  $X$  en la hipersuperficie a partir del cual calcular  $\chi(M)$ .

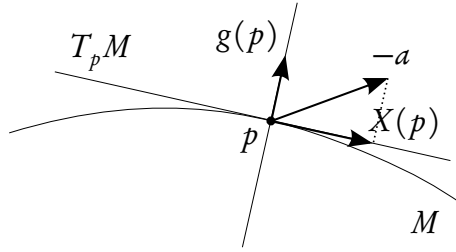


Figura 9.2

Tenemos entonces definido  $X \in \mathcal{X}(M)$ .

Hallémosle las singularidades a  $X$ . Tenemos que  $X(p) = 0 \iff a = \langle a, g(p) \rangle g(p)$ . Por lo tanto si  $X(p) = 0$ , tomando normas conseguimos que  $1 = \langle a, g(p) \rangle$ . De esta forma,

$$X(p) = 0 \iff g(p) = \pm a$$

lo cual es, de hecho, geoméricamente claro de la definición de  $X$ .

Como  $a$  y  $-a$  son valores regulares de  $g$ , entonces  $g^{-1}(a)$  y  $g^{-1}(-a)$  son finitos, por el lema 1.0.5. Por lo tanto  $X$  tiene finitas singularidades, y entonces  $\chi(M) = \sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X)$ .

Ahora queremos calcular estos índices.

*Afirmación:* Si  $p \in M$  es una singularidad de  $X$ , entonces  $dX_p = \pm dg_p$ , donde  $g(p) = \pm a$ . En particular, las singularidades de  $X$  son no degeneradas.

*Demostración:* Sea  $v \in T_p M$ . Entonces  $v = \dot{\alpha}(0)$  para cierta curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ . Calculemos:

$$\begin{aligned} dX_p(v) &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\langle a, g(\alpha(t)) \rangle g(\alpha(t)) - a) \\ &= \left\langle a, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\alpha(t)) \right\rangle g(\alpha(0)) + \langle a, g(\alpha(0)) \rangle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\alpha(t)) \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \langle a, dg_p(v) \rangle g(p) + \langle a, g(p) \rangle dg_p(v) \end{aligned}$$

Ahora bien,  $\langle g(\alpha(t)), g(\alpha(t)) \rangle = 1$  para todo  $t$ , derivando obtenemos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle g(\alpha(t)), g(\alpha(t)) \rangle = 0 \stackrel{\text{r.c.}}{\implies} 2\langle g(p), dg_p(v) \rangle = 0 \implies \langle \pm a, dg_p(v) \rangle = 0$$

y por lo tanto  $\langle a, dg_p(v) \rangle = 0$ . Del cálculo anterior deducimos que

$$dX_p(v) = \langle a, g(p) \rangle dg_p(v) = \langle a, \pm a \rangle dg_p(v) = \pm dg_p(v)$$

para todo  $v \in T_p M$ , y por lo tanto  $dX_p = \pm dg_p$  si  $g(p) = \pm a$ . En ambos casos  $dX_p$  es un isomorfismo, pues tanto  $a$  como  $-a$  son valores regulares de  $g$ , de donde  $dg_p$  es

sobreyectivo y por lo tanto  $\pm dg_p = dX_p$  es un isomorfismo. ■

Por la proposición 8.5.10, obtenemos que si  $\text{ind}_p(X) = \text{sg}(dX_p)$  para toda singularidad  $p \in M$  de  $X$ . Calculemos la característica de Euler de  $M$ :

$$\begin{aligned}
 \chi(M) &= \sum_{X(p)=0} \text{ind}_p(X) = \sum_{g(p)=a} \text{ind}_p(X) + \sum_{g(p)=-a} \text{ind}_p(X) \\
 &= \sum_{g(p)=a} \text{sg}(dX_p) + \sum_{g(p)=-a} \text{sg}(dX_p) \\
 &= \sum_{g(p)=a} \text{sg}(dg_p) + \sum_{g(p)=-a} \text{sg}(-dg_p) \\
 &\stackrel{*}{=} \text{deg}(g) + (-1)^{2n} \sum_{g(p)=-a} \text{sg}(dg_p) \\
 &= 2 \text{deg}(g)
 \end{aligned}$$

donde en  $\stackrel{*}{=}$  usamos la proposición 8.6.7. Esto termina la demostración. □

Veamos ahora la fórmula del grado, que vincula la operación analítica de integración con el invariante topológico del grado. Primero, un lema.

**Lema 9.0.12.** Sean  $M, N$  dos  $n$ -variedades compactas orientadas. Sean  $f, g : M \rightarrow N$  mapas homotópicos. Si  $\omega \in \Omega^n(N)$ , entonces  $\int_M f^*(\omega) = \int_M g^*(\omega)$ .

*Demostración.* Sea  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  una homotopía, con  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$ . Sea  $\omega \in \Omega^n(N)$ . Consideremos  $F^*(\omega) \in \Omega^n([0, 1] \times M)$ . Observemos que como  $\omega$  es una  $n$ -forma y  $\dim N = n$ , entonces  $d\omega = 0$ , de manera que  $0 = F^*(d\omega) \in \Omega^{n+1}([0, 1] \times M)$ . Ahora aplicamos el teorema de Stokes, donde en  $[0, 1] \times M$  consideramos la orientación producto (ver sección 2.1). Recordando que el pull-back y la derivada exterior conmutan, obtenemos, utilizando la proposición 1.3.3:

$$0 = \int_{[0,1] \times M} F^*(d\omega) = \int_{[0,1] \times M} d(F^*\omega) = \int_{\partial([0,1] \times M)} F^*(\omega) = - \int_M f^*(\omega) + \int_M g^*(\omega)$$

terminando la demostración. □

**Teorema 9.0.13** (Fórmula del grado). Sean  $M, N$  dos  $n$ -variedades compactas orientadas, con  $N$  conexa. Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable. Si  $\omega \in \Omega^n(N)$ , entonces

$$\int_M f^*(\omega) = \text{deg } f \int_N \omega \tag{9.1}$$

*Observación 9.0.14.* Este teorema generaliza el teorema de Cálculo III que dice que si  $f$  es además un difeomorfismo, entonces  $\int_M f^*(\omega) = \pm \int_N \omega$  según si  $f$  preserva o revierte orientación. Utilizaremos este teorema en su demostración.



*Demostración. Caso local:* si  $y \in N$  es un valor regular de  $f$ , entonces existe  $U \subset N$  entorno abierto de  $y$  tal que para toda  $\omega \in \Omega^n(N)$  con  $\text{sop } \omega \subset U$ , se cumple la fórmula (9.1).

*Demostración del caso local:* Por el lema de la pila de discos, existe  $U \subset N$  un entorno abierto de  $y$  tal que  $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ , donde  $U_i \subset M$  son abiertos dos a dos disjuntos tales que  $f|_{U_i} : U_i \rightarrow U$  es un difeomorfismo para todo  $i$ .

Sea  $\omega \in \Omega^n(N)$  con  $\text{sop } \omega \subset U$ . De Cálculo III sabemos que  $\text{sop } f^*(\omega) = f^{-1}(\text{sop } \omega)$ , y por lo tanto  $\text{sop } f^*(\omega) \subset f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Ahora calculamos:

$$\begin{aligned} \int_M f^*(\omega) &= \int_{\bigcup_{i=1}^n U_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} f^*(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{U_i} (f|_{U_i})^*(\omega) = \sum_{i=1}^n \text{sg}(df_{x_i}) \int_U \omega \quad \text{por la observación 9.0.14} \\ &= \left( \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sg}(df_x) \right) \int_U \omega = \text{deg } f \int_N \omega \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora demostremos el caso general. Por el teorema de Sard, existe  $y \in N$  valor regular de  $f$ . Sea  $U \subset N$  un entorno abierto de  $y$  como en el enunciado del caso local. Por el lema de homogeneidad, para todo  $z \in N$  existe  $h_z : N \rightarrow N$  un difeomorfismo isotópico a  $\text{id}_N$  tal que  $h_z(y) = z$ . Entonces  $N = \bigcup_{z \in N} \{z\} = \bigcup_{z \in N} h_z(U)$ . Entonces  $\{h_z(U)\}_{z \in N}$  es un cubrimiento abierto de  $N$  que es una variedad compacta: admite entonces un subcubrimiento finito que denotamos  $\mathcal{U} = \{h_1(U), \dots, h_m(U)\}$ .

Sea  $\omega \in \Omega^n(N)$ . Sea  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  una partición de la unidad subordinada al cubrimiento  $\mathcal{U}$ . Podemos entonces descomponer  $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_m$  con  $\text{sop } \omega_i \subset h_i(U)$  para todo  $i$ , definiendo  $\omega_i = \rho_i \omega$  para todo  $i$ . Probemos el lema para  $\omega_i$ . Como  $h_i$  es isotópico a  $\text{id}_N$ , entonces  $h_i \circ f$  es homotópico a  $f$ . Observar que

$$\text{sop}(h_i^*(\omega_i)) = h_i^{-1}(\text{sop } \omega_i) \subset h_i^{-1}(h_i(U)) = U$$

y por lo tanto le podemos aplicar el caso local a  $\omega_i$ . Usando además el resultado del lema 9.0.12, conseguimos:

$$\int_M f^*(\omega_i) = \int_M (h_i \circ f)^*(\omega_i) = \int_M f^*(h_i^*(\omega_i)) = \text{deg } f \int_N h_i^*(\omega_i)$$

Ahora bien, al ser  $h_i : N \rightarrow N$  un difeomorfismo isotópico a  $\text{id}_N$ , preserva orientación. Por la observación 9.0.14, es  $\int_N h_i^*(\omega_i) = \int_N \omega_i$ , y de la fórmula anterior concluimos que

$$\int_M f^*(\omega_i) = \text{deg } f \int_N \omega_i$$

Ahora basta usar la linealidad de la integral:

$$\int_M f^*(\omega) = \int_M f^*\left(\sum_{i=1}^m \omega_i\right) = \sum_{i=1}^m \int_M f^*(\omega_i) = \sum_{i=1}^m \deg f \int_N \omega_i = \deg f \int_N \omega \quad \square$$

Ya podemos meternos de lleno con el teorema de Gauss-Bonnet.

**Definición 9.0.15.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  una hipersuperficie. Definimos la *curvatura Gaussiana* de  $M$  como  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K(p) = \det(dg_p)$  para todo  $p \in M$ .

Observar que  $K \in C^\infty(M)$ .

*Observación 9.0.16.* Si  $g : M \rightarrow S^n$  es el mapa de Gauss de una hipersuperficie y  $p \in M$ , entonces  $dg_p : T_p M \rightarrow T_{g(p)} S^n$ .

Observemos que  $T_{g(p)} S^n = T_p M$ . En efecto,  $\langle g(p), v \rangle = 0$  para todo  $v \in T_p M$  al ser  $g$  normal, y  $\langle g(p), w \rangle = 0$  para todo  $w \in T_{g(p)} S^n$ , pues en general  $\langle x, w \rangle = 0$  para todo  $x \in S^n, w \in T_x S^n$ . Al ser  $T_p M$  y  $T_{g(p)} S^n$  subespacios de dimensión  $n-1$ , se tiene entonces que  $T_p M = \{g(p)\}^\perp = T_{g(p)} S^n$ , y por lo tanto  $T_p M = T_{g(p)} S^n$ .

En conclusión,  $dg_p : T_p M \rightarrow T_p M$ .

La magnitud de la curvatura en un punto mide “cuán curvado” está el espacio en ese punto, midiendo cuán rápido se mueve el vector normal en un entorno de ese punto.

La curvatura en un punto es un dato geométrico, que claramente no se preserva por difeomorfismos de la variedad. Algo muy interesante que el teorema de Gauss-Bonnet nos da es que la integral global de la curvatura *sí* es invariante por difeomorfismos de la variedad, pues se expresa a través de la característica de Euler que es un invariante diferenciable (ejercicio 8.6.4).

**Teorema 9.0.17 (Gauss-Bonnet).** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  una hipersuperficie. Entonces

$$\int_M K dV = \frac{1}{2} \chi(M) \text{vol}(S^{2n})$$

donde  $dV \in \Omega^{2n}(M)$  es la forma de volumen de  $M$ .

*Demostración.* Sea  $g : M \rightarrow S^{2n}$  el mapa de Gauss de  $M$ . Sea  $\omega \in \Omega(S^{2n})$  la forma de volumen de  $S^{2n}$ . Entonces por la fórmula del grado y el teorema 9.0.11, se tiene que

$$\int_M g^*(\omega) = \deg g \int_{S^{2n}} \omega = \deg(g) \text{vol}(S^{2n}) = \frac{1}{2} \chi(M) \text{vol}(S^{2n})$$

Basta ver entonces que  $g^*(\omega) = K dV$ . Sea  $p \in M$ . Entonces aplicando una proposición de Cálculo III sobre el pull-back lineal al mapa  $dg_p : T_p M \rightarrow T_p M$ , obtenemos que

$$g^*(\omega)(p) = dg_p^*(\omega(g(p))) = \det(dg_p) \omega(g(p))$$

---

Ahora basta ver que  $\omega(g(p)) = dV(p)$ . Para ver esto, observemos que la forma multilineal  $\omega(g(p)) \in \Lambda^{2n}(T_{g(p)}S^{2n}) = \Lambda^{2n}(T_pM)$  vale 1 en toda base ortonormal positiva por ser  $\omega$  la forma de volumen de  $S^{2n}$ , luego por ser  $dV$  la forma de volumen de  $M$  debe ser  $\omega(g(p)) = dV(p)$ . Esto termina la demostración.  $\square$

*Ejemplo 9.0.18.* Sea  $S$  una superficie regular. El teorema de Gauss-Bonnet dice entonces que

$$\int_S K dV = 2\pi\chi(M)$$

# Apéndice A

## Grupos de matrices

Nuestro objetivo en este apéndice es probar que el espacio topológico

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det A > 0\}$$

es conexo.

### A.1. $SO(n)$ es conexo

**Definición A.1.1.** Un grupo  $G$  es un *grupo topológico* si es además un espacio topológico tal que las operaciones  $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$  y  $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$  son continuas, donde  $G \times G$  tiene la topología producto.

Si  $X$  es un espacio topológico y  $G$  es un grupo topológico, una *acción continua* de  $G$  en  $X$  es una acción  $G \times X \rightarrow X$  que es una función continua.

- Ejemplo A.1.2.*
1. Si  $G$  es un grupo topológico y  $H < G$  es un subgrupo, entonces  $G/H$ , el conjunto cociente, es un espacio topológico con la topología cociente.
  2.  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  es un grupo topológico con la topología heredada de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , para todo  $n \geq 1$ . La acción  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, A \cdot x := Ax$  es una acción continua.
  3. Sea  $n \geq 1$ . Definimos el *grupo ortogonal*  $O(n)$  y el *grupo especial ortogonal*  $SO(n)$ ,

$$O(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : A^t A = I\}, \quad SO(n) := \{A \in O(n) : \det A = 1\}$$

Son subgrupos de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ , y son por lo tanto grupos topológicos con la topología del subespacio.

Se puede probar que  $O(n)$  es isomorfo al grupo de simetrías de  $S^n$ , y que  $SO(n)$  es isomorfo al grupo de rotaciones de  $S^n$  (es decir, de las simetrías de  $S^n$  que preservan orientación).

4. En virtud del ítem anterior,  $SO(n+1)$  actúa en  $S^n$  como  $A \cdot v := Av$ . Es una acción continua, y es transitiva.

En efecto, si  $v, w \in S^n$ , tomemos  $\{v_2, \dots, v_{n+1}\} \subset T_v S^n$  y  $\{w_2, \dots, w_{n+1}\} \subset T_w S^n$  bases ortonormales positivas, donde  $S^n$  está orientada como borde de  $B^n$ .

Como  $v$  y  $w$  son salientes a  $S^2$ , entonces  $\{v, v_2, \dots, v_{n+1}\}, \{w, w_2, \dots, w_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  son bases ortonormales positivas, así que existe  $A \in SO(n+1)$  que lleva la primera en la segunda, por álgebra lineal. Ésta cumple  $Av = w$ .

**Lema A.1.3.** Si  $G$  es un grupo topológico y  $H < G$  es un subgrupo, entonces el mapa cociente  $\pi : G \rightarrow G/H$  es abierto.

*Demostración.* Sea  $U \subset G$  abierto. Por definición de la topología cociente,  $\pi(U) \subset G/H$  es abierto si y sólo si  $\pi^{-1}\pi(U) \subset G$  es abierto.

Observar que  $\pi^{-1}\pi(U) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$ , y que  $G \rightarrow G, g \mapsto gh$  es un homeomorfismo para todo  $h \in H$  tal que la imagen de  $U$  es  $Uh$ . Así que  $Uh$  es abierto para todo  $h \in H$ , luego  $UH$  es abierto y por lo tanto  $\pi(U)$  es abierto.  $\square$

**Lema A.1.4.** Sean  $G$  un grupo topológico compacto,  $X$  un espacio topológico Hausdorff y  $x \in X$ . Si  $G$  actúa continua y transitivamente sobre  $X$ , entonces  $G/\text{Stab}(x)$  es homeomorfo a  $X$ , donde  $\text{Stab}(x) < G$  denota el estabilizador de  $x$  en  $G$ .

*Demostración.* Por la propiedad universal del cociente para espacios topológicos, si  $H := \text{Stab}(x)$  entonces existe una única función continua  $\phi : G/H \rightarrow X$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g \mapsto g \cdot x} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi & \\ G/H & & \end{array}$$

En efecto, si  $g \sim g'$  entonces  $g \cdot x = g' \cdot x$ , pues si  $g' = gh$  con  $h \in \text{Stab}(x)$  entonces  $g' \cdot x = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x$ . Queda entonces definida  $\phi$  mediante  $\phi(gH) = g \cdot x$ .

Como  $G$  es compacto y  $\pi$  es continua y sobreyectiva, entonces  $G/H$  es compacto. Como además  $X$  es Hausdorff, entonces  $\phi$  es cerrada. Para ver que  $\phi$  es un homeomorfismo, basta verificar entonces que  $\phi$  es biyectiva.

$\phi$  es inyectiva:

$$\phi(gH) = \phi(g'H) \Rightarrow g \cdot x = g' \cdot x \Rightarrow g^{-1}g' \in \text{Stab}(x) = H \Rightarrow g' = gh$$

para cierto  $h \in H$ , luego  $gH = g'H$ .

$\phi$  es sobreyectiva: si  $y \in X$ , como la acción de  $G$  en  $X$  es transitiva entonces existe  $g \in G$  tal que  $g \cdot x = y$ , luego  $\phi(gH) = y$ .  $\square$

**Proposición A.1.5.**  $O(n)$  es compacto para todo  $n \geq 1$ .

*Demostración.* Consideremos la norma  $\|A\| := \sup_{v \in S^n} \|Av\|$  en  $GL_n(\mathbb{R})$ . Esta norma define en  $GL_n(\mathbb{R})$  la topología que tiene como subconjunto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , pues todas las normas en  $\mathbb{R}^{n^2}$  son equivalentes.

Si  $A \in O(n)$  entonces  $Av \in S^n$  para todo  $v \in S^n$  y por lo tanto  $\|A\| = 1$ , luego  $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$  es acotado.

Además  $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  es cerrado, pues  $O(n) = f^{-1}(I)$  donde  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  es el mapa continuo  $f(A) := A^t A$ .

Entonces  $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  es cerrado y acotado, y por lo tanto es compacto.  $\square$

**Corolario A.1.6.**  $SO(n)$  es compacto para todo  $n \geq 1$ .

*Demostración.* Observar que  $SO(n) = \det^{-1}(I)$ , donde  $\det : O(n) \rightarrow \mathbb{R}$  es la función determinante, que es una función continua. Por lo tanto  $SO(n) \subset O(n)$  es cerrado. Como  $O(n)$  es compacto, entonces  $SO(n)$  es compacto.  $\square$

Observar que

$$SO(n) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in SO(n) \right\}$$

luego podemos considerar  $SO(n) < SO(n+1)$ .

**Proposición A.1.7.**  $\frac{SO(n+1)}{SO(n)}$  es homeomorfo a  $S^n$ .

*Demostración.* En el ejemplo A.1.2.4 describimos una acción continua y transitiva de  $SO(n+1)$  en  $S^n$ . Consideremos  $e_n := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ ,  $H := \text{Stab}(e_n)$ . Entonces se verifica fácilmente que

$$H = \{A \in SO(n+1) : Ae_n = e_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in SO(n) \right\} = SO(n)$$

Por el corolario A.1.6, tenemos que  $SO(n+1)$  es compacto. Se aplica entonces el lema A.1.4 para concluir que  $SO(n+1)/SO(n)$  es homeomorfo a  $S^n$ .  $\square$

Una extensión de grupos topológicos conexos es conexa:

**Lema A.1.8.** Sea  $G$  un grupo topológico y  $H < G$  un subgrupo. Si  $H$  y  $G/H$  son conexos, entonces  $G$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $G$  no es conexo, y por lo tanto  $G = U \cup V$  con  $U, V \subset G$  abiertos disjuntos no vacíos. Por lo tanto  $G/H = \pi(G) = \pi(U) \cup \pi(V)$ . Veamos que  $\pi(U)$  y  $\pi(V)$  son disjuntos, llegando a una contradicción porque  $\pi(U), \pi(V)$  son abiertos por el lema A.1.3 y  $G/H$  es conexo por hipótesis.

Supongamos que  $\pi(U)$  y  $\pi(V)$  no son disjuntos. Existe entonces  $x \in \pi(U) \cap \pi(V)$ , es decir: existen  $u \in U, v \in V, h \in H$  tales que  $u = h \cdot v$ . Por lo tanto

$$\begin{cases} Hv \cap U \neq \emptyset \\ Hv \cap V \neq \emptyset \end{cases} \text{ pues } \text{id}_H \in H, v \in V \quad (\text{A.1})$$

Ahora,  $H$  es conexo y  $Hv$  es homeomorfo a  $H$ , así que  $Hv$  es conexo. Por otro lado, como  $G = U \cup V$  entonces  $Hv = (Hv \cap U) \cup (Hv \cap V)$  es una descomposición en abiertos no vacíos por (A.1), que son disjuntos pues  $U \cap V = \emptyset$ , llegando a una contradicción.  $\square$

**Corolario A.1.9.**  $SO(n)$  es conexo para todo  $n \geq 1$ .

*Demostración.* Por inducción en  $n$ . Claramente  $SO(1) = \{1\}$  es conexo. Supongamos ahora que  $SO(n)$  es conexo.

Por el lema A.1.7,  $SO(n+1)/SO(n)$  es homeomorfo a  $S^n$ . Tanto  $S^n$  como  $SO(n)$  son conexos, así que se aplica el lema A.1.8 para concluir que  $SO(n+1)$  es conexo.  $\square$

## A.2. $GL_n^+(\mathbb{R})$ es conexo

**Teorema A.2.1.**  $GL_n^+(\mathbb{R})$  es conexo para todo  $n \geq 1$ .

*Demostración.* Recordemos de álgebra lineal la descomposición polar: si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , entonces hay una única descomposición  $A = PO$  donde  $P$  es una matriz simétrica positiva (i.e.  $\langle Pv, v \rangle > 0$  para todo  $v \neq 0$ ) y  $O$  es una matriz ortogonal.

Sea  $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$  y  $A = PO$  su descomposición polar. Observar que como  $P$  es simétrica, es diagonalizable:  $P = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$ . Como  $P$  es positiva, si  $Pv = \lambda v$ ,  $v \neq 0$  entonces  $\langle Pv, v \rangle = \lambda \|v\|^2 > 0$ , de donde  $\lambda > 0$ . Por lo tanto los valores propios  $\lambda_i$  de  $P$  son positivos.

En particular,  $P$  tiene determinante positivo. Esto implica que  $O$  tiene determinante positivo, pues  $0 < \det A = \det P \det O$ .

Para probar el teorema veremos que podemos unir  $A$  con la identidad  $I$ , pues así vemos que  $GL_n^+(\mathbb{R})$  es conexo por caminos y por lo tanto conexo.

Para ver esto, basta ver que podemos unir  $A$  con  $O$  por una curva en  $GL_n^+(\mathbb{R})$ , pues como  $SO(n)$  es conexo podemos unir  $O$  con  $I$  por una curva en  $SO(n) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$ , y concatenándolas habremos unido  $A$  con  $I$ .

Unamos primero  $P$  con  $I$  por una curva en  $GL_n^+(\mathbb{R})$ . Si  $t \in [0, 1]$ , definimos

$$P_t := T \begin{pmatrix} t + (1-t)\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t + (1-t)\lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$$

Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$  definida como  $\alpha(t) = P_t$ . Es una curva continua que une  $P$  con  $I$ . Por lo tanto  $t \mapsto P_t O$  es una curva continua que une  $PO = A$  con  $IO = O$ , terminando la demostración (ver figura A.1).  $\square$

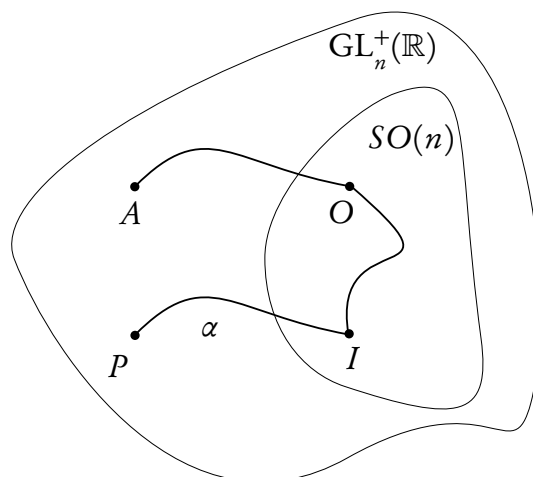


Figura A.1

Sea  $GL_n^-(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A < 0\}$ .

**Corolario A.2.2.** *Las componentes conexas de  $GL_n(\mathbb{R})$  son  $GL_n^+(\mathbb{R})$  y  $GL_n^-(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.* La función determinante  $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  es continua, así que tenemos una descomposición  $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \cup GL_n^-(\mathbb{R})$ , donde ambos son abiertos disjuntos no vacíos. Basta ver que ambos son conexos.

Por el teorema A.2.1,  $GL_n^+(\mathbb{R})$  es conexo. Sea  $A \in GL_n^-(\mathbb{R})$ . La función

$$GL_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n^-(\mathbb{R}), \quad X \mapsto AX$$

es un homeomorfismo, así que  $GL_n^-(\mathbb{R})$  es conexo, terminando la demostración.  $\square$



# Apéndice B

## Teorema del entorno tubular

### B.1. Fibrado normal

Para construir el entorno tubular de una variedad, construimos primero el fibrado normal.

**Definición B.1.1.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad. Definimos el *fibrado normal* de  $M$ ,

$$T^\perp M = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M^\perp\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$$

Observar que esta definición depende fuertemente del espacio ambiente  $\mathbb{R}^k$ .

**Lema B.1.2.** Si  $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  es una transformación lineal sobreyectiva, entonces su traspuesta  $A^t : \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k$  es inyectiva, y su imagen es  $(\ker A)^\perp$ .

*Demostración.* ■  $A^t$  es inyectiva: si  $A^t x = 0$ , entonces  $0 = \langle A^t x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  para todo  $y \in \mathbb{R}^{k-n}$ . Como  $A$  es sobreyectiva, esto implica que  $\langle x, x' \rangle = 0$  para todo  $x' \in \mathbb{R}^{k-n}$ , y por lo tanto  $x = 0$ .

■  $\text{Im}(A^t) \subset (\ker A)^\perp$ : sean  $x \in \mathbb{R}^{k-n}, y \in \ker A$ . Entonces

$$\langle A^t x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$$

y por lo tanto  $A^t x \in (\ker A)^\perp$ .

■  $\text{Im} A^t = (\ker A)^\perp$ : pues uno está incluido en el otro y

$$\dim \text{Im} A^t = k - n = \dim(\ker A)^\perp \quad \square$$

**Proposición B.1.3.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad. Entonces  $T^\perp M$  es una variedad de dimensión  $k$ .

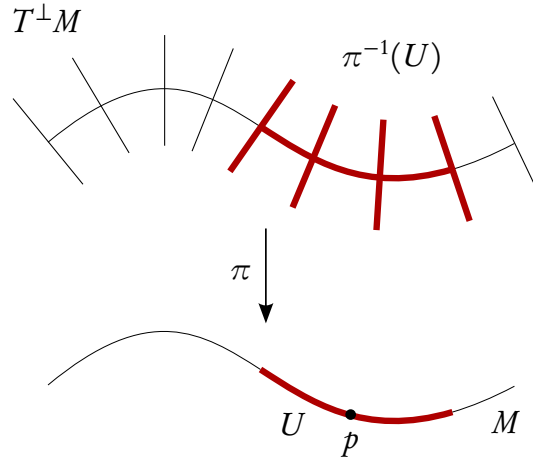


Figura B.1

*Demostración.* Sea  $n = \dim M$ . Por el corolario 3.0.11, si  $p \in M$  entonces existe  $W \subset \mathbb{R}^k$  un entorno abierto de  $p$  y una sumersión  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  tal que  $U := W \cap M = g^{-1}(0)$ .

Sea  $\pi : T^\perp M \rightarrow M$  la proyección,  $\pi(q, v) := q$  (ver figura B.1). Es continua por ser la restricción de la función continua  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $(q, v) \mapsto q$ .

Por el lema B.1.2,  $dg_x^t : \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow (\ker dg_x)^{\perp} = T_x M^\perp$  es un isomorfismo para todo  $x \in U$ , y entonces el siguiente mapa está bien definido y es biyectivo:

$$\psi : U \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset T^\perp M, \quad \psi(x, v) := (x, dg_x^t(v))$$

Si probamos que  $\psi$  es un difeomorfismo entonces ya está, pues como  $U$  es difeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  entonces el entorno  $\pi^{-1}(U)$  de  $(p, v)$  resultará difeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^k$ . Por el corolario 3.0.8, basta ver que  $\psi$  es una inmersión y un homeomorfismo sobre su imagen.

- $\psi$  es una inmersión: sea  $(x, v) \in U \times \mathbb{R}^{k-n}$ . Entonces

$$d\psi_{(x,v)} : T_x M \times T_v(\mathbb{R}^{k-n}) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$$

por el ejercicio B.1.4.

Sea  $(X, V) \in T_x M \times T_v(\mathbb{R}^{k-n})$ . Entonces  $X = \dot{\alpha}(0)$ ,  $V = \dot{\beta}(0)$  para ciertas curvas  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ ,  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  tales que  $\alpha(0) = x$ ,  $\beta(0) = v$ .

Sea  $G(x, v) := dg_x^t(v)$ , de forma que  $\psi(x, v) = (x, G(x, v))$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 d\psi_{(x,v)}(X, V) &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi(\alpha(t), \beta(t)) \\
 &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \left( \dot{\alpha}(0), \frac{\partial G}{\partial x}(\alpha(0), \beta(0)) \alpha'(0) + \frac{\partial G}{\partial v}(\alpha(0), \beta(0)) \beta'(0) \right) \\
 &= \left( X, \frac{\partial G}{\partial x}(x, v) X + \frac{\partial G}{\partial v}(x, v) V \right) \\
 &= \left( X, \frac{\partial G}{\partial x}(x, v) X + dg_x^t(V) \right) \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto si  $d\psi_{(x,v)}(X, V) = (0, 0)$  entonces  $X = 0$ , de donde  $dg_x^t(V) = 0$  y por lo tanto  $V = 0$  también, por ser  $dg_x^t$  un isomorfismo. Esto prueba que  $d\psi_{(x,v)}(X, V)$  es inyectiva.

- $\psi$  es un homeomorfismo: resta probar que  $\psi^{-1}$  es continua. Para ver esto, veamos que si  $\psi(x_n, v_n) \rightarrow \psi(x, v)$  entonces  $x_n \rightarrow x, v_n \rightarrow v$ .

$$\psi(x_n, v_n) = (x_n, dg_{x_n}^t(v_n)) \rightarrow \psi(x, v) = (x, dg_x^t(v)) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_n \rightarrow x \\ dg_{x_n}^t(v_n) \rightarrow dg_x^t(v) \end{cases}$$

Si existe  $N$  tal que  $v_n = 0$  para todo  $n > N$ , entonces  $dg_{x_n}^t(v_n) = 0$  para todo  $n > N$ , y entonces  $dg_x^t(v) = 0$ , de donde  $v = 0$  y  $v_n \rightarrow v$ .

En caso contrario,  $(v_n)$  tiene una subsucesión (que seguiremos llamando  $(v_n)$ ) tal que  $v_n \neq 0$  para todo  $n$ .

*Afirmación*  $(v_n)$  está acotada.

*Demostración* Supongamos que no lo está. Existe pues una subsucesión  $(v_{n_k})$  tal que  $\|v_{n_k}\| \rightarrow \infty$ . Entonces

$$dg_{x_{n_k}}^t(v_{n_k}) = \|v_{n_k}\| dg_{x_{n_k}}^t\left(\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|}\right) \tag{B.2}$$

Como  $S^1$  es compacta, tomando otra subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que  $\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|} \rightarrow z \in S^1$ .

Como  $\psi$  es continua, entonces  $dg_{x_{n_k}}^t\left(\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|}\right) \rightarrow dg_x^t(z) \neq 0$  ya que  $z \neq 0$  y  $dg_x^t$  es un isomorfismo. Por lo tanto por (B.2) debe ser  $\|dg_{x_{n_k}}^t(v_{n_k})\| \rightarrow \infty$ , lo cual es absurdo pues  $dg_{x_{n_k}}^t(v_{n_k}) \rightarrow dg_x^t(v)$ . ■

Entonces toda subsucesión  $(v_{n_k})$  de  $(v_n)$  tiene una subsucesión convergente,  $v_{n_{k_j}} \rightarrow w$ , donde  $w$  depende de la subsucesión  $(v_{n_k})$ . Como  $\psi$  es continua, entonces  $\psi(x_{n_{k_j}}, v_{n_{k_j}}) \rightarrow \psi(x, w)$ , pero además  $\psi(x_{n_{k_j}}, v_{n_{k_j}}) \rightarrow \psi(x, v)$ , luego  $\psi(x, v) = \psi(x, w)$ . Al ser  $\psi$  biyectiva, debe ser  $v = w$  y por lo tanto  $v_{n_{k_j}} \rightarrow v$ . Esto prueba que  $v_n \rightarrow v$ .  $\square$

*Ejercicio B.1.4.* Sean  $M, N$  variedades. Entonces  $T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \times T_q N$  para todo  $(p, q) \in M \times N$ .

*Observación B.1.5.* Se tiene que  $T_{(x,0)}(T^\perp M) = T_x M \times (T_x M)^\perp$ . En efecto, la ecuación (B.1) nos da que para todo  $(X, V) \in T_x M \times T_v(\mathbb{R}^{k-n})$ ,

$$d\psi_{(x,0)}(X, V) = \left( X, \frac{\partial G}{\partial x}(x, 0) X + dg_x^t(V) \right) \quad (\text{B.3})$$

Observar ahora que  $\frac{\partial G}{\partial x}(x, 0) X = 0$ . En efecto: sea  $h(x) := G(x, 0)$ . Sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  tal que  $x = \alpha(0)$ ,  $X = \dot{\alpha}(0)$ . Entonces

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, 0) X = dh_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} G(\alpha(t), 0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} dg_{\alpha(t)}^t(0) = 0$$

Entonces la ecuación (B.3) nos da  $d\psi_{(x,0)}(X, V) = (X, dg_x^t(V))$ , y por lo tanto

$$T_{(x,0)}(T^\perp M) = \text{Im } d\psi_{(x,0)} = T_x M \times (T_x M)^\perp$$

## B.2. Entornos tubulares

**Definición B.2.1.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad, y sea  $\epsilon > 0$ . Definimos el  $\epsilon$ -entorno tubular de  $M$  como el conjunto cerrado de puntos en  $\mathbb{R}^k$  a distancia  $\leq \epsilon$  de  $M$ :

$$\begin{aligned} N_\epsilon(M) &:= \{y \in \mathbb{R}^k : \exists p \in M \text{ } \|p - y\| \leq \epsilon\} \\ &= \{p + v \in \mathbb{R}^k : p \in M, \|v\| \leq \epsilon\} \end{aligned}$$

Al ser  $N_\epsilon(M) \subset \mathbb{R}^k$  cerrado, es una  $k$ -variedad con borde para todo  $\epsilon > 0$ . El siguiente teorema afirma que para todo  $\epsilon$  suficientemente chico se tiene que todo punto de  $N_\epsilon(M)$  tiene un único punto más cercano en  $M$ .

**Teorema B.2.2** (del entorno tubular). *Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una  $n$ -variedad compacta. Para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente chico se tiene que  $N_\epsilon(M)$  es una  $k$ -variedad con borde de manera que todo elemento de  $N_\epsilon(M)$  se puede escribir de manera única como  $p + v$ , con  $p \in M$  y  $v \in T_p M^\perp$  tal que  $\|v\| \leq \epsilon$ . Los puntos del borde son aquellos con  $\|v\| = \epsilon$ .*

*Se cumple también que para tales  $\epsilon$ , el mapa  $r : N_\epsilon(M) \rightarrow M$ ,  $r(p + v) = p$  donde  $p \in M, v \in T_p M^\perp, \|v\| \leq \epsilon$  es diferenciable.*

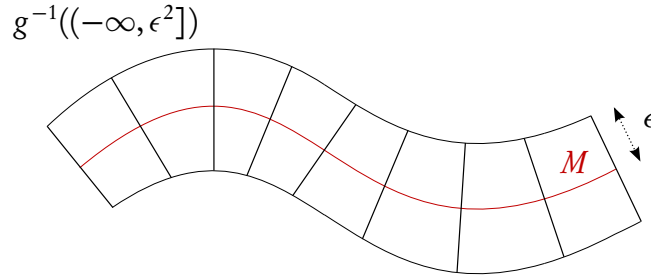


Figura B.2

*Demostración.* Sea  $g : T^\perp M \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x, v) = \|v\|^2$ . De esta forma, para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$g^{-1}((-\infty, \epsilon^2]) = \{(x, v) \in T^\perp M : \|v\| \leq \epsilon\} \quad (\text{B.4})$$

(ver figura B.2).

Veamos que todo  $\epsilon^2 > 0$  es valor regular de  $g$ , probando que (B.4) es una  $k$ -variedad con borde, cuyo borde es  $g^{-1}(\epsilon^2) = \{(x, v) \in T^\perp M : \|v\| = \epsilon\}$  (teorema 2.2.2).

Sea entonces  $(X, V) \in T_x M \times T_v(\mathbb{R}^{k-n})$ . Por lo tanto  $X = \dot{\alpha}(0)$ ,  $V = \dot{\beta}(0)$  para ciertas curvas  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ ,  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$  tales que  $\alpha(0) = x$ ,  $\beta(0) = v$ . Entonces

$$dg_{(x,v)}(X, V) \stackrel{\text{r.c.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\alpha(t), \beta(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|\beta(t)\|^2 = 2\langle \dot{\beta}(0), \beta(0) \rangle = 2\langle v, V \rangle$$

y por lo tanto  $dg_{(x,v)} = 2\langle v, - \rangle \neq 0$  si  $v \neq 0$ . Esto prueba que todo  $\epsilon^2 > 0$  es valor regular de  $g$ .

Ahora trasladamos los vectores de  $g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])$  a donde deben estar. Consideremos la función diferenciable  $f : T^\perp M \rightarrow \mathbb{R}^k$  definida como  $f(x, v) = x + v$ . Observar que para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$f(g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])) = N_\epsilon(M)$$

Probaremos que  $f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])}$  es un difeomorfismo sobre su imagen para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente chico. Por el ejercicio B.2.3, basta ver que  $f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])}$  es un difeomorfismo local inyectivo para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente chico.

Por la observación B.1.5 se tiene que  $T_{(x,0)}(T^\perp M) = T_x M \times (T_x M)^\perp$ . De esta forma,

$$df_{(x,0)} : T_x M \times (T_x M)^\perp \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad df_{(x,0)}(X, V) = X + V$$

pues  $f$  es la restricción de la transformación lineal  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $(X, V) \mapsto X + V$ . Por lo tanto, identificando  $T_x M \times (T_x M)^\perp \simeq T_x M \oplus (T_x M)^\perp = \mathbb{R}^k$ , se obtiene  $df_{(x,0)} = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$ , y en particular es un isomorfismo.

Por el teorema de la función inversa, para todo  $x \in M$  existe  $W_x \subset T^\perp M$  un entorno abierto de  $(x, 0)$  tal que  $f(W_x)$  es abierto y  $f|_{W_x} : W_x \rightarrow f(W_x)$  es un difeomorfismo.

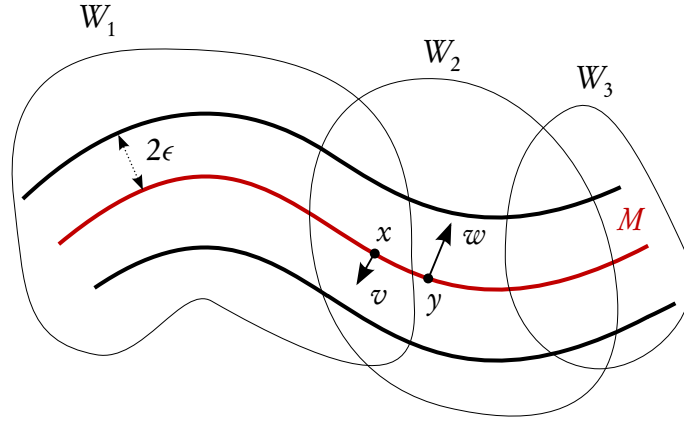


Figura B.3:  $(x, v), (y, w) \in W_2$

Los conjuntos  $W_x$  forman un cubrimiento abierto de  $M \times 0$  en  $T^\perp M$ . Como  $M$  es compacta,  $M \times 0$  se cubre con una cantidad finita de estos abiertos: llamémosles  $\{W_{x_1}, \dots, W_{x_m}\}$ .

Por el lema del cubrimiento de Lebesgue, para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente chico se tiene que si  $(x, v), (y, w) \in T^\perp M$  verifican  $\|x - y\|, \|v\|, \|w\| < 2\epsilon$  entonces  $(x, v), (y, w)$  pertenecen a un mismo  $W_{x_i}$  (ver figura B.3).

Esto prueba que  $f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])}$  es un difeomorfismo local para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente chico, pues si  $(x, v) \in g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])$ , entonces  $g(x, v) = \|v\|^2 < \epsilon^2$ , i.e.  $\|v\| < \epsilon$ , y por lo tanto  $(x, v) \in W_x$  donde  $f$  es un difeomorfismo local.

Además  $f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])}$  es inyectiva para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente chico: si  $\epsilon$  es como en el párrafo anterior, entonces si  $(x, v), (y, w) \in g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])$ , i.e.  $\|v\|, \|w\| < \epsilon$ , y cumplen  $f(x, v) = f(y, w)$ , i.e.  $x + v = y + w$ , entonces

$$\|x - y\| = \|v - w\| \leq \|v\| + \|w\| < 2\epsilon$$

y por lo tanto  $(x, v), (y, w)$  pertenecen a un mismo  $W_{x_i}$  donde  $f$  es un difeomorfismo sobre su imagen. Como  $f(x, v) = f(y, w)$ , esto prueba que  $(x, v) = (y, w)$  y por lo tanto  $f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])}$  es inyectiva.

Hemos probado entonces que  $f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])}$  es un difeomorfismo sobre  $f(g^{-1}((-\infty, \epsilon^2]))$  para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente chico. Por definición de  $f$ , esto prueba que todo punto de  $f(g^{-1}((-\infty, \epsilon^2]))$  se escribe de manera única como  $p + v$  con  $p \in M$ ,  $v \in T_p M^\perp$ ,  $\|v\| \leq \epsilon$ .

Esto también es cierto para  $N_\epsilon(M) = f(g^{-1}((-\infty, \epsilon^2]))$  para  $\epsilon$  suficientemente chico, pues si  $\epsilon'$  satisface que  $f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon'^2])}$  es un difeomorfismo sobre su imagen para todo  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon \leq \epsilon'$ , entonces  $f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])}$  es un difeomorfismo sobre  $N_\epsilon(M)$  para todo  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon < \epsilon'$ , y por lo tanto tales  $\epsilon$  satisfacen la conclusión del teorema.

Probemos ahora que la función  $r$  definida en el enunciado es diferenciable. Dado un  $\epsilon$  que satisface la conclusión del teorema, sea  $\pi : g^{-1}((-\infty, \epsilon^2]) \rightarrow M$  definida como

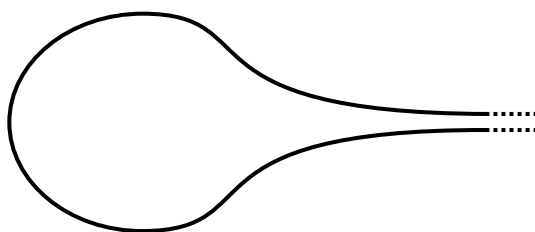


Figura B.4

$\pi(p, v) = p$ . Esta función es diferenciable, pues es la restricción de la función diferenciable  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k, (p, v) \mapsto p$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 N_\epsilon(M) & \xrightarrow{r} & M \\
 (f|_{g^{-1}((-\infty, \epsilon^2])})^{-1} \downarrow & \nearrow \pi & \\
 g^{-1}((-\infty, \epsilon^2]) & & 
 \end{array} \tag{B.5}$$

Entonces  $r$  es composición de funciones diferenciables, y por lo tanto es diferenciable.  $\square$

*Ejercicio B.2.3.* Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable entre variedades. Si  $f$  es un difeomorfismo local inyectivo, entonces  $f(M) \subset N$  es abierto (y por tanto es una variedad), y  $f$  es un difeomorfismo sobre su imagen.

*Observación B.2.4.* 1. En la demostración del teorema, cuando encontramos un  $\epsilon'$  para el que todos los puntos de todo  $N_\epsilon(M)$  y no solo los de  $f(g^{-1}((-\infty, \epsilon^2)))$  se escriben de manera única como  $p + v, p \in M, v \in T_p M^\perp, \|v\| \leq \epsilon$ , para todo  $\epsilon < \epsilon'$ , fue realmente necesario achicar el  $\epsilon'$ . Por ejemplo,  $\overline{B(0, 2)} \subset \mathbb{R}^2$  es un entorno tubular de  $S^1$ : es  $N_1(S^1)$ , pero el origen no tiene una única escritura  $p + v$  como requerimos.

2. La función  $r$  del teorema es una retracción de  $N_\epsilon(M)$  sobre  $M$ , i.e. satisface  $r|_M = \text{id}_M$ . Además es una sumersión, pues el diagrama (B.5) exhibe a  $r$  como composición de dos sumersiones.
3.  $N_\epsilon(M)$  es difeomorfa a  $M \times [-\epsilon, \epsilon]$  y en particular es compacta ya que  $M$  lo es, y es orientable pues es una  $k$ -variedad con borde en  $\mathbb{R}^k$  y por lo tanto la podemos dotar de la orientación de  $\mathbb{R}^k$ .
4. La conclusión del teorema es falsa si  $M$  no es compacta (ver figura B.4).

Sin embargo, si permitimos que el  $\epsilon$  del entorno tubular varíe diferenciablemente con el punto, entonces sí existe un teorema de entorno tubular incluso para variedades no compactas (ver [Lee1], teorema 10.19).

# Apéndice C

## Campos gradiente

El objetivo de este apéndice es introducir los campos gradiente en variedades, probar sus propiedades básicas, y dar una aplicación a la existencia de campos de vectores cuyas singularidades son aisladas.

### C.1. Propiedades básicas

Recordar que si  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, entonces  $\nabla g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo de vectores (diferenciable). Generalicemos esto.

**Definición C.1.1.** Si  $M \subset \mathbb{R}^k$  es una variedad y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, definimos el *gradiente* de  $f$  como  $\nabla f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  mediante el teorema de representación de Riesz: considerando  $df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , existe un único vector en  $T_p M$ , que llamamos  $\nabla f(p)$ , que cumple  $df_p = \langle \nabla f(p), - \rangle$ .

*Observación C.1.2.* Si  $M$  es un abierto de  $\mathbb{R}^k$  y  $f$  es diferenciable, este gradiente coincide con el gradiente clásico.

**Proposición C.1.3.** Sea  $M$  una variedad y  $f \in C^\infty(M)$ . Si  $a \in \mathbb{R}$  es tal que  $f^{-1}(a)$  es una variedad, entonces  $T_p(f^{-1}(a)) = \{\nabla f(p)\}^\perp$  para todo  $p \in M$ .

*Demostración.* Por la proposición 2.2.3, se tiene que  $T_p(f^{-1}(a)) = \ker df_p$ . Como  $df_p = \langle \nabla f(p), - \rangle$ , entonces  $\ker df_p = \{\nabla f(p)\}^\perp$ , de donde  $T_p(f^{-1}(a)) = \{\nabla f(p)\}^\perp$ .  $\square$

Encontremos la expresión del gradiente de una función en coordenadas locales.

Sean  $M$  una  $n$ -variedad,  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización y  $\{E_i\}_i$  su referencial local asociado. Sea  $g_{ij} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g_{ij}(p) = \langle E_i(p), E_j(p) \rangle$ . Como  $E_i \in \mathcal{X}(\varphi(U))$  para todo  $i$ , entonces  $g_{ij} \in C^\infty(\varphi(U))$  para todo  $i, j$ .



Observemos ahora que para todo  $p \in \varphi(U)$  la matriz  $(g_{ij}(p))$  es definida positiva, i.e. es simétrica y cumple  $\sum_{i,j} g_{ij}(p)x_i x_j > 0$  para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \neq 0$ . Claramente es simétrica, y además si  $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g_{ij}(p)x_i x_j &= \sum_{i,j} \langle d\varphi_q(e_i), d\varphi_q(e_j) \rangle x_i x_j \\ &= \left\langle d\varphi_q \left( \sum_i x_i e_i \right), d\varphi_q \left( \sum_j x_j e_j \right) \right\rangle \\ &= \|d\varphi_q(x_1, \dots, x_n)\|^2 > 0 \end{aligned}$$

pues  $d\varphi_q$  es un isomorfismo y  $x \neq 0$ .

En particular,  $(g_{ij}(p))$  es invertible, pues toda matriz definida positiva es invertible (en efecto, si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  es una matriz definida positiva, entonces  $v^t A v > 0$  para todo  $v \neq 0$ ; en particular,  $Av \neq 0$  para todo  $v \neq 0$ , i.e.  $A$  tiene rango  $n$  y por lo tanto es invertible).

Definimos entonces  $(g^{ij}(p)) = (g_{ij}(p))^{-1}$ . Observar que  $g^{ij} \in C^\infty(\varphi(U))$  para todo  $i, j$ .

**Lema C.1.4.** *Sea  $M$  una variedad,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización y  $\{E_i\}_i$  su referencial local asociado. Entonces*

$$(\nabla f)|_{\varphi(U)} = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_j} \circ \varphi^{-1} \right) g^{ij} E_i$$

*Demostración.* Escribimos  $(\nabla f)|_{\varphi(U)} = \sum_j a_j E_j$  para ciertas funciones  $a_j : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora, si  $p \in M$ , entonces

$$df_p(E_i(p)) = \langle \nabla f(p), E_i(p) \rangle = \left\langle \sum_j a_j(p) E_j(p), E_i(p) \right\rangle = \sum_j a_j(p) g_{ij}(p)$$

Por otro lado, si  $p = \varphi(q)$  entonces se tiene, gracias a la observación C.1.2:

$$\begin{aligned} df_p(E_i(p)) &= df_p(d\varphi_q(e_i)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d(f \circ \varphi)_q(e_i) \\ &= \langle \nabla(f \circ \varphi)(q), e_i \rangle = \left\langle \sum_j \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j}(q) e_j, e_i \right\rangle \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(q) \end{aligned}$$

Juntando estas dos expresiones se obtiene que

$$\sum_j a_j(p) g_{ij}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(q)$$

Esta es la expresión del producto de la matriz  $(g_{ij}(p))$  por el vector  $(a_i(p))$ ; invirtiendo la matriz, se obtiene

$$a_i(p) = \sum_j g^{ij}(p) \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j}(q)$$

Como  $(\nabla f)|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i E_i$ , concluimos que

$$(\nabla f)|_{\varphi(U)} = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j} \circ \varphi^{-1} \right) g^{ij} E_i \quad \square$$

**Corolario C.1.5.** Si  $M$  es una variedad y  $f \in C^\infty(M)$ , entonces  $\nabla f \in \mathcal{X}(M)$ .

*Demostración.* Se deduce del corolario 8.2.3. □

*Observación C.1.6.* De la proposición anterior y la observación 8.3.6, deducimos que

$$\varphi_*^{-1}((\nabla f)|_{\varphi(U)}) = \sum_{i,j} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j} (g^{ij} \circ \varphi) e_i$$

La siguiente proposición con  $N = \mathbb{R}^n$  es un resultado de Cálculo III. La misma demostración se adapta a este caso más general.

**Proposición C.1.7.** Sea  $N$  una variedad y  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable que tiene a  $a \in \mathbb{R}$  como valor regular, de manera que  $M := f^{-1}((-\infty, a])$  es una variedad con borde tal que  $\partial M = f^{-1}(a)$ . Sea  $p \in \partial M$ . Entonces  $\nabla f(p) \in T_p M$  es un vector saliente a  $M$ .

## C.2. Existencia de campos de vectores cuyas singularidades son aisladas

*Observación C.2.1.* Si  $M$  es una variedad y  $f \in C^\infty(M)$ , entonces  $p$  es una singularidad de  $\nabla f$  si y sólo si es un punto crítico de  $f$ , por definición:  $df_p = \langle \nabla f(p), - \rangle$ .

Recordemos que si  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable con un punto crítico en  $q$ , decimos que  $q$  es un punto crítico *no degenerado* si el diferencial segundo  $d^2 f_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo, i.e. si la matriz hessiana  $H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q) \right)_{i,j}$  es invertible.

**Definición C.2.2.** Sea  $M$  una variedad y  $f \in C^\infty(M)$  tal que  $p \in M$  es un punto crítico de  $f$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización tal que  $\varphi(0) = p$ . Decimos que  $p$  es un punto crítico *no degenerado* de  $f$  si  $0$  es un punto crítico no degenerado de  $f \circ \varphi \in C^\infty(U)$ .

Debemos ver que la definición anterior tiene sentido, i.e. que no depende de la elección de la parametrización. Sean  $\varphi : U \rightarrow M$ ,  $\psi : V \rightarrow M$  parametrizaciones tales que  $\varphi(0) = p = \psi(0)$ . Podemos suponer que  $\varphi(U) = \psi(V)$ . Si  $0$  es un punto crítico no degenerado de  $f \circ \varphi$ , debemos ver que también lo es de  $f \circ \psi$ . Observar que  $f \circ \varphi = (f \circ \psi) \circ h$ , donde  $h : U \rightarrow V$  es  $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ . Basta entonces demostrar el siguiente

**Lema C.2.3.** *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f \in C^\infty(U)$  tal que  $0$  es un punto crítico no degenerado de  $f$ . Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $h : V \rightarrow U$  un difeomorfismo tal que  $h(0) = 0$ . Entonces  $0$  es un punto crítico no degenerado de  $f \circ h$ .*

*Demostración.* Sea  $\tilde{f} = f \circ h$ , y sean  $H$  y  $\tilde{H}$  las matrices hessianas de  $f$  y  $\tilde{f}$  en  $0$  respectivamente. Debemos ver que si  $\det(H) \neq 0$  entonces  $\det(\tilde{H}) \neq 0$ . Ahora bien,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}(x) \stackrel{\text{r.c.}}{=} \sum_s \frac{\partial f}{\partial x_s}(h(x)) \frac{\partial h_s}{\partial x_j}(x)$$

Derivando de nuevo y evaluando en cero, como  $h(0) = 0$  entonces

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j} \stackrel{\text{r.c.}}{=} \sum_{r,s} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}(0) \frac{\partial h_r}{\partial x_i}(0) \frac{\partial h_s}{\partial x_j}(0) + \sum_s \frac{\partial f}{\partial x_s}(0) \frac{\partial^2 h_s}{\partial x_i \partial x_j}(0)$$

Como  $0$  es un punto crítico de  $f$ , entonces  $\frac{\partial f}{\partial x_s}(0) = 0$  para todo  $s$  y por lo tanto la segunda sumatoria es nula. La fórmula anterior se convierte entonces en el desarrollo del coeficiente  $(i, j)$  de un producto de matrices, de manera que

$$\tilde{H} = (dh_0)^t H dh_0$$

Como  $h$  es un difeomorfismo, entonces  $dh_0$  es un isomorfismo, y por lo tanto  $\det(dh_0) \neq 0$ . De esta forma, como  $\det(\tilde{H}) = \det(dh_0)^2 \det(H)$  obtenemos que si  $\det(H) \neq 0$  entonces  $\det(\tilde{H}) \neq 0$ , terminando la demostración.  $\square$

**Proposición C.2.4.** *Sea  $M$  una variedad y  $f \in C^\infty(M)$ . Entonces  $p \in M$  es una singularidad no degenerada de  $\nabla f$  si y sólo si es un punto crítico no degenerado de  $f$ .*

*Demostración.* Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización tal que  $\varphi(0) = p$ . Si  $p$  es una singularidad de  $\nabla f$ , o equivalentemente un punto crítico de  $f$  (observación C.2.1), entonces por el lema 8.5.7 se tiene que  $d(\nabla f)_p : T_p M \rightarrow T_p M$  y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{d(\nabla f)_p} & T_p M \\ d\varphi_0 \uparrow & & \uparrow d\varphi_0 \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d(\varphi_*^{-1}((\nabla f)|_{\varphi(U)})_0)} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Como  $d\varphi_0$  son isomorfismos, entonces  $p$  es una singularidad no degenerada de  $\nabla f$  si y sólo si  $d(\varphi_*^{-1}((\nabla f)|_{\varphi(U)}))_0$  es un isomorfismo. Calculemos este diferencial, utilizando la observación C.1.6,

$$\begin{aligned} d(\varphi_*^{-1}((\nabla f)|_{\varphi(U)}))_0 &= \sum_{i,j} d\left(\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j}(g^{ij} \circ \varphi)\right)_0 e_i \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j}(0) d(g^{ij} \circ \varphi)_0 + g^{ij}(p) d\left(\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j}\right)_0\right) e_i \end{aligned}$$

Ahora bien, si  $p$  es un punto crítico de  $f$ , entonces  $0$  es un punto crítico de  $f \circ \varphi$ , pues  $d(f \circ \varphi)_0 \stackrel{\text{r.c.}}{=} df_p \circ d\varphi_0 = 0$  por ser  $df_p = 0$ . Por lo tanto  $\nabla(f \circ \varphi)(0) = 0$  y entonces  $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j}(0) = 0$  para todo  $j$ . De esta forma, el cálculo anterior sigue así:

$$\begin{aligned} d(\varphi_*^{-1}((\nabla f)|_{\varphi(U)}))_0 &= \sum_{i,j} g^{ij}(p) d\left(\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_j}\right)_0 e_i \\ &= (g^{ij}(p))_{i,j} \left(d\left(\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}\right)_0\right)_i \\ &= (g^{ij}(p))_{i,j} \left(\sum_j \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_j \partial x_i} e_j\right)_i \\ &= (g^{ij}(p))_{i,j} (d^2(f \circ \varphi)_{0,i})_i \end{aligned}$$

donde  $d^2(f \circ \varphi)_{0,i}$  es la  $i$ -ésima coordenada del diferencial segundo  $d^2(f \circ \varphi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Como  $(g^{ij}(p))_{i,j}$  es una matriz invertible, entonces  $d(\varphi_*^{-1}((\nabla f)|_{\varphi(U)}))_0(v) = 0$  si y sólo si  $d^2(f \circ \varphi)_{0,i}(v) = 0$  para todo  $i$ , si y sólo si  $d^2(f \circ \varphi)(v) = 0$ . Entonces  $d(\varphi_*^{-1}((\nabla f)|_{\varphi(U)}))_0$  es un isomorfismo si y sólo si  $d^2(f \circ \varphi)$  lo es.

Esto prueba que  $p$  es una singularidad no degenerada de  $\nabla f$  si y sólo si  $0$  es un punto crítico no degenerado de  $f$ .  $\square$

### C.2.1. Funciones de Morse

**Definición C.2.5.** Sea  $M$  una variedad y  $f \in C^\infty(M)$ . Decimos que  $f$  es una *función de Morse* si sus puntos críticos son no degenerados.

Nuestro objetivo ahora es ver que hay “muchas” funciones de Morse.

Primero, un lema de álgebra lineal.

**Lema C.2.6.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno, y sea  $\{e_1, \dots, e_k\} \subset V$  una base ortonormal. Sea  $W \subset V$  un subespacio de dimensión  $n \geq 1$ . Existen  $i_1, \dots, i_n$  tales que  $P_S|_W : W \rightarrow S$  es un isomorfismo, donde  $S$  es el subespacio generado por  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$  y  $P_S : V \rightarrow S$  es la proyección ortogonal sobre  $S$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$  una base de  $W$ . Escribamos  $w_r = \sum_{i=1}^k \lambda_i^r e_i$  para todo  $r = 1, \dots, n$ .

Sea  $A = (\lambda_i^r)_{i,r} \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$  la matriz que en la columna  $r$  tiene los coeficientes de  $w_r$ . Observar que las columnas de  $A$  son linealmente independientes pues los vectores  $w_r$  lo son. Por lo tanto la matriz  $A$  tiene rango  $n$ , y en particular existen  $n$  filas linealmente independientes, llamémosles  $i_1, \dots, i_n$ .

Sea  $S$  el subespacio generado por  $\mathcal{C} = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ . Observar que la matriz asociada a  $P_S|_W$  de la base  $\mathcal{B}$  a la base  $\mathcal{C}$  es la matriz  $(\lambda_{i_j}^r)_{j,r} \in M_n(\mathbb{R})$  que resulta de quedarse sólo con las filas de  $A$  que encontramos recién. En efecto,

$$P_S|_W(w_r) = \sum_{j=1}^n \langle w_r, e_{i_j} \rangle e_{i_j} = \sum_{j=1}^n \left\langle \sum_{t=1}^k \lambda_t^r e_t, e_{i_j} \right\rangle e_{i_j} = \sum_{j=1}^n \lambda_{i_j}^r e_{i_j}$$

Esto prueba que  $P_S|_W$  es un isomorfismo, pues tiene una matriz asociada cuyas filas son linealmente independientes.  $\square$

La variedad  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$  admite un sistema de coordenadas muy sencillo, que consiste en poner ceros en  $k - n$  coordenadas de  $\mathbb{R}^k$ . Veamos que localmente podemos hacer algo análogo para variedades  $M \subset \mathbb{R}^k$  cualesquiera.

**Lema C.2.7.** <sup>1</sup> Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad de dimensión  $n \geq 1$ ,  $p \in M$  y  $\{e_i\}_i$  la base canónica de  $\mathbb{R}^k$ . Existen índices  $i_1, \dots, i_n$  y un sistema de coordenadas  $\psi : W \rightarrow \psi(W) \subset S \simeq \mathbb{R}^n$ , donde  $W \subset M$  es un entorno abierto de  $p$  y  $S \subset \mathbb{R}^k$  es el subespacio generado por  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ .

*Demostración.* Por el lema C.2.6, existen  $i_1, \dots, i_n$  tales que si  $S \subset \mathbb{R}^k$  es el subespacio generado por  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$  entonces  $P|_{T_p M} : T_p M \rightarrow S$  es un isomorfismo, donde  $P : \mathbb{R}^k \rightarrow S$  es la proyección ortogonal sobre  $S$ .

Consideremos  $P|_M : M \rightarrow S$ . Entonces  $d(P|_M)_p = P|_{T_p M} : T_p M \rightarrow S$  es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, existe  $W \subset M$  tal que  $P(W) \subset S$  es abierto y  $P|_W : W \rightarrow P(W)$  es un difeomorfismo. Definiendo  $\psi = P|_W$  terminamos la demostración.  $\square$

Dados una variedad  $M \subset \mathbb{R}^k$  y un punto  $a \in \mathbb{R}^k$ , definimos  $f^a \in C^\infty(M)$  como  $f^a = f + \langle a, - \rangle$ , i.e.  $f^a(p) = f(p) + \langle a, p \rangle$  para todo  $p \in M$ .

**Lema C.2.8.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y  $f \in C^\infty(U)$ . Entonces  $f^a : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse para casi todo  $a \in \mathbb{R}^n$  (con la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ ).

*Demostración.* Si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  y  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$f^a(x) = f(x) + x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

<sup>1</sup>Ver [Lee1b], teorema 5.8 para el enunciado general, reemplazando  $M \subset \mathbb{R}^k$  por  $M \subset N$  donde  $M$  es una subvariedad de  $N$ .

de manera que  $\frac{\partial f^a}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + c_i$  para todo  $i$ , y por lo tanto  $\nabla(f^a) = \nabla f + a$ . De esta forma,  $x$  es un punto crítico de  $f^a$  si y sólo si  $\nabla f(x) = -a$ .

Observar además que  $f$  y  $f^a$  tienen derivadas segundas iguales, luego para todo  $x$  la matriz hessiana de  $f^a$  en  $x$  es la matriz asociada al diferencial segundo  $d^2 f_x = d(\nabla f)_x$ .

En conclusión, todo punto crítico de  $f^a$  es no degenerado si y sólo si  $-a$  es valor regular de  $\nabla f$ . Por el teorema de Sard,  $-a$  es valor regular de  $\nabla f$  para casi todo  $a \in \mathbb{R}^n$ , concluyendo la demostración.  $\square$

**Proposición C.2.9.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad y  $f \in C^\infty(M)$ . Entonces  $f^a$  es una función de Morse para casi todo  $a \in \mathbb{R}^k$  (con la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}^k$ ).*

*Demostración.* Dado  $p \in M$ , consideramos un sistema de coordenadas como en el lema C.2.7. Por el segundo axioma de numerabilidad, podemos cubrir  $M$  con entornos coordenados como en el lema.

Sea  $W$  uno de estos entornos coordenados, y sea  $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  el sistema de coordenadas. Componiendo con una isometría si es necesario, podemos suponer que  $\psi$  proyecta  $W$  en el subespacio generado por los primeros  $n$  vectores canónicos de  $\mathbb{R}^k$ , de forma que considerando  $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n}$ , es  $\psi(x_1, x_2) = x_1$ .

Dados  $c \in \mathbb{R}^{k-n}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ , definamos  $f_{(b,c)} \in C^\infty(\psi(W))$  como sigue, y calculemos:

$$f_{(b,c)}(\psi(x)) := f^{(0,c)}(x) + \langle b, \psi(x) \rangle \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} &= f(x) + \langle (0, c), x \rangle + \langle b, \psi(x) \rangle \\ &= f(x) + \langle (0, c), x \rangle + \langle (b, 0), x \rangle && \text{por def. de } \psi \\ &= f(x) + \langle (b, c), x \rangle \\ &= f^{(b,c)}(x) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Observemos que  $(f_{(0,c)})^b = f_{(b,c)}$ : si  $x \in W$ ,

$$(f_{(0,c)})^b(\psi(x)) \stackrel{\text{def.}}{=} f_{(0,c)}(\psi(x)) + \langle b, \psi(x) \rangle \stackrel{(\text{C.2})}{=} f^{(0,c)}(x) + \langle b, \psi(x) \rangle \stackrel{(\text{C.1})}{=} f_{(b,c)}(\psi(x))$$

Podemos entonces aplicar el lema C.2.8: para todo  $c \in \mathbb{R}^{k-n}$  y casi todo  $b \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $f_{(b,c)}$  es de Morse. Pero la igualdad (C.2) muestra que  $f_{(b,c)} \circ \psi = f^{(b,c)}|_W$ ; como  $\psi$  es un difeomorfismo, esto prueba que  $f^{(b,c)}|_W$  es de Morse para todo  $c$  y casi todo  $b$ .

Sea  $D_W$  el conjunto de puntos  $a \in \mathbb{R}^k$  tales que  $f^a|_W$  no es una función de Morse. Lo recién probado muestra que para todo  $c \in \mathbb{R}^{k-n}$  se tiene que  $D_W \cap (\mathbb{R}^n \times c) \subset \mathbb{R}^k$  tiene medida cero.

Por el teorema de Fubini (que podemos aplicar por el ejercicio 20, p. 47 de [GP]) se tiene que  $D_W \subset \mathbb{R}^k$  tiene medida cero. Como el conjunto de puntos  $a \in \mathbb{R}^k$  tal que  $f^a$  no es de Morse es la unión de los  $D_W$  que son una cantidad numerable, deducimos que  $f^a$  es de Morse para casi todo  $a$ .  $\square$

*Observación C.2.10.*    ■ Tomando  $f = 0$  conseguimos para toda  $M$  una función de Morse en  $M$  que es restricción de una transformación lineal  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Se deduce de la proposición anterior que las funciones de Morse en  $M$  son densas en las funciones  $C^2(M, \mathbb{R})$  con la topología  $C^2$ . Ver [Mat], sección 2.2c.

**Corolario C.2.11.** *Sea  $M$  una variedad. Existe un campo de vectores en  $M$  cuyas singularidades son no degeneradas, y en particular son aisladas.*

*Demostración.* Por la proposición C.2.9, existe  $f \in C^\infty(M)$  una función de Morse. Por la proposición C.2.4, las singularidades del campo  $\nabla f \in \mathcal{X}(M)$  son no degeneradas. En particular, son aisladas por la observación 8.5.9.  $\square$

## Parte II

# Geometría riemanniana



# Capítulo 1

## Variedades abstractas

En este capítulo redefinimos el concepto de variedad, de función diferenciable entre variedades, de espacio tangente, etc.

### 1.1. Variedades y mapas diferenciables

**Definición 1.1.1.** Sea  $M$  un espacio topológico y  $n \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $M$  es una  $n$ -variedad topológica si es Hausdorff, satisface el segundo axioma de numerabilidad, y es localmente euclídeo de dimensión  $n$ , es decir, para todo  $p \in M$  existe un homeomorfismo sobre su imagen  $\varphi : U \rightarrow M$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto y  $p \in \varphi(U)$ .

Decimos que  $\varphi$  es una parametrización de  $M$ . Si  $p \in \varphi(U)$ , decimos que  $\varphi$  es una parametrización alrededor de  $p$ .

*Observación 1.1.2.* Se puede probar que el número  $n$  es único, es decir, que una  $n$ -variedad topológica (no vacía) no puede ser homeomorfa a una  $m$ -variedad topológica a menos que  $m = n$ . Este es el teorema de invariancia de dimensión, que es sencillo de probar en el caso de variedades diferenciables y difeomorfismos, pero no es nada trivial en el caso topológico. Ver [Lee1b], teorema 17.26 para una demostración.

**Definición 1.1.3.** Sea  $M$  una variedad topológica. Sean  $\varphi : U \rightarrow M$  y  $\psi : V \rightarrow M$  dos parametrizaciones de  $M$  tales que  $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ . Escribamos  $\hat{U} = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$  y  $\hat{V} = \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$ .

El cambio de coordenadas de  $\varphi$  a  $\psi$  es el mapa  $\psi^{-1} \circ \varphi|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ .

Un atlas de  $M$  es un conjunto de parametrizaciones tales que sus imágenes son un cubrimiento abierto de  $M$ .

No es nuestro objetivo estudiar las variedades topológicas en general. Nos restringiremos a las variedades diferenciables, aquellas donde podemos hacer cálculo. Como ahora  $M$  no es un subconjunto de algún  $\mathbb{R}^k$ , no tiene sentido nuestra definición de Cálculo III de variedad diferenciable. Veamos cómo remediar esto.

**Definición 1.1.4.** Sea  $M$  una variedad topológica. Si  $\varphi, \psi$  son dos parametrizaciones de  $M$ , decimos que son *compatibles* si  $U \cap V = \emptyset$  o si  $U \cap V \neq \emptyset$  y el cambio de coordenadas es una función diferenciable.

Un *atlas diferenciable* de  $M$  es un atlas tal que sus parametrizaciones son compatibles.

*Observación 1.1.5.* Las parametrizaciones de un atlas diferenciable son tales que sus cambios de coordenadas son difeomorfismos, pues si  $\varphi : U \rightarrow M, \psi : V \rightarrow M$  son parametrizaciones tales que  $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ , entonces tanto  $\psi^{-1} \circ \varphi$  como  $\varphi^{-1} \circ \psi$  son diferenciables, y son uno inverso del otro.

Nos gustaría definir una *estructura diferenciable* en una variedad topológica como un atlas diferenciable. Pero debemos atender a un problema técnico, y es que claramente deseamos que por ejemplo los siguientes dos atlas diferenciables de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\{\text{id}_{\mathbb{R}^n}\}, \quad \{\text{id}_{B(x,1)} : x \in \mathbb{R}^n\}$$

definan ambos la estructura de variedad diferenciable usual de  $\mathbb{R}^n$ .

Podríamos definir *estructura diferenciable* como una clase de equivalencia de atlas diferenciables bajo una relación de equivalencia adecuada, pero puede resultar difícil de manejar. Hacemos entonces la siguiente

**Definición 1.1.6.** Sea  $M$  una variedad topológica. Un atlas diferenciable  $\mathcal{A}$  es *maximal* si no está contenido estrictamente en ningún otro atlas, en el sentido que cualquier parametrización de  $M$  que sea compatible con toda parametrización del atlas  $\mathcal{A}$  ya está en  $\mathcal{A}$ .

Una *estructura diferenciable* en  $M$  es un atlas diferenciable maximal.

**Definición 1.1.7.** Una *n-variedad diferenciable* es un par  $(M, \mathcal{A})$  donde  $M$  es una  $n$ -variedad topológica y  $\mathcal{A}$  es una estructura diferenciable en  $M$ .

En general sobreentenderemos  $\mathcal{A}$  y diremos sencillamente que  $M$  es una variedad diferenciable.

*Observación 1.1.8.* ■ Una variedad topológica puede tener estructuras diferenciables diferentes.

- Existen variedades topológicas que no admiten estructuras diferenciables.
- Se define el concepto de *orientación* de una variedad diferenciable de la misma forma que hiciéramos en Cálculo III.

La siguiente proposición es útil a la hora de determinar explícitamente una estructura diferenciable en una variedad topológica.

**Proposición 1.1.9.** Sea  $M$  una variedad topológica.

1. Todo atlas diferenciable  $\mathcal{A}$  de  $M$  está contenido en un único atlas diferenciable maximal, la estructura diferenciable determinada por  $\mathcal{A}$ .

2. *Dos atlas diferenciables de  $M$  determinan la misma estructura diferenciable si y sólo si su unión es un atlas diferenciable.*

*Demostración.* Ejercicio para el lector. El atlas diferenciable maximal de la parte 1 es el conjunto de todas las parametrizaciones de  $M$  que son compatibles con las de  $\mathcal{A}$ .  $\square$

A partir de ahora, *variedad* significará variedad diferenciable en el sentido de la definición 1.1.7, y *atlas* significará atlas diferenciable en el sentido de la definición 1.1.4.

*Ejemplo 1.1.10.* 1. Toda variedad con la definición de la Parte I es una variedad con la definición nueva.

2. Si  $M$  es una  $n$ -variedad y  $U \subset M$  es un abierto, entonces  $U$  es una  $n$ -variedad.
3. Si  $V$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n < \infty$ , entonces es una  $n$ -variedad. En efecto, poniendo una norma en  $V$  (e.g. eligiendo un isomorfismo  $V \simeq \mathbb{R}^n$  y transportando una norma de  $\mathbb{R}^n$  a  $V$ ) se determina una topología en  $V$  (que no depende de la norma utilizada, pues en dimensión finita todas las normas son equivalentes). Si  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  es un isomorfismo lineal, entonces  $\{\varphi\}$  es una estructura diferenciable en  $V$ .
4.  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$  es una variedad de dimensión  $n \times m$ .
5. Observar que  $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$  es abierto, pues  $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  y la función determinante  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Por el ítem 2,  $GL_n(\mathbb{R})$  es una variedad de dimensión  $n^2$ .

Supongamos que queremos dotar a un conjunto de una estructura de variedad. Deberíamos primero dotarlo de una estructura de espacio topológico Hausdorff con base numerable, y luego de una estructura diferenciable. Esto puede ser engorroso. El siguiente lema nos facilita el trabajo, haciendo todo al mismo tiempo.

**Lema 1.1.11.** *Sea  $M$  un conjunto. Supongamos que  $\{U_\alpha\}$  es una familia de abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , y que  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  son funciones inyectivas tales que:*

1.  $M$  es cubierto por una cantidad numerable de conjuntos de la forma  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ ,
2. Si  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) =: W \neq \emptyset$ , entonces  $\varphi_\alpha^{-1}(W), \varphi_\beta^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n$  son abiertos, y el mapa  $(\varphi_\beta)^{-1}|_W \circ \varphi_\alpha|_{\varphi_\alpha^{-1}(W)} : \varphi_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \varphi_\beta^{-1}(W)$  es diferenciable,
3. Si  $p, q \in M$ ,  $p \neq q$  entonces o existe  $U_\alpha$  tal que  $p, q \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ , o existen  $U_\alpha, U_\beta$  tales que  $\varphi_\alpha(U_\alpha), \varphi_\beta(U_\beta)$  son disjuntos y  $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ ,

entonces  $M$  tiene una única estructura de variedad respecto de la cual cada  $\varphi_\alpha$  es una parametrización.

## 1.1 Variedades y mapas diferenciables

---

*Demostración.* Digamos que  $A \subset M$  es abierto si y sólo si  $\varphi_\alpha^{-1}(A) \subset U_\alpha$  es abierto para todo  $\alpha$ . Esto dota a  $M$  de la topología final respecto de  $\{\varphi_\alpha\}$ , y por lo tanto  $\varphi_\alpha$  es continua para todo  $\alpha$ .

El resto de la demostración se deja de ejercicio para el lector.  $\square$

Diremos que un mapa entre variedades es diferenciable si lo es en coordenadas locales:

**Definición 1.1.12.** Sean  $M, N$  variedades diferenciables. Decimos que  $f : M \rightarrow N$  es *diferenciable* si para todo  $p \in M$  existen parametrizaciones  $\varphi : U \rightarrow M$  alrededor de  $p$  y  $\psi : V \rightarrow N$  alrededor de  $f(p)$  de modo que  $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$  y el mapa

$$\hat{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow V$$

es diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} \varphi(U) & \xrightarrow{f} & \psi(V) \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{\hat{f}} & V \end{array}$$

Decimos que  $\hat{f}$  es la *representación de  $f$  en las coordenadas de  $\varphi$  y  $\psi$* .

*Observación 1.1.13.* ■ Como los cambios de coordenadas son funciones diferenciables, la definición anterior no depende de las parametrizaciones utilizadas.

- Si  $f : M \rightarrow N$  es una función entre variedades y todo  $p \in M$  tiene un entorno abierto  $U$  tal que  $f|_U$  es diferenciable, entonces  $f$  es diferenciable.
- Si  $f : M \rightarrow N$  es una función diferenciable entre variedades, entonces es continua, pues en un entorno de cada punto es de la forma  $\psi \circ \hat{f} \circ \varphi^{-1}$ , una composición de funciones continuas.
- La composición de mapas diferenciables entre variedades es diferenciable.

**Definición 1.1.14.** Una función  $f : M \rightarrow N$  entre variedades es un:

- *difeomorfismo* si es diferenciable, biyectiva, y  $f^{-1} : N \rightarrow M$  es diferenciable,
- *difeomorfismo local en  $p \in M$*  si existe un entorno abierto  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f(U) \subset N$  es abierto y  $f : U \rightarrow f(U)$  es un difeomorfismo,
- *difeomorfismo local* si es un difeomorfismo local en  $p$  para todo  $p \in M$ .

*Observación 1.1.15.* Toda parametrización  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$  es un difeomorfismo. Observar primero que por el ejemplo 1.1.10.2,  $\varphi(U) \subset M$  es una variedad, y por lo tanto

la afirmación tiene sentido. Los siguientes dos diagramas conmutativos muestran que  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  es un difeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \\
 \text{id}_U \uparrow & & \uparrow \varphi \\
 U & \xrightarrow{\text{id}_U} & U
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \varphi(U) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & U \\
 \varphi \uparrow & & \uparrow \text{id}_U \\
 U & \xrightarrow{\text{id}_U} & U
 \end{array}$$

*Ejemplo 1.1.16.* 1. Sea  $M$  una variedad y  $U \subset M$  un abierto, de manera que es una variedad como observamos en el ejemplo 1.1.10.2. La inclusión  $i : U \rightarrow M$  es un difeomorfismo.

2. Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n < \infty$ , entonces vimos en el ejemplo 1.1.10.3 que es una  $n$ -variedad. Si  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  es un isomorfismo lineal, entonces es un difeomorfismo.

3. En particular,  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$  es una variedad difeomorfa a  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .

*Observación 1.1.17.* La definición abstracta de variedades es útil por diversas razones, pero no porque sea más general que la que teníamos antes. En efecto, toda  $n$ -variedad abstracta puede ser encajada en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ : este es el teorema de Whitney. Ver [Lee1b], teorema 6.15.

*Ejercicio 1.1.18.* 1. Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo que *actúa por homeomorfismos* en  $X$ , esto es, tenemos una acción  $G \times X \rightarrow X$  tal que para todo  $g \in G$  el mapa  $X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$  es un homeomorfismo.

Consideramos el espacio de órbitas  $X/G$  con la topología cociente respecto del mapa  $\pi : X \rightarrow X/G, x \mapsto [x]$ .

Probar que  $X/G$  es de Hausdorff si y sólo si

*para todo  $x, x' \in X$  tales que  $\pi(x) \neq \pi(x')$  existen entornos  $V$  de  $x$  y  $V'$  de  $x'$  tales que  $V \cap (g \cdot V') = \emptyset$  para todo  $g \in G$*

2. Probar que un grupo  $G$  actúa por homeomorfismos en un espacio topológico  $X$  si y sólo si la acción  $G \times X \rightarrow X$  es un mapa continuo, donde en  $G$  está la topología discreta y en  $G \times X$  está la topología producto.

Decimos que una acción por homeomorfismos de un grupo  $G$  en un espacio topológico  $X$  es *propriadamente discontinua*<sup>1</sup>, si

*para todo  $x \in X$  existe un entorno abierto  $U \subset X$  de  $x$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \neq e$ .*

<sup>1</sup>La terminología es desafortunada, sin duda: uno diría que nada puede ser “continuo” y “propriadamente discontinuo” a la vez. Es por ello que algunos autores le llaman *acción de cubrimiento* a una acción propriadamente discontinua.

3. Sea  $M$  una variedad y  $G$  un grupo que *actúa por difeomorfismos* en  $M$ , esto es, tenemos una acción  $G \times M \rightarrow M$  tal que para cada  $g \in G$  el mapa  $M \rightarrow M, x \mapsto g \cdot x$  es un difeomorfismo.

Probar que si  $M/G$  es de Hausdorff y la acción es propiamente discontinua, entonces  $M/G$  admite una estructura diferenciable compatible con la topología cociente respecto de  $\pi : M \rightarrow M/G$  de manera que  $\pi$  sea un difeomorfismo local.

4. Probar que  $M/G$  es orientable si y sólo si existe una orientación de  $M$  tal que los mapas  $M \rightarrow M, x \mapsto g \cdot x$  preservan orientación.
5. Dotar al toro abstracto  $n$ -dimensional,  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  de una estructura diferenciable como en el ítem anterior, y probar que es orientable.
6. El *espacio proyectivo  $n$ -dimensional*  $\mathbb{R}P^n$  es el cociente  $S^n / \mathbb{Z}_2$  donde la acción de  $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$  en  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es  $a \cdot x = ax$ . Probar que  $\mathbb{R}P^n$  es una variedad y que es orientable si y sólo si  $n$  es impar. Probar que  $\mathbb{R}P^1$  es difeomorfo a  $S^1$ .

## 1.2. Espacio tangente

La definición de espacio tangente que dimos para variedades encajadas en  $\mathbb{R}^k$  como en Cálculo III no se generaliza de manera obvia al contexto abstracto. Hay distintas maneras de definir el espacio tangente a un punto en una variedad abstracta; optamos por la de [Lee1].

La observación fundamental es que si  $a \in \mathbb{R}^n$ , un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  determina un operador  $\left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(a)$  que es  $\mathbb{R}$ -lineal y satisface la regla de Leibniz. Un tal operador se llamará “derivación en  $a$ ”, y veremos que el espacio vectorial de todas las derivaciones en  $a$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , el espacio tangente en  $a$  a  $\mathbb{R}^n$  con la definición que ya tenemos. Esto justifica la definición general de espacio tangente a una variedad  $M$  en un punto  $p$  como el conjunto de todas las derivaciones en  $p$ , una noción que tiene sentido en variedades.

Olvidemos ahora que ya le habíamos dado un sentido a la notación  $T_p M$ , pues le daremos uno nuevo.

**Definición 1.2.1.** Sea  $a \in \mathbb{R}^n$ . Una función  $D_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  es una *derivación en  $a$*  si:

- $D_a$  es  $\mathbb{R}$ -lineal,
- $D_a$  satisface la regla de Leibniz:  $D_a(fg) = f(a)D_a(g) + g(a)D_a(f)$ .

Definimos  $T_a(\mathbb{R}^n)$  como el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de las derivaciones en  $a$ , con las operaciones punto a punto.

## 1.2 Espacio tangente

---

*Ejemplo 1.2.2.* Si  $a, v \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\frac{\partial}{\partial v} \Big|_a \in T_a(\mathbb{R}^n)$ . Observar que si  $\{e_i\}_i$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $v = \sum_i v_i e_i$ , entonces  $\frac{\partial}{\partial v} \Big|_a = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_a$ .

Veamos que toda derivación en un punto de  $\mathbb{R}^n$  es una derivada direccional. Primero, un lema.

**Lema 1.2.3.** Sea  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $D \in T_a(\mathbb{R}^n)$ .

1. Si  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  es una función constante, entonces  $Df = 0$ .
2. Si  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $f(a) = g(a) = 0$ , entonces  $D(fg) = 0$ .

*Demostración.* 1. Basta probarlo para  $f = 1$ , pues luego  $D(cf) = cDf = 0$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Si  $f = 1$ , entonces

$$Df = D(ff) = f(a)Df + f(a)Df = 2Df$$

y por lo tanto  $Df = 0$ .

2.  $D(fg) = f(a)Dg + g(a)Df = 0$ . □

**Proposición 1.2.4.** Sea  $a \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_a(\mathbb{R}^n), v \mapsto \frac{\partial}{\partial v} \Big|_a$  es un isomorfismo lineal. En particular,  $T_a(\mathbb{R}^n)$  tiene dimensión  $n$  y tiene como base a  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_a \right\}_{i=1}^n$ .

*Demostración.* Claramente la función definida es lineal. Escribamos  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .

$\Psi$  es inyectiva: sea  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\frac{\partial}{\partial v} \Big|_a = 0$ . Escribamos  $v = \sum_i v_i e_i$ , y sea  $x_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  la proyección sobre la  $j$ -ésima coordenada. Entonces usando el ejemplo 1.2.2,

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \Big|_a (x_j) = \sum_i v_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} (a) = v_j$$

para todo  $j$ . Por lo tanto  $v = 0$ , y  $\Psi$  es inyectiva.

$\Psi$  es sobreyectiva: sea  $D \in T_a(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $v_i = D(x_i)$ , donde  $x_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  es la proyección sobre la  $i$ -ésima coordenada. Sea  $v = \sum_i v_i e_i$ . Veamos que  $D = \frac{\partial}{\partial v} \Big|_a$ .

Sea  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Por el teorema de Taylor con resto (teorema A.58 de [Lee1]), existen  $r_1, \dots, r_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tales que  $r_i(a) = 0$  para todo  $i$  y

$$f(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (a)(x_i - a_i) + \sum_i r_i(x)(x_i - a_i)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Podemos ver la expresión anterior como una igualdad entre funciones, a la que le aplicamos  $D$ :

$$\begin{aligned} Df &= \overbrace{D(f(a))}^{=0} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(D(x_i) - \overbrace{D(a_i)}^{=0}) + \sum_i D(\overbrace{r_i(x)(x_i - a_i)}^{=0}) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)D(x_i) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i = \frac{\partial f}{\partial v}(a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde en (1.1) los primeros dos términos marcados son nulos por el lema 1.2.3.1, y el segundo por el lema 1.2.3.2, ya que  $r_i(a) = 0$  y  $(x_i - a_i)(a) = 0$ .

Por lo tanto  $D = \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_a$ , y  $\Psi$  es sobreyectiva.  $\square$

*Observación 1.2.5.* No es difícil probar también que si  $V$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita, entonces  $T_a(V) \simeq V$ .

**Definición 1.2.6.** Sea  $M$  una variedad y  $p \in M$ . Una función  $D_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  es una *derivación en  $p$*  si es  $\mathbb{R}$ -lineal y satisface la regla de Leibniz:  $D_p(fg) = f(p)D_p g + g(p)D_p f$  para todo  $p \in M$ .

El  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de todas las derivaciones de  $M$  en  $p$  se llama *espacio tangente a  $p$*  en  $M$ , y lo denotamos por  $T_p M$ .

*Ejemplo 1.2.7.* En el caso particular  $M = \mathbb{R}^n$  con la estructura diferenciable usual, la proposición 1.2.4 muestra que  $T_a(M) \simeq \mathbb{R}^n$ .

*Observación 1.2.8.* El lema 1.2.3 se adapta *mutatis mutandis* a un punto  $p \in M$  y  $D_p \in T_p M$ .

*Observación 1.2.9.* Los resultados del capítulo 4 de la Parte I valen en variedades abstractas. Las referencias que dimos al libro [Lee1] hacen las demostraciones en este contexto, de hecho. Utilizaremos entonces estos resultados sin reparos.

Veamos que el espacio tangente a una variedad en un punto es un concepto puramente local.

**Proposición 1.2.10.** *Sea  $M$  una variedad,  $p \in M$  y  $D \in T_p M$ . Si  $f, g \in C^\infty(M)$  son tales que existe  $U \subset M$  entorno abierto de  $p$  tal que  $f|_U = g|_U$ , entonces  $Df = Dg$ .*

*Demostración.* Sea  $h = f - g$ . Por linealidad de  $D$ , basta ver que  $Dh = 0$ .

Por el teorema 4.0.15 de la Parte I, existe una función chichón  $\rho \in C^\infty(M)$  con  $\rho|_{\text{sop}(h)} = 1$ ,  $\rho|_{\{p\}} = 0$ . Por lo tanto  $\rho h = h$ . Como  $h(p) = \rho(p) = 0$ , la observación 1.2.8 nos da que  $0 = D(\rho h) = Dh$ , terminando la demostración.  $\square$



## 1.3. Diferencial de un mapa entre variedades

**Definición 1.3.1.** Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable entre variedades, y sea  $p \in M$ . Definimos el *diferencial* de  $f$  en  $p$  como

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad df_p(D)(\phi) = D(\phi \circ f) \text{ para todo } \phi \in C^\infty(N)$$

Para ver que el diferencial está bien definido, debemos verificar que  $df_p(D) \in T_{f(p)} N$  para todo  $D \in T_p M$ . Claramente es  $\mathbb{R}$ -lineal, y

$$\begin{aligned} df_p(D)(\phi\psi) &= D(\phi\psi \circ f) = D((\phi \circ f)(\psi \circ f)) \\ &= \phi(f(p))D(\psi \circ f) + \psi(f(p))D(\phi \circ f) \\ &= \phi(f(p))df_p(\psi) + \psi(f(p))df_p(\phi) \end{aligned}$$

para todo  $\phi, \psi \in C^\infty(N)$ , luego  $df_p(D)$  satisface la regla de Leibniz y por lo tanto es una derivación en  $f(p)$ .

*Observación 1.3.2.* Sea  $M$  una variedad y  $p \in M$ . Si  $f \in C^\infty(M)$ , entonces  $df_p(v) \in T_{f(p)} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  para todo  $v \in T_p M$ . La identificación  $T_{f(p)} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  está dada por el mapa  $D \mapsto D(\text{id}_{\mathbb{R}})$ . Así que si hacemos un abuso de notación y denotamos por  $df_p(v)$  a  $df_p(v)(\text{id}_{\mathbb{R}}) \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $df_p(v) = df_p(v)(\text{id}_{\mathbb{R}}) = v(\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f) = v(f)$ . En conclusión,

$$df_p(v) = v(f) \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M), v \in T_p M$$

**Proposición 1.3.3.** Sean  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  mapas diferenciables entre variedades, y  $p \in M$ . Se satisfacen las siguientes propiedades:

1.  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es  $\mathbb{R}$ -lineal,
2. Regla de la cadena:  $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$ ,
3.  $d(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}$ ,
4. Si  $f$  es un difeomorfismo, entonces  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es un isomorfismo lineal, y  $df_p^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}$ .

*Demostración.* Ejercicio para el lector. □

*Observación 1.3.4.* Una *variedad punteada* es un par  $(M, p)$  donde  $M$  es una variedad y  $p \in M$ . Definimos una flecha  $(M, p) \rightarrow (N, q)$  como un mapa diferenciable  $M \rightarrow N$  tal que  $p \mapsto q$ . De esta forma, tenemos una categoría  $\text{Diff}_*$  de variedades punteadas.

La proposición anterior dice que hay un functor  $\text{Diff}_* \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}}$ , que manda  $(M, p)$  en  $T_p M$ , y que manda  $f : M \rightarrow N$  en  $df_p : T_p M \rightarrow T_q N$ .

**Proposición 1.3.5.** *Sea  $M$  una variedad,  $U \subset M$  un abierto e  $i : U \rightarrow M$  la inclusión. Para todo  $p \in U$  el diferencial  $di_p : T_p U \rightarrow T_p M$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $B \subset M$  un entorno abierto de  $p$  tal que  $\bar{B} \subset U$ .

$di_p$  es inyectivo: sea  $D \in T_p U$  tal que  $di_p(D) = 0$ . Sea  $f \in C^\infty(U)$ . Por el lema de extensión, existe  $\tilde{f} \in C^\infty(M)$  tal que  $\tilde{f}|_{\bar{B}} = f|_{\bar{B}}$ . Por la proposición 1.2.10, tenemos

$$Df = D(\tilde{f}|_U) = D(\tilde{f} \circ i) = di_p(D)(\tilde{f}) = 0$$

y por lo tanto  $D = 0$ .

$di_p$  es sobreyectivo: sea  $E \in T_p M$ . Definimos  $D \in C^\infty(U)$  como  $Df = E\tilde{f}$  donde  $\tilde{f}$  es cualquier extensión de  $f$  a  $M$  tal que  $\tilde{f}|_{\bar{B}} = f|_{\bar{B}}$  (usamos el lema de extensión de nuevo). Por la proposición 1.2.10, esta definición no depende de la extensión considerada. Además,  $D$  es claramente una derivación. Ahora bien,

$$Eg = E(\tilde{g}|_U) = E(\widetilde{g \circ i}) = D(g \circ i) = di_p(D)(g)$$

para todo  $g \in C^\infty(M)$ , y por lo tanto  $E = di_p(D)$ , probando que  $di_p$  es sobreyectivo y terminando la demostración.  $\square$

Tenemos entonces una manera canónica de identificar  $T_p U$  con  $T_p M$ . Consideraremos pues que  $T_p U = T_p M$ .

**Proposición 1.3.6** (Teorema de la función inversa). *Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable entre variedades y sea  $p \in M$ . Entonces  $f$  es un difeomorfismo local en  $p \in M$  si y sólo si  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es un isomorfismo lineal.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es un difeomorfismo local en  $p \in M$ . Existe entonces  $U \subset M$  un entorno abierto de  $p$  tal que  $f(U) \subset N$  es abierto y  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  es un difeomorfismo. Por la proposición 1.3.3.4, tenemos que  $d(f|_U)_p : T_p U \rightarrow T_{f(p)} f(U)$  es un isomorfismo lineal. Por lo que acabamos de probar, tenemos que  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es un isomorfismo lineal.

Recíprocamente, supongamos que  $df_p$  es un isomorfismo lineal. Tomando coordenadas en  $M$  y  $N$ , le aplicamos el teorema de la función inversa a la representación en coordenadas de  $f$  y concluimos el resultado.  $\square$

Terminamos la sección definiendo la derivada de una curva en un punto.

**Definición 1.3.7.** Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  una curva (i.e.  $\alpha$  es una función diferenciable). Para todo  $t \in [a, b]$  definimos  $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} M$  como  $\dot{\alpha}(t) = d\gamma_t(1)$ .

### 1.3.1. Cálculos en coordenadas

Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización de una  $n$ -variedad  $M$  tal que  $\varphi(u) = p$ . En particular,  $\varphi$  es un difeomorfismo sobre su imagen, y por tanto  $d\varphi_u : T_u(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_pM$  es un isomorfismo lineal.

Como  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_u \right\}_{i=1}^n$  es una base de  $T_u(\mathbb{R}^n)$  (proposición 1.2.4), entonces

$$\text{una base de } T_pM \text{ es } \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n, \text{ donde } \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p := d\varphi_u \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_u \right) \quad (1.2)$$

y en particular  $\dim T_pM = n$ . Si  $D \in T_pM$ , entonces  $D$  se escribe de forma única como  $D = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ , y de hecho  $a_i = D(x_i)$ , donde  $x_i \in C^\infty(\varphi(U))$  es  $x_i = \varphi^{-1} \circ x_i$ , este último  $x_i \in C^\infty(U)$  siendo la proyección sobre la  $i$ -ésima coordenada. La función  $x_i \in C^\infty(\varphi(U))$  se llama la  $i$ -ésima función coordenada de  $\varphi$ .

Decimos que la base de  $T_pM$  de (1.2) es la *base inducida por  $\varphi$* .

Si  $f \in C^\infty(\varphi(U))$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p := \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) = d\varphi_u \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_u \right) (f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_u (f \circ \varphi) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_i} (u)$$

Es decir,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_i} (u)}$$

O sea, el operador  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  deriva la representación en  $\varphi$ -coordenadas de  $f$  respecto de  $x_i$  y la evalúa en  $u = \varphi^{-1}(p)$ .

Veamos ahora que si  $f$  es un mapa entre abiertos del espacio euclídeo, entonces su diferencial “nuevo” coincide con el “clásico”.

**Proposición 1.3.8.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  abiertos. Sea  $f : U \rightarrow V$  un mapa diferenciable. Entonces si  $df_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R}^m)$  es el diferencial de la definición 1.3.1 y  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el diferencial usual, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_p(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)}(\mathbb{R}^m) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{df_p} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

donde los mapas verticales son los isomorfismos de la proposición 1.2.4.

### 1.3 Diferencial de un mapa entre variedades

*Demostración.* Calculamos  $df_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R}^m)$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_i$  de  $T_p(\mathbb{R}^n)$ . Si  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ , entonces

$$\begin{aligned} df_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (\phi) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (\phi \circ f) \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi}{\partial y_j} (f(p)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (p) \\ &= \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} \right) (\phi) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} \quad (1.3)$$

En conclusión, la matriz asociada a  $df_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R}^m)$  es la matriz jacobiana de  $f$ , probando el teorema.  $\square$

**Proposición 1.3.9.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad,  $N$  una  $m$ -variedad,  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable,  $p \in M$ , y sean  $\varphi : U \rightarrow M$ ,  $\psi : V \rightarrow N$  parametrizaciones tales que  $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ . Sea  $\tilde{f} : U \rightarrow V$  la representación en coordenadas de  $f$ . Entonces si  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_i$  y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} \right\}_j$  son las bases inducidas por las parametrizaciones  $\varphi$  y  $\psi$  en  $T_p M$  y  $T_{f(p)} N$  respectivamente,*

$$\boxed{df_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i} (p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}} \quad (1.4)$$

*Demostración.* Supongamos que  $\varphi(u) = p$  y  $\psi(u') = f(p)$ . Tenemos los siguientes dos cuadrados conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{\tilde{f}} & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)} N \\ d\varphi_u \uparrow & & \uparrow d\psi_{u'} \\ T_u(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{d\tilde{f}_u} & T_{\tilde{f}(u)}(\mathbb{R}^m) \end{array}$$

donde el segundo se obtiene a partir del primero gracias a la regla de la cadena. Ahora

calculamos:

$$\begin{aligned}
 df_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) &= df_p \left( d\varphi_u \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_u \right) \right) = d\psi_{u'} \left( d\tilde{f}_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_u \right) \right) \\
 &= d\psi_{u'} \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{\tilde{f}(p)} \right) \quad \text{usando (1.3)} \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} \quad \square
 \end{aligned}$$

Veamos ahora cómo se relacionan dos bases de  $T_p M$  inducidas por parametrizaciones diferentes.

**Proposición 1.3.10.** *Sea  $M$  una variedad,  $p \in M$ , y  $\varphi : U \rightarrow M, \psi : V \rightarrow M$  parametrizaciones tales que  $\varphi(u) = p = \psi(u')$ . Sean  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_i$  y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \Big|_p \right\}_i$  las bases inducidas por las parametrizaciones  $\varphi$  y  $\psi$  respectivamente. Entonces*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \Big|_p = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j}(u) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p} \quad (1.5)$$

donde en la expresión  $\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j}$  debe entenderse que  $x_i \in C^\infty(\varphi(U))$  es la  $i$ -ésima función coordenada de  $\varphi$ .

Por lo tanto si  $v = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_j \tilde{a}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \Big|_p \in T_p M$ , obtenemos

$$\tilde{a}_j = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j}(u) a_i \quad (1.6)$$

*Demostración.* Ejercicio para el lector. □

## 1.4. Fibrado tangente

**Definición 1.4.1.** Sea  $M$  una variedad. El *fibrado tangente* de  $M$  es

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$$

La *proyección* del fibrado tangente es el mapa  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $\pi(p, v) := p$ .

Si  $f : M \rightarrow N$  es un mapa diferenciable entre variedades, el *diferencial total* es el mapa  $df : TM \rightarrow TN$  definido como  $df(p, v) = (f(p), df_p(v))$ .

**Proposición 1.4.2.** Si  $M$  es una  $n$ -variedad, entonces  $TM$  tiene una estructura de  $2n$ -variedad de manera que  $\pi$  es diferenciable y si  $f : M \rightarrow N$  es un mapa diferenciable entre variedades, entonces  $df : TM \rightarrow TN$  también lo es.

*Demostración.* Usaremos el lema 1.1.11. Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización de  $M$ . Definimos  $\widehat{\varphi} : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ , una parametrización putativa, de la siguiente manera. Sea  $(u, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ . Escribimos  $v = \sum_i v_i e_i$ . Definimos entonces

$$\widehat{\varphi}(u, v) = \left( \varphi(u), \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(u)} \right) \quad (1.7)$$

Observar que  $\widehat{\varphi}$  es biyectiva sobre su imagen, pues tiene inversa dada por el mapa  $\widehat{\varphi}(U \times \mathbb{R}^n) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ ,  $\left( p, \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) \mapsto \left( \varphi^{-1}(p), \sum_i a_i e_i \right)$ .

Sea  $\psi : V \rightarrow M$  otra parametrización de  $M$ ; consideraremos  $\widehat{\psi} : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ . Sea  $W = \widehat{\varphi}(U) \cap \widehat{\psi}(V) \subset TM$ . Sea  $(u, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ . Si  $\varphi(u) = \psi(u')$ , tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}^{-1} \circ \widehat{\varphi}(u, v) &= \widehat{\psi}^{-1} \left( \varphi(u), \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(u)} \right) \\ &= \widehat{\psi}^{-1} \left( \varphi(u), \sum_{i,j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}(u') v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(u)} \right) \quad \text{usando (1.6)} \\ &= \left( u', \sum_{i,j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}(u') v_j e_i \right) \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\widehat{\psi}^{-1} \circ \widehat{\varphi}$  es diferenciable. Los otros ítems del lema 1.1.11 se verifican rápidamente. Esto prueba que  $TM$  es una  $2n$ -variedad diferenciable.

Para probar que  $\pi$  es diferenciable, basta observar que su representación en las coordenadas de  $\varphi$  y  $\widehat{\varphi}$  es el mapa  $\tilde{\pi} : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ ,  $\tilde{\pi}(u, v) = u$  que es diferenciable.

Para ver que  $df$  es diferenciable, basta observar que su representación en las coordenadas que recién describimos para  $TM$  y para  $TN$  es diferenciable, lo cual se hace de manera sencilla gracias a la expresión (1.3).  $\square$

*Observación 1.4.3.* La ecuación (1.7) que define una parametrización de  $TM$  termina quedando así:

$$\widehat{\varphi}(u, v) = (\varphi(u), d\varphi_u(v)) \quad (1.8)$$

Decimos que  $\widehat{\varphi}$  es la parametrización de  $TM$  inducida por  $\varphi$ .

**Proposición 1.4.4.** Sean  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  mapas diferenciables entre variedades. Se satisfacen las siguientes propiedades:

1.  $d(g \circ f) = dg \circ df$ ,
2.  $d(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$ ,
3. si  $f$  es un difeomorfismo, entonces  $df : TM \rightarrow TN$  también lo es, y  $(df)^{-1} = d(f^{-1})$ .

*Demostración.* Se deduce automáticamente de la proposición 1.3.3. □

*Observación 1.4.5.* Sea Diff la categoría de variedades diferenciables. Tenemos entonces definido un *functor tangente*  $\text{Diff} \rightarrow \text{Diff}$ , tal que a  $f : M \rightarrow N$  le asocia  $df : TM \rightarrow TN$ .

## 1.5. Campos de vectores

**Definición 1.5.1.** Sea  $M$  una variedad. Un *campo de vectores (diferenciable)* en  $M$  es una función (diferenciable)  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $\pi \circ X = \text{id}_M$ .

Denotaremos por  $\mathcal{X}(M)$  al  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de los campos diferenciables en  $M$ , con las operaciones punto a punto.

*Observación 1.5.2.* ■ La definición anterior dice que un campo de vectores es una “sección diferenciable del fibrado tangente”. Observar que si  $p \in M$ , entonces  $X(p) = (p, v)$  para cierto  $v \in T_p M$  por la condición  $\pi \circ X = \text{id}_M$ . Abusaremos la notación e identificaremos  $X(p)$  con  $v$ , i.e. supondremos  $X(p) \in T_p M$ .

- $\mathcal{X}(M)$  es un  $C^\infty(M)$ -módulo, con la acción  $(fX)(p) = f(p)X(p)$  para todo  $p \in M$ .

**Proposición 1.5.3.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad y  $X : M \rightarrow TM$  un campo de vectores. Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización y sea  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_i$  la base de  $T_p M$  inducida por  $\varphi$ , para todo  $p \in \varphi(U)$ . Dado  $p \in \varphi(U)$  escribamos  $X(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  donde  $a_i : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones.

Entonces  $X|_{\varphi(U)}$  es diferenciable si y sólo si  $a_i \in C^\infty(\varphi(U))$  para todo  $i$ .

*Demostración.* La parametrización  $\varphi$  induce una parametrización  $\hat{\varphi} : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$  de  $TM$  definida en (1.8). La representación de  $X|_{\varphi(U)}$  en las coordenadas de  $\varphi$  y de  $\hat{\varphi}$  es entonces  $\hat{X} : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ , definida así:

$$\hat{X}(u) = \left( u, \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(u)) e_i \right)$$

donde  $\{e_i\}_i$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Claramente  $\hat{X}$  es diferenciable si y sólo si  $a_i$  es diferenciable para todo  $i$ , terminando la demostración. □

A partir de ahora, por “campo de vectores” entenderemos “campo de vectores diferenciable”.

Sea  $M$  una variedad,  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización de  $M$  y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_i$  la base de  $T_p M$  inducida por  $\varphi$ , para todo  $p \in \varphi(U)$ . Entonces la asignación  $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  es un campo de vectores en  $\varphi(U)$  para todo  $i$ , que llamamos  $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(\varphi(U))$ .

**Definición 1.5.4.** Decimos que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_i$  es el *referencial local asociado a la parametrización*  $\varphi$ . A menudo lo denotaremos sencillamente por  $\{e_i\}_i$ .

*Observación 1.5.5.* ■ Si  $X \in \mathcal{X}(M)$ , podemos escribir  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  donde  $a_i \in C^\infty(\varphi(U))$ . Decimos que  $a_i$  son las *funciones componentes* de  $X$  para la parametrización  $\varphi$ .

- En general, un *referencial local* en una  $n$ -variedad  $M$  es una  $n$ -upla  $\{E_i\}_{i=1}^n$  de campos de vectores definidos en un abierto  $V \subset M$  de tal forma que  $\{E_i(p)\}_{i=1}^n \subset T_p M$  es una base para todo  $p \in V$ .

Los campos de vectores operan sobre las funciones:

**Definición 1.5.6.** Sea  $M$  una variedad,  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,  $V \subset M$  abierto y  $f \in C^\infty(V)$ . Definimos  $X(f) = Xf : V \rightarrow \mathbb{R}$  como  $(Xf)(p) = X(p)(f)$ .

*Observación 1.5.7.* 1. La función  $Xf$  debe entenderse como la derivada de  $f$  en la dirección de  $X$ , pues por la observación 1.3.2,  $df_p(X(p)) = X(p)(f) = (Xf)(p)$ . Observar que entonces  $Xf(p)$  solo usa de  $X$  el valor  $X(p)$  y depende de los valores de  $f$  en apenas un entorno de  $p$ .

2. En particular, usando el lema 1.2.3.1 y la observación 1.3.2 deducimos que si  $f$  es una función constante, entonces  $Xf = 0$ .
3. Si  $f \in C^\infty(M)$ , no confundir  $Xf \in C^\infty(M)$  con  $fX \in \mathcal{X}(M)$ .

**Lema 1.5.8.** En el contexto de la definición 1.5.6, se tiene que  $Xf \in C^\infty(V)$ .

*Demostración.* Sean  $p \in V$  y  $\varphi : U \rightarrow M$  parametrización tal que  $\varphi(u) = p$ . Entonces si  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  con  $a_i \in C^\infty(\varphi(U))$ ,

$$\begin{aligned} Xf(p) &= X(p)(f) = \left( \sum_i a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (f) \\ &= \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_i a_i(\varphi(u)) \frac{\partial}{\partial u_i} (f \circ \varphi)(u) \end{aligned}$$



y por lo tanto  $Xf$  es diferenciable.  $\square$

*Ejemplo 1.5.9.* En particular, si  $\varphi : U \rightarrow M$  es una parametrización,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_i$  es el referencial local asociado y  $f \in C^\infty(\varphi(U))$  entonces  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^\infty(\varphi(U))$  para todo  $i$ .

*Observación 1.5.10.* 1. Si  $X \in \mathcal{X}(M)$  y  $f, g \in C^\infty(M)$ , entonces  $f(Xg) = (fX)g$ .  
Escribimos entonces sencillamente  $fXg$ .

2. Todo  $X \in \mathcal{X}(M)$  define un mapa  $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ,  $f \mapsto Xf$  que es  $\mathbb{R}$ -lineal, y además satisface la siguiente regla de Leibniz:

$$X(fg) = fXg + gXf$$

Un mapa  $\mathbb{R}$ -lineal  $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  que cumple esta regla de Leibniz se llama *derivación*; se puede probar (ver [Lee1] p. 87) que las derivaciones de  $C^\infty(M)$  están en correspondencia con los campos de vectores de  $M$ .

El siguiente lema nos será de utilidad más adelante.

**Lema 1.5.11.** Sean  $M$  una variedad,  $p \in M$ ,  $v \in T_pM$ . Existe un campo de vectores  $X \in \mathcal{X}(M)$  tal que  $X(p) = v$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización y  $\{e_i\}_i$  su referencial local asociado. Escribamos  $v = \sum_i v_i e_i(p)$ . Sea  $\rho : M \rightarrow [0, 1]$  una función chichón tal que  $\rho|_{\{p\}} = 1$  y  $\rho|_{M \setminus \varphi(U)} = 0$ . Definimos  $X$  de la siguiente manera:

$$X(q) = \begin{cases} \rho(q) \sum_i v_i e_i(q) & \text{si } q \in \varphi(U) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces  $X \in \mathcal{X}(M)$  y  $X(p) = v$ .  $\square$

### 1.5.1. Corchete de Lie

Sean  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ . Entonces  $Xf \in C^\infty(M)$ , de manera que podemos considerar  $YXf := Y(Xf) \in C^\infty(M)$ . Sin embargo, la operación  $f \mapsto YXf$  no cumple la regla de Leibniz en general, y por lo tanto por la observación 1.5.10.2 no define en general un campo de vectores. Un contraejemplo sencillo se obtiene en  $\mathbb{R}^2$ , considerando  $X = \frac{\partial}{\partial x}$  e  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ .

Sin embargo,  $XY - YX$  sí resultará un campo de vectores.

**Proposición 1.5.12.** Sea  $M$  una variedad y  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Entonces  $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$ , donde

$$[X, Y](p)(f) := X(p)(Yf) - Y(p)(Xf)$$

para todo  $p \in M$ ,  $f \in C^\infty(M)$ .

Explícitamente, si  $\varphi : U \rightarrow M$  es una parametrización,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_i$  es el referencial local asociado y  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y|_{\varphi(U)} = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ , entonces la expresión en coordenadas locales de  $[X, Y]$  es

$$\boxed{[X, Y]|_{\varphi(U)} = \sum_j \sum_i \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \left( X(b_k) - Y(a_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}} \quad (1.9)$$

*Demostración.* Sean  $p \in \varphi(U)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ . Calculemos:

$$\begin{aligned} [X, Y](p)(f) &= \sum_i a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (Yf) - \sum_j b_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p (Xf) \\ &= \sum_i a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \left( \sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \sum_j b_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \left( \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_i a_i(p) \sum_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) + \sum_i a_i(p) \sum_j b_j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \\ &\quad - \sum_j b_j(p) \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \sum_j b_j(p) \sum_i a_i(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) \\ &= \sum_i a_i(p) \sum_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) - \sum_i b_i(p) \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \\ &= \left( \sum_j \sum_i \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (p)(f) \\ &= \sum_k \left( \left( X(b_k) - Y(a_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) (p)(f) \end{aligned}$$

Como  $X(b_k), Y(a_k) \in C^\infty(M)$  para todo  $k$  por el lema 1.5.8, entonces  $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$  por la proposición 1.5.3, cubriendo  $M$  por entornos coordenados.  $\square$

*Observación 1.5.13.* En la demostración de la proposición anterior, pudimos cancelar dos sumandos en virtud de la igualdad de las derivadas cruzadas. Esto requeriría un poco más de formalidad. Queda como ejercicio para el lector formalizar la expresión  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  para  $f \in C^\infty(M)$ , y probar la igualdad de las derivadas cruzadas en este contexto.

**Definición 1.5.14.** El campo  $[X, Y]$  de la proposición anterior se llama el *corchete de Lie* del campo  $X$  con el campo  $Y$ .

**Proposición 1.5.15.** El corchete de Lie  $[-, -] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  satisface las siguientes propiedades:

1.  $\mathbb{R}$ -bilinealidad,
2. antisimetría:  $[X, Y] = -[Y, X]$  para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,
3. identidad de Jacobi: para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ , se cumple

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

4. para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$ , se cumple

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X$$

*Demostración.* Ejercicio a cargo del lector. □

*Observación 1.5.16.* Las propiedades 1, 2 y 3 de la proposición anterior nos dicen que  $\mathcal{X}(M)$  es un álgebra de Lie con este corchete de campos de vectores que hemos definido.

La siguiente proposición es esencialmente una reformulación del hecho que las derivadas cruzadas son iguales.

**Proposición 1.5.17.** *Sea  $M$  una variedad,  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización y  $\{e_i\}_i$  el referencial local asociado. Entonces*

$$[e_i, e_j] = 0$$

*Demostración.* Se deduce automáticamente de la fórmula (1.9) para el corchete de Lie en coordenadas locales, observando que las funciones componentes de  $e_k$  para  $\varphi$  son constantes para todo  $k$ , y aplicando la observación 1.5.7.2. □

*Ejercicio 1.5.18.* Sea  $M$  una variedad. Si  $\omega \in \Omega^1(M)$  y  $X \in \mathcal{X}(M)$ , definimos  $\omega(X) \in \Omega^1(M)$  como  $\omega(X)(p)(v) = \omega(X(p))(v)$ .

1. Probar que si  $\omega \in \Omega^1(M)$  y  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  entonces

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (1.10)$$

2. Sea  $\{E_i\}$  un referencial local en  $M$  y  $\{\epsilon^i\}$  su co-referencial local asociado; esto es,  $\{\epsilon^i(p)\} \subset (T_p M)^*$  es la base dual de  $\{E_i(p)\} \subset T_p M$  para todo  $p \in M$ . Supongamos que  $b_{jk}^i, c_{jk}^i$  son las funciones diferenciables que satisfacen que

$$d\epsilon^i = \sum_{j < k} b_{jk}^i \epsilon^j \wedge \epsilon^k, \quad [E_j, E_k] = c_{jk}^i E_i$$

Entonces  $b_{jk}^i = -c_{jk}^i$ .

Esto nos dice que la derivada exterior es en algún sentido dual al corchete de Lie; en particular, muestra que si conocemos los corchetes de Lie de los campos de un referencial local, podemos calcular las derivadas exteriores de las 1-formas de su co-referencial local asociado, y viceversa.

La ecuación (1.10) se generaliza a  $k$ -formas (ver proposición 14.32 de [Lee1b]). Su expresión es considerablemente más complicada, pero permite dar una definición libre de coordenadas de la derivada exterior (cf. la discusión al inicio de la página 372 de [Lee1b]).

## Capítulo 2

### Métricas riemannianas

Una métrica riemanniana en una variedad  $M$  es una asignación de un producto interno a cada  $T_p M$  que varía diferenciablemente con el punto  $p \in M$ . Observar que esta definición es formalmente similar tanto a la de campo de vectores (asignación diferenciable de un vector en  $T_p M$  a cada  $p \in M$ ) y a la de forma diferencial (asignación diferenciable de una forma multilineal alternada en  $T_p M$  a cada  $p \in M$ ). Como hicieramos con campos (y como podríamos haber hecho con las formas diferenciales), podemos formalizar esto de la siguiente forma. Sea  $S^2 M$  el fibrado de las formas bilineales simétricas, i.e.

$$S^2 M := \bigsqcup_{p \in M} S^2(T_p M) = \{(p, g) : p \in M, g \in S^2(T_p M)\}$$

donde si  $V$  es un espacio vectorial, entonces  $S^2(V)$  es el espacio vectorial de las formas bilineales simétricas en  $V$ .

A  $S^2 M$  se le puede dar una estructura diferenciable tal que  $\pi : S^2 M \rightarrow M$ ,  $\pi(p, g) := p$  sea diferenciable, como ya hicimos con el fibrado tangente. Entonces una métrica riemanniana se puede definir como sección diferenciable  $g$  de este fibrado tal que  $g_p \in S^2(T_p M)$  sea además definida positiva para todo  $p \in M$ . Es decir,  $g : M \rightarrow S^2 M$  es una función diferenciable tal que  $\pi \circ g = \text{id}_M$  y si  $g(p) =: (p, g_p)$ , entonces  $g_p \in S^2(T_p M)$  es un producto interno.

Esta definición tiene la ventaja de ser muy compacta, pero como en realidad no la utilizaremos, daremos directamente la definición en coordenadas. Queda como ejercicio para el lector interesado ver que son equivalentes.

**Definición 2.0.19.** Sea  $M$  una variedad. Dada una parametrización  $\varphi : U \rightarrow M$ , consideremos  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_i$ , la base de  $T_p M$  inducida por  $\varphi$ . Llamémosle  $\{dx_i|_p\}$  a su base dual en  $(T_p M)^*$ <sup>1</sup>, de manera que  $\{dx_i|_p \otimes dx_j|_p\}$  es una base de  $\mathcal{T}^2(T_p M^*)$ , el espacio vectorial de las formas bilineales en  $T_p M$ .

---

<sup>1</sup>Siempre le llamaremos así a la base dual de la base inducida por una parametrización dada en  $T_p M$ , a menos que indiquemos lo contrario.

Una *métrica riemanniana* es una función  $g$  que asigna a cada punto  $p \in M$  un producto interno  $g_p$  en  $T_p M$  tal que para toda parametrización  $\varphi$ , si

$$g_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) dx_i|_p \otimes dx_j|_p \quad (2.1)$$

para todo  $p \in \varphi(U)$  entonces  $g_{ij} \in C^\infty(\varphi(U))$  para todo  $i, j$ .

Decimos que las funciones  $g_{ij}$  de (2.1) son los *coeficientes de la métrica* en las coordenadas de  $\varphi$ .

Un par  $(M, g)$  donde  $M$  es una variedad y  $g$  es una métrica riemanniana, se llama una *variedad riemanniana*. Si no hay riesgo de confusión, sobreentenderemos  $g$  y diremos que  $M$  es una variedad riemanniana.

Escribiremos  $\langle v, w \rangle_p$  para designar a  $g_p(v, w)$ , o aun sencillamente  $\langle v, w \rangle$ .

*Ejercicio 2.0.20.* Probar que para determinar una métrica riemanniana en una variedad basta ver que los coeficientes de la métrica son diferenciables para apenas un atlas de  $M$ .

*Observación 2.0.21.* 1. Para todo  $p \in \varphi(U)$ , la matriz  $(g_{ij}(p))_{i,j}$  es definida positiva, i.e. es simétrica y la función  $[v, w] := v^t(g_{ij})w$  define un producto interno en  $T_p M$ , o equivalentemente, es simétrica y todos sus valores propios son positivos.

2.  $g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle$ . En efecto,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle = \sum_{k,s=1}^n g_{ks}(p) (dx_k|_p \otimes dx_s|_p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = g_{ij}(p)$$

Si  $V$  es un espacio vectorial y  $\omega \in V^*$ , escribiremos  $\omega^2 := \omega \otimes \omega \in \mathcal{F}^2(V^*)$ .

*Ejemplo 2.0.22.* La métrica estándar en  $\mathbb{R}^n$ : en las coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^n$ , definimos  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$  para todo  $i, j$  y todo  $p \in \mathbb{R}^n$ . Entonces si  $v, w \in \mathbb{R}^n = T_p(\mathbb{R}^n)$ , y  $v = \sum_i v_i e_i$ ,  $w = \sum_j w_j e_j$ :

$$g_p(v, w) = \sum_{k,s=1}^n \delta_{ks} (dx_k|_p \otimes dx_s|_p) \left( \sum_i v_i e_i, \sum_j w_j e_j \right) = \sum_{k=1}^n v_k w_k = \langle v, w \rangle$$

i.e. la métrica riemanniana definida por estos coeficientes define el producto interno usual en  $\mathbb{R}^n$ .

De esta forma, la métrica usual de  $\mathbb{R}^n$  es  $g = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2$ .

*Ejemplo 2.0.23.* Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular. Entonces  $M$  es una variedad riemanniana restringiendo a cada  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  el producto interno de  $\mathbb{R}^3$ . Los coeficientes de la métrica en las coordenadas de una parametrización  $\varphi$  son los coeficientes de la primera

forma fundamental. En efecto, si  $\varphi : U \rightarrow M$  es una parametrización con  $\varphi(u, v) = p$ , entonces

$$\begin{aligned} g_{11}(p) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \right\rangle = \left\langle d\varphi_{(u,v)} \left( \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(u,v)} \right), d\varphi_{(u,v)} \left( \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(u,v)} \right) \right\rangle \\ &= \langle \varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle =: E(u, v) \end{aligned}$$

Análogamente  $g_{12}(p) = F(u, v)$  y  $g_{22}(p) = G(u, v)$ , y por lo tanto

$$(g_{ij} \circ \varphi)_{i,j} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

**Observación 2.0.24.** Toda variedad  $M$  admite una métrica Riemanniana. En efecto, podemos cubrir  $M$  por entornos coordinados; en cada entorno coordinado podemos poner una métrica riemanniana transfiriendo la de  $\mathbb{R}^n$  a través de la parametrización; ahora juntamos todas estas en una métrica riemanniana para  $M$  usando una partición de la unidad subordinada al cubrimiento. Ver [Lee1b], proposición 13.3 para más detalles.

Otra manera menos elemental de probar este resultado es apelar al teorema de Whitney, encajando  $M$  en algún  $\mathbb{R}^k$  y restringiendo el producto interno de  $\mathbb{R}^k$  a cada uno de los  $T_p M$ ,  $p \in M$ .

Una métrica riemanniana en una variedad nos permite recuperar conceptos geométricos que no tenemos en una variedad abstracta a secas.

**Definición 2.0.25.** Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana.

- Si  $v \in T_p M$ , su *norma* es  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .
- Si  $v, w \in T_p M$  son dos vectores no nulos, su *ángulo* es el único  $\theta \in [0, \pi]$  que satisface  $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|}$ .
- Dos vectores  $v, w \in T_p M$  son *ortogonales* si  $\langle v, w \rangle = 0$ .
- Si  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es una curva diferenciable a trozos, su *longitud* es  $\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$ .

Como en Cálculo III, se prueba que la longitud es invariante por reparametrizaciones de la curva.

**Observación 2.0.26.** Se puede probar que si  $M$  es una variedad riemanniana conexa y definimos  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$d(p, q) = \inf \left\{ \ell(\alpha) : \alpha : [0, 1] \rightarrow M \text{ curva diferenciable a trozos, } \alpha(0) = p, \alpha(1) = q \right\}$$

entonces  $(M, d)$  es un espacio métrico, y  $d$  define la misma topología en  $M$  que la que tiene como variedad. Ver teorema 13.29 de [Lee1b].

Introduzcamos los isomorfismos de variedades riemannianas.

**Definición 2.0.27.** Sean  $M, N$  variedades riemannianas y  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable. Decimos que  $f$  es una *isometría* si es un difeomorfismo que cumple

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)} = \langle v, w \rangle_p$$

para todo  $p \in M$ ,  $v, w \in T_p M$ ; es decir, si es un difeomorfismo y  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es una isometría lineal para todo  $p \in M$ .

Decimos que  $f$  es una *isometría local* si es un difeomorfismo local tal que  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es una isometría lineal para todo  $p \in M$ .

**Observación 2.0.28.** Si  $f : M \rightarrow N$  es una isometría entre variedades riemannianas conexas, entonces es una isometría de espacios métricos, con la métrica de la observación 2.0.26.

Observar que la maquinaria de las formas diferenciales funciona igual en variedades abstractas. Si  $(M, g)$  es una  $n$ -variedad riemanniana orientada, existe una única forma  $dV \in \Omega^n(M)$ , llamada *forma de volumen*, que vale 1 en toda base ortonormal positiva de  $T_p M$  para todo  $p \in M$ . La demostración es la misma que la de Cálculo III; remitimos al lector a la proposición 15.29 de [Lee1b] si desea más detalles.

**Proposición 2.0.29.** Sea  $(M, g)$  una  $n$ -variedad riemanniana orientada,  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización compatible con la orientación y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_i$  el referencial local asociado. Entonces si  $dV \in \Omega^n(\varphi(U))$  es la forma de volumen de  $\varphi(U)$ ,

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})_{i,j}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

donde  $dx_i = \frac{\partial}{\partial x_i}^* \in \Omega^1(\varphi(U))$ .

*Demostración.* Sea  $p \in \varphi(U)$ . Como  $dV$  es una forma de grado máximo, entonces

$$dV = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

para cierta  $f \in C^\infty(\varphi(U))$ . Sea  $(e_1, \dots, e_n) \subset T_p M$  una base ortonormal positiva.

Escribamos  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_j a_{ij} e_j$ . Observar que  $\det((a_{ij})) > 0$  al estar ambas bases orientadas positivamente. Ahora calculamos. Por un lado,

$$dV(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right) = f(p) (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right) = f(p)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} dV(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right) &= dV(p) \left( \sum_j a_{1j} e_j, \dots, \sum_j a_{nj} e_j \right) \\ &= \det((a_{ij})) dV(p)(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det((a_{ij})) \end{aligned}$$



Conseguimos entonces que  $f(p) = \det((a_{ij})) > 0$ . Seguimos calculando:

$$g_{ik}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \right\rangle = \left\langle \sum_j a_{ij} e_j, \sum_r a_{kr} e_r \right\rangle = \sum_j a_{ij} a_{kj}$$

que es el coeficiente  $(i, k)$  de la matriz  $A^t A$ , donde  $A = (a_{ij})$ . Por lo tanto

$$\det((g_{ij}(p))) = \det(A^t A) = (\det A)^2 = (f(p))^2$$

de donde se deduce la tesis tomando raíz cuadrada, ya que  $f(p) > 0$ .  $\square$

*Ejemplo 2.0.30.* Si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular orientada, la proposición anterior junto con el resultado del ejemplo 2.0.23 permite recuperar la siguiente fórmula para la forma de área

$$dA = \sqrt{EG - F^2} dx \wedge dy$$

que ya conocíamos de Cálculo III.

*Ejemplo 2.0.31.* Sea  $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  el semiplano superior estricto. La *métrica hiperbólica*, o *métrica de Poincaré* en  $\mathbb{H}$  es

$$g_{(x,y)} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

De esta forma, en cada punto  $(x, y)$  esta métrica es la usual modificada por un factor escalar  $\frac{1}{y^2}$ .

En el apéndice consideraremos este ejemplo con más detalle.

*Ejercicio 2.0.32.* Sea  $M$  una variedad riemanniana con una acción por difeomorfismos de un grupo  $G$ , que es propiamente discontinua y tal que  $M/G$  es una variedad (cf. ejercicio 1.1.18).

1. Decimos que la acción de  $G$  en  $M$  es *por isometrías* si para todo  $g \in G$  el mapa  $M \rightarrow M$ ,  $x \mapsto g \cdot x$  es una isometría.

Probar que si  $G$  actúa por isometrías en  $M$  entonces  $M/G$  admite una métrica riemanniana de modo que  $\pi : M \rightarrow M/G$  es una isometría local.

2. Dotar al toro abstracto  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  de una métrica localmente isométrica a  $\mathbb{R}^n$ . El toro con esta métrica se denomina *toro plano*.

# Capítulo 3

## Conexiones

Queremos definir el concepto de “geodésica” en una variedad riemanniana. Las geodésicas serían curvas que localmente minimizarían la distancia, generalizando entonces las rectas en el plano.

En  $\mathbb{R}^n$ , una curva es una recta si y sólo si puede ser reparametrizada a una curva con aceleración cero. Queremos definir una geodésica en una variedad  $M$  como una curva en  $M$  tal que su aceleración “vista desde  $M$ ” es cero. Por ejemplo, si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ , podemos definir una geodésica en  $M$  como una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que la proyección ortogonal de  $\ddot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$  a  $T_{\gamma(t)}M$ . Pero esta “aceleración tangencial” no tiene sentido en una variedad riemanniana abstracta.

El problema es que  $\ddot{\gamma}(t_0)$  tal y como lo conocemos es  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{\gamma}(t_0+h) - \dot{\gamma}(t_0)}{h}$ , lo cual no tiene sentido en abstracto, pues  $\dot{\gamma}(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$  y  $\dot{\gamma}(t_0+h) \in T_{\gamma(t_0+h)}M$ , y no sabemos restar vectores de dos espacios tangentes diferentes.

Nos hace falta una *conexión* en la variedad: una pieza adicional que permite derivar campos de vectores a lo largo de curvas, y por lo tanto derivar  $\dot{\gamma}$  a lo largo de  $\gamma$ , “conectando” los puntos de  $\gamma$ .

Definiremos una conexión en una variedad abstracta, y luego veremos que en toda variedad riemanniana podemos definir una conexión de manera canónica.

**Definición 3.0.33.** Una *conexión afín* (o simplemente *conexión*) en una variedad  $M$  es una función

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

tal que:

1. es  $\mathbb{R}$ -bilineal,
2. es  $C^\infty(M)$ -lineal en la primera variable, i.e.  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$  para todo  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,
3. satisface la regla de Leibniz en la segunda variable:  $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$  para todo  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

Podemos pensar que  $\nabla_X Y$  es como una derivada de  $Y$  a lo largo de  $X$ .

Veamos ahora cómo luce la conexión en coordenadas locales.

**Definición 3.0.34.** Sea  $M$  una variedad con una conexión  $\nabla$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización, y sea  $\{e_i\}_i$  el referencial local asociado. Definimos los *símbolos de Christoffel* de  $\nabla$  asociados a la parametrización  $\varphi$  como las funciones  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\varphi(U))$  que satisfacen

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k \quad (3.1)$$

**Proposición 3.0.35.** Sea  $M$  una variedad con una conexión  $\nabla$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización, y sea  $\{e_i\}_i$  el referencial local asociado. Sean  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

Escribamos  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i e_i, Y|_{\varphi(U)} = \sum_j b_j e_j$  con  $a_i, b_j \in C^\infty(\varphi(U))$ . Entonces

$$\boxed{(\nabla_X Y)|_{\varphi(U)} = \sum_k \left( X(b_k) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k a_i b_j \right) e_k} \quad (3.2)$$

Por lo tanto, para determinar una conexión en  $\varphi(U)$  basta determinar los símbolos de Christoffel.

*Demostración.* Calculamos, usando las propiedades de la conexión:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i a_i e_i} Y = \sum_i a_i \nabla_{e_i} Y = \sum_i a_i \nabla_{e_i} \left( \sum_j b_j e_j \right) \\ &= \sum_i a_i \sum_j \nabla_{e_i} (b_j e_j) \\ &= \sum_i a_i \sum_j (e_i(b_j) + b_j \nabla_{e_i} e_j) \\ &= \sum_i \sum_j a_i e_i(b_j) e_j + \sum_i \sum_j a_i b_j \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k \\ &= \sum_j \left( \sum_i a_i e_i(b_j) \right) e_j + \sum_i \sum_j a_i b_j \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k \\ &= \sum_j X(b_j) e_j + \sum_i \sum_j a_i b_j \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k \\ &= \sum_k X(b_k) e_k + \sum_k \left( \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k a_i b_j \right) e_k \\ &= \sum_k \left( X(b_k) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k a_i b_j \right) e_k \quad \square \end{aligned}$$

*Ejemplo 3.0.36.* Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y sean  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Entonces

$$\nabla_X Y(p) := P_{T_p M}(dY_p(X(p)))$$

define una conexión en  $M$ , donde  $P_{T_p M} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$  es la proyección ortogonal sobre  $T_p M$ . En efecto, la  $\mathbb{R}$ -bilinealidad y  $C^\infty(M)$ -linealidad en la primera variable se verifican fácilmente, pues tanto el diferencial como la proyección son  $\mathbb{R}$ -lineales. Verifiquemos la regla de Leibniz, que se deduce de la regla de Leibniz para los diferenciales:

$$\begin{aligned} \nabla_X(fY)(p) &= P_{T_p M}(d(fY)_p(X(p))) = P_{T_p M}(df_p(X(p))Y(p) + f(p)dY_p(X(p))) \\ &= df_p(X(p))P_{T_p M}(Y(p)) + f(p)P_{T_p M}(dY_p(X(p))) \\ &= (Xf)(p)Y(p) + f(p)\nabla_X Y(p) \end{aligned}$$

ya que  $Y(p) \in T_p M$ .

*Observación 3.0.37.* 1. El valor  $\nabla_X Y(p)$  sólo usa de  $X$  su valor en el punto  $p$ .

Es decir, si  $X, \bar{X}, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $p \in M$  son tales que  $X(p) = \bar{X}(p)$ , entonces se tiene que  $\nabla_X Y(p) = \nabla_{\bar{X}} Y(p)$ .

En efecto, si  $\varphi : U \rightarrow M$  es una parametrización en torno de  $p$  y  $\{e_i\}_i$  es el referencial local asociado, escribamos  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i e_i$ ,  $\bar{X}|_{\varphi(U)} = \sum_i \bar{a}_i e_i$ . Si  $X(p) = \bar{X}(p)$ , entonces  $a_i(p) = \bar{a}_i(p)$ , y

$$\bar{X}(b_k)(p) = \bar{X}(p)(b_k) = X(p)(b_k) = X(b_k)(p)$$

y por lo tanto  $\nabla_X Y(p) = \nabla_{\bar{X}} Y(p)$ , por la expresión (3.2).

2. El valor  $\nabla_X Y(p)$  sólo usa de  $Y$  su valor en un entorno de  $p$ .

Es decir, si  $X, Y, \bar{Y} \in \mathcal{X}(M)$  son tales que existe  $U \subset M$  abierto tal que  $Y|_U = \bar{Y}|_U$ , entonces  $(\nabla_X Y)|_U = (\nabla_X \bar{Y})|_U$ .

En efecto: sea  $Z = X - Y$ . Por  $\mathbb{R}$ -linealidad de la conexión en la segunda variable, basta ver que  $(\nabla_X Z)|_U = 0$ .

Sea  $p \in U$  y sea  $B \subset M$  un entorno abierto de  $p$  tal que  $\bar{B} \subset U$ . Sea  $\rho : M \rightarrow [0, 1]$  una función chichón tal que  $\rho|_{M \setminus U} = 0$ ,  $\rho|_B = 1$ . Observar que  $\rho Z = 0$ , y por lo tanto  $\nabla_X(\rho Z) = 0$ . Usando la regla de Leibniz y las observaciones 1.5.7.1 y 1.5.7.2, conseguimos que

$$0 = \nabla_X(\rho Z)(p) = \overbrace{X(\rho)(p)}^{=0} + \overbrace{\rho(p)}^{=1} \nabla_X Z(p) = \nabla_X Z(p)$$

y por lo tanto  $(\nabla_X Z)|_U = 0$ .

3. Toda variedad admite una conexión. La demostración directa es similar a la que esbozamos en la observación 2.0.24: ver [Lee2], proposición 4.5 para más detalles. Otra manera de proceder es esta. En breve probaremos que toda variedad riemanniana admite una conexión (que además satisface ciertas propiedades). Como por la observación 2.0.24 toda variedad admite una métrica riemanniana, entonces en particular toda variedad admite una conexión.

**Definición 3.0.38.** Sea  $M$  una variedad,  $U \subset M$  un abierto,  $p \in U$ ,  $v \in T_p M$  e  $Y \in \mathcal{X}(M)$ . Definimos  $\nabla_v Y(p) \in T_p M$  como  $\nabla_X Y(p)$ , donde  $X \in \mathcal{X}(M)$  es tal que  $X(p) = v$ .

Esta definición es correcta: un tal  $X$  siempre existe por el lema 1.5.11, y  $\nabla_v Y(p)$  no depende de la elección de  $X$  por la observación 3.0.37.1.

## 3.1. Compatibilidad con la métrica

Si  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  entonces  $\langle X, Y \rangle \in C^\infty(M)$ , donde  $\langle X, Y \rangle(p) := \langle X(p), Y(p) \rangle$ . En particular, esto nos permite hacer las siguiente

**Definición 3.1.1.** Sea  $M$  una variedad riemanniana con una conexión  $\nabla$ . Decimos que  $\nabla$  es *compatible con la métrica de  $M$*  si satisface la siguiente regla de Leibniz:

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .

*Ejemplo 3.1.2.* Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular con la conexión del ejemplo 3.0.36. Veamos que es compatible con la métrica de  $M$  heredada de  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ . Sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva con  $\alpha(0) = p$ ,  $\dot{\alpha}(0) = Z(p)$ . Sea  $f \in C^\infty(M)$  la función definida como  $f(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle$ . Calculemos: si  $p \in M$ ,

$$\begin{aligned} Z\langle X, Y \rangle(p) &= (Zf)(p) = Z(p)(f) = \dot{\alpha}(0)(f) = df_p(\dot{\alpha}(0)) \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle X(\alpha(t)), Y(\alpha(t)) \rangle \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \langle dX_p(Z(p)), Y(p) \rangle + \langle X(p), dY_p(Z(p)) \rangle \\ &\stackrel{*}{=} \langle P_{T_p M}(dX_p(Z(p))), Y(p) \rangle + \langle X(p), P_{T_p M}(dY_p(Z(p))) \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X(p), Y(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_Z Y(p) \rangle \end{aligned}$$

donde en  $\stackrel{*}{=}$  usamos que  $Y(p), X(p) \in T_p M$ .

## 3.2. Simetría

Resulta que la compatibilidad con la métrica, una condición que parece muy razonable, no es suficiente para determinar una única conexión en una variedad riemanniana. Hace falta otro requisito (más misterioso).

**Definición 3.2.1.** Una conexión  $\nabla$  en una variedad  $M$  es *simétrica* si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

*Observación 3.2.2.* A veces a una conexión simétrica se le dice *libre de torsión*, pues su torsión,  $\tau : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ ,  $\tau(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  es idénticamente nula.

Remitimos al lector a la pregunta “What is torsion in differential geometry intuitively?” en MathOverflow (ver [[Wei](#)]).

**Lema 3.2.3.** Una conexión  $\nabla$  en una variedad  $M$  es simétrica si y sólo si  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  para todo  $i, j, k$  y toda parametrización.

*Demostración.* Dados una parametrización  $\varphi : U \rightarrow M$  y campos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , escribamos  $X|_{\varphi(U)} = \sum_i a_i e_i$ ,  $Y|_{\varphi(U)} = \sum_j b_j e_j$  donde  $\{e_i\}_i$  es el referencial local asociado a  $\varphi$ . Usando las expresiones (3.1), (3.2) y (1.9) para los símbolos de Christoffel y la conexión y el corchete en coordenadas locales, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \text{ es simétrica} &\iff \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \\ &\iff \sum_k \left( X(b_k) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k a_i b_j \right) e_k + \sum_k \left( Y(a_k) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k b_i a_j \right) e_k \\ &= \sum_k \left( X(b_k) - Y(a_k) \right) e_k \\ &\iff \sum_k \left( \cancel{X(b_k)} - \cancel{Y(a_k)} \right) e_k + \sum_k \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k a_i b_j e_k \\ &= \sum_k \left( \cancel{X(b_k)} - \cancel{Y(a_k)} \right) e_k + \sum_k \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k b_i a_j e_k \\ &\iff \sum_k \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k a_i b_j e_k = \sum_k \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k b_i a_j e_k \\ &\iff \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \text{ para todo } i, j, k \end{aligned}$$

□

### 3.3 Conexión de Levi-Civita

*Ejemplo 3.2.4.* Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular, con la conexión del ejemplo 3.0.36. Veamos que es simétrica. Para ello, basta verificar que los símbolos de Christoffel de una parametrización coinciden con los de Cálculo III, que cumplen la propiedad del lema 3.2.3.

Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización con  $\varphi(0) = p$  y sea  $\{e_i\}_i$  su referencial local asociado. Designemos por  $\Gamma_{ij}^k$  a los símbolos de Christoffel de Cálculo III y por  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  a los definidos por la ecuación (3.1). Lo que queremos verificar es que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{\Gamma}_{ij}^k} & \mathbb{R} \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \text{id}_{\mathbb{R}} \\ U & \xrightarrow{\Gamma_{ij}^k} & \mathbb{R} \end{array}$$

Lo verificaremos para  $i = j = k = 1$ , para los demás la demostración es análoga. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{uu}(0) &= \Gamma_{11}^1(0)\varphi_u(0) + \Gamma_{11}^2(0)\varphi_v(0) + e(0)N(0) \\ \nabla_{e_1} e_1(p) &= \tilde{\Gamma}_{11}^1(p)e_1(p) + \tilde{\Gamma}_{11}^2(p)e_2(p) = P_{T_p M}(d(e_1)_p(e_1(p))) \end{aligned}$$

Por lo tanto como  $\{\varphi_u(0), \varphi_v(0)\} = \{e_1(p), e_2(p)\}$  es base de  $T_p M$ , basta verificar que  $d(e_1)_p(e_1(p)) = \varphi_{uu}(0)$ .

Sea  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \subset \mathbb{R}^3$  la base canónica. Entonces:

$$d(e_1)_p(e_1(p)) = d(e_1)_{\varphi(0)}(d\varphi_0(\hat{i})) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d(e_1 \circ \varphi)_0(\hat{i}) \stackrel{*}{=} d(\varphi_u)_0(\hat{i}) = \varphi_{uu}(0)$$

donde en  $\stackrel{*}{=}$  usamos que  $e_1(\varphi(q)) = d\varphi_q(\hat{i}) = \varphi_u(q)$  para todo  $q \in U$ , y por lo tanto  $e_1 \circ \varphi = \varphi_u$ .

### 3.3. Conexión de Levi-Civita

**Teorema 3.3.1** (de Levi-Civita). *Sea  $M$  una variedad riemanniana. Existe una única conexión en  $M$  simétrica y compatible con la métrica de  $M$ , que llamamos conexión de Levi-Civita de  $M$ .*

*Demostración.* Unicidad: supongamos que  $\nabla$  es una tal conexión en  $M$ . Entonces, si  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ , la condición de compatibilidad con la métrica nos da que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Usando la simetría en el último término de cada línea, obtenemos:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \end{aligned}$$

Ahora sumamos los dos primeros términos y restamos el último: los términos marcados se cancelan, obteniendo

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle$$

Despejando el único término en el que aparece la conexión, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} \left( X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como el lado derecho no depende de la conexión, entonces si  $\nabla'$  es otra conexión simétrica y compatible con la métrica, se tiene que

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle \nabla'_X Y, Z \rangle \implies \langle \nabla_X Y - \nabla'_X Y, Z \rangle = 0$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ . Por el lema 1.5.11, en cada punto  $p \in M$  puedo encontrar un  $Z \in \mathcal{X}(M)$  tal que  $Z(p) = v$  dado cualquier  $v \in T_p M$ , así que por la no-degeneración del producto interno concluimos que  $\nabla_X Y(p) = \nabla'_X Y(p)$  para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M), p \in M$ , i.e.  $\nabla = \nabla'$ .

Existencia Basta probar que existe una conexión simétrica y compatible en cada entorno coordenado de un atlas para  $M$ , pues luego la unicidad nos asegura que las conexiones de diferentes entornos coordenados coinciden donde se intersectan, pudiendo entonces definir una conexión en todo  $M$ .

Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización con referencial local asociado  $\{e_i\}_i$ . Queremos que se cumpla la igualdad (3.3), que si se la aplicamos a  $X = e_i, Y = e_j, Z = e_k$  obtenemos

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2} \left( e_i \langle e_j, e_k \rangle + e_j \langle e_k, e_i \rangle - e_k \langle e_i, e_j \rangle \right)$$

ya que el corchete de Lie de los campos del referencial local son nulos (proposición 1.5.17).

Recordemos que  $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$  y que  $\nabla_{e_i} e_j = \sum_r \Gamma_{ij}^r e_r$ , así que la ecuación anterior queda así:

$$\sum_r \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left( e_i g_{jk} + e_j g_{ki} - e_k g_{ij} \right)$$

Observar que el lado izquierdo de la ecuación anterior es el coeficiente  $(i, k)$  de una multiplicación de matrices. Ya observamos que la matriz  $(g_{ij}(p))_{i,j}$  es definida positiva



para todo  $p \in \varphi(U)$ , así que en particular es invertible. Llamémosle  $(g^{rm}(p))_{r,m}$  a la matriz inversa de la matriz  $(g_{rm}(p))_{r,m}$ ; multiplicando por esta matriz, obtenemos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k (e_i g_{jk} + e_j g_{ik} - e_k g_{ij}) g^{km} \quad (3.4)$$

Queremos que los símbolos de Christoffel de  $\nabla$  en la parametrización  $\varphi$  cumplan la ecuación (3.4), así que definimos la conexión mediante esos símbolos de Christoffel como en la proposición 3.0.35.

Resta verificar que  $\nabla$  así definida es una conexión en  $\varphi(U)$  y que es compatible con la métrica; esto son verificaciones a cargo del lector. Es claro de la fórmula (3.4) que  $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m$  para todo  $i, j, m$ , así que  $\nabla$  es simétrica por el lema 3.2.3.  $\square$

*Observación 3.3.2.* La fórmula (3.3) se llama *fórmula de Koszul* para la conexión de Levi-Civita, y la fórmula (3.4) se llama *segunda identidad de Christoffel* para la conexión de Levi-Civita.

*Ejemplo 3.3.3.* Ya verificamos que la conexión en una superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  del ejemplo 3.0.36 es compatible con la métrica (ejemplo 3.1.2) y es simétrica (ejemplo 3.2.4), así que es la conexión de Levi-Civita de  $M$ .

Ahora que ya sabemos que la conexión que definimos en una superficie regular es la conexión de Levi-Civita, sabemos que vale la segunda identidad de Christoffel, que expresa los símbolos de Christoffel en términos de  $E, F, G$  y sus derivadas primeras. En Cálculo III ya habíamos conseguido tales expresiones: observar que conseguimos las mismas. Esto es coherente, pues ya sabemos que los símbolos de Christoffel nuevos coinciden con los de Cálculo III (ejemplo 3.2.4).

# Capítulo 4

## Derivada covariante

**Definición 4.0.4.** Sea  $M$  una variedad y  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva en  $M$ . Un *campo de vectores a lo largo de  $\alpha$*  es una función diferenciable  $V : I \rightarrow TM$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{V} & TM \\ & \searrow \alpha & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Si  $V(t) = (\alpha(t), v(t))$ , abusaremos la notación e identificaremos  $V(t)$  con  $v(t) \in T_{\alpha(t)}M$ .

Denotaremos por  $\mathcal{X}(\alpha)$  al conjunto de los campos de vectores a lo largo de  $\alpha$ .

**Observación 4.0.5.** 1. Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización tal que  $\alpha(I) \subset \varphi(U)$ , y sea  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_i$  su referencial local asociado. Como hicieramos en la proposición 1.5.3 para campos de vectores, es fácil probar que  $V : I \rightarrow TM$  es un campo de vectores a lo largo de  $\alpha$  si y sólo si  $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$  para todo  $t \in I$  y si escribiendo  $V(t) = \sum_i a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$  se tiene que  $a_i \in C^\infty(I)$  para todo  $i$ .

2.  $\mathcal{X}(\alpha)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y un  $C^\infty(I)$ -módulo, con las operaciones punto a punto.

**Ejemplo 4.0.6.** 1. Con la notación de la observación anterior, sea  $e_i : I \rightarrow TM$  definida como  $e_i(t) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$ . Entonces  $e_i \in \mathcal{X}(\alpha)$ , y todo  $V \in \mathcal{X}(\alpha)$  se puede escribir como  $V = \sum_i a_i e_i$  con  $a_i \in C^\infty(I)$  para todo  $i$ .

2. Sea  $x : I \rightarrow U$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tal que  $\varphi(x(t)) = \alpha(t)$ . Entonces

$$\dot{\alpha} = \sum_i \dot{x}_i e_i$$

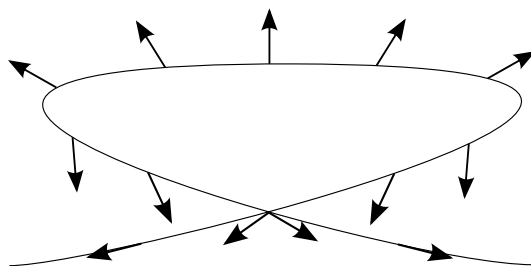


Figura 4.1: No hay manera de extender a  $\mathbb{R}^2$  el campo de vectores a lo largo de esta curva: el problema está en el punto de autointersección.

Es una consecuencia directa de la regla de la cadena: en efecto, si  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= d\alpha_t(1) = d(\varphi \circ x)_t(1) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d\varphi_{\alpha(t)}(dx_t(1)) \\ &= d\varphi_{\alpha(t)}(\dot{x}(t)) = d\varphi_{\alpha(t)}\left(\sum_i \dot{x}_i(t)e_i\right) \\ &= \sum_i \dot{x}_i(t)e_i(t)\end{aligned}$$

En particular, obtenemos que  $\dot{\alpha} \in \mathcal{X}(\alpha)$ .

*Observación 4.0.7.* Un campo de vectores a lo largo de una curva puede no poder extenderse a un campo de vectores en  $M$  (ver figura 4.1).

**Definición 4.0.8.** Sea  $M$  una variedad y  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva. Una *derivada covariante a lo largo de  $\alpha$*  es un mapa  $\frac{D}{dt} : \mathcal{X}(\alpha) \rightarrow \mathcal{X}(\alpha)$  tal que:

1. es  $\mathbb{R}$ -lineal,
2. satisface la regla de Leibniz:  $\frac{D(fV)}{dt} = f'V + f\frac{DV}{dt}$  para todo  $V \in \mathcal{X}(\alpha), f \in C^\infty(I)$ .

Veamos ahora que una conexión nos permite determinar una derivada covariante, es decir, una manera de derivar campos de vectores a lo largo de curvas.

**Proposición 4.0.9.** Sea  $M$  una variedad con una conexión  $\nabla$ , y sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva. Existe una única derivada covariante  $\frac{D}{dt}$  a lo largo de  $\alpha$  que satisface que si  $V \in \mathcal{X}(\alpha)$  se puede extender a  $Y \in \mathcal{X}(M)$ , i.e. si existe  $Y \in \mathcal{X}(M)$  tal que  $V(t) = Y(\alpha(t))$  para todo  $t \in I$ , entonces

$$\frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}Y(\alpha(t))$$

para todo  $t \in I$ .

*Demostración.* Unicidad: veamos que hay unicidad para una tal derivada covariante a lo largo de  $\alpha$  restringida a cada entorno coordenado. Cubriendo la variedad con entornos coordenados, esto prueba la unicidad de una tal derivada covariante a lo largo de  $\alpha$ .

Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización tal que  $\varphi(U) \cap \alpha(I) \neq \emptyset$ , y sea  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  su referencial local asociado. Restrinjámonos a los  $t$  tales que  $\alpha(t) \in \varphi(U)$ . Sea  $\frac{D}{dt}$  una derivada covariante a lo largo de  $\alpha$  como en el enunciado, en este entorno coordenado.

Sea  $e_i(t) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$ . Escribamos  $\alpha(t) = \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$  y  $V = \sum_i a_i e_i$ . Por las propiedades de una derivada covariante, se tiene que

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt} \left( \sum_i a_i e_i \right) = \sum_i \left( a_i' e_i + a_i \frac{De_i}{dt} \right) \quad (4.1)$$

pero  $e_i \in \mathcal{X}(\alpha)$  es un campo de vectores a lo largo de  $\alpha$  que se puede extender a  $\varphi(U)$  como  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|$ , así que

$$\begin{aligned} \frac{De_i}{dt}(t) &= \nabla_{\dot{\alpha}(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} = \nabla_{\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} \\ &= \sum_j \dot{x}_j(t) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} \\ &= \sum_j \dot{x}_j(t) \sum_k \Gamma_{ji}^k(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\alpha(t)} \\ &= \sum_j \dot{x}_j(t) \sum_k \Gamma_{ji}^k(\alpha(t)) e_k(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, siguiendo la cuenta de (4.1), conseguimos que

$$\frac{DV}{dt}(t) = \sum_i a_i'(t) e_i(t) + \sum_{i,j} a_i(t) \dot{x}_j(t) \sum_k \Gamma_{ji}^k(\alpha(t)) e_k(t)$$

En definitiva,

$$\boxed{\frac{DV}{dt}(t) = \sum_k \left( a_k'(t) + \sum_{i,j} a_i(t) \dot{x}_j(t) \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) \right) e_k(t)} \quad (4.2)$$

y por lo tanto un tal operador es único en cada entorno coordenado.

Existencia: si  $\varphi : U \rightarrow M$  es una parametrización con  $\varphi(U) \cap \alpha(I) \neq \emptyset$ , definimos  $\frac{DV}{dt}$  en  $\varphi(U) \cap \alpha(I)$  mediante la expresión (4.2). Se debe verificar que esto define efectivamente una derivada covariante: son cuentas que quedan a cargo del lector.

Si  $\psi : V \rightarrow M$  es una parametrización tal que  $\varphi(U) \cap \psi(V) \cap \alpha(I) \neq \emptyset$ , definimos  $\frac{DV}{dt}$  en  $\psi(V) \cap \alpha(I)$  de la misma forma. Por unicidad en  $\varphi(U) \cap \psi(V) \cap \alpha(I)$ , la expresión para la derivada covariante determinada por  $\varphi$  o por  $\psi$  coinciden. Cubriendo  $\alpha(I)$  por entornos coordenados, podemos definir  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de toda la curva.  $\square$

A partir de ahora, si  $M$  es una variedad riemanniana con una conexión  $\nabla$  y  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva, entenderemos que  $\frac{D}{dt}$  es la derivada covariante a lo largo de  $\alpha$  determinada por la proposición anterior.

*Observación 4.0.10.* La ecuación (4.2) nos da la expresión en coordenadas locales para la derivada covariante que define una conexión.

*Ejemplo 4.0.11.* Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular. Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva. Si  $V \in \mathcal{X}(\alpha)$ , definimos

$$\frac{DV}{dt}(t) = P_{T_{\alpha(t)}M} \left( \frac{dV}{dt}(t) \right)$$

donde  $P_{T_{\alpha(t)}M} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\alpha(t)}M$  es la proyección ortogonal sobre  $T_{\alpha(t)}M$ .

Esta es la derivada covariante que resulta de la conexión definida en el ejemplo 3.0.36 (que verificamos que es compatible con la métrica en el ejemplo 3.1.2).

En efecto,  $\frac{DV}{dt}$  satisface la definición de derivada covariante (verificación a cargo del lector), y si  $V(t) = Y(\alpha(t))$  entonces se cumple  $\frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}Y(\alpha(t))$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\alpha}(t)}Y(\alpha(t)) &= P_{T_{\alpha(t)}M} \left( dY_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t)) \right) \\ &\stackrel{\text{r.c.}}{=} P_{T_{\alpha(t)}M} \left( \frac{d(Y \circ \alpha)}{dt}(t) \right) \\ &= P_{T_{\alpha(t)}M} \left( \frac{dV}{dt}(t) \right) \\ &= \frac{DV}{dt}(t) \end{aligned}$$

**Proposición 4.0.12.** Sea  $M$  una variedad riemanniana con una conexión  $\nabla$  compatible con la métrica. Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva. Para todo  $V, W \in \mathcal{X}(\alpha)$  se cumple

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle \quad (4.3)$$

*Demostración.* Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  su referencial local asociado. Como podemos cubrir la curva por entornos coordenados, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\alpha(I) \subset \varphi(U)$ .

Sean  $e_i \in \mathcal{X}(\alpha)$ ,  $e_i(t) := \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$ . Verifiquemos primero que para todo  $i, j$  se cumple

$$\frac{d}{dt} \langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \frac{De_i}{dt}, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \frac{De_j}{dt} \right\rangle \quad (4.4)$$

Sea  $t_0 \in I$ ,  $p := \alpha(t_0)$ ,  $v := \dot{\alpha}(t_0)$ . Sea  $f \in C^\infty(\varphi(U))$ ,  $f := g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ . Entonces

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} f(\alpha(t)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} df_p(v) = v(f)$$

Por el lema 1.5.11, existe  $X \in \mathcal{X}(\varphi(U))$  tal que  $X(p) = v$ . Entonces siguiendo el cálculo (4.4) y utilizando la compatibilidad de  $\nabla$  con la métrica,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \langle e_i(t), e_j(t) \rangle &= X(p)(f) = X(f)(p) \\ &= X \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle (p) \\ &= \left( \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_X \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \right) (p) \\ &= \left\langle \frac{De_i}{dt}(t_0), e_j(t_0) \right\rangle + \left\langle e_i(t_0), \frac{De_j}{dt}(t_0) \right\rangle \end{aligned}$$

Como  $t_0 \in I$  es arbitrario, esto prueba la ecuación (4.4).

Por linealidad, basta ahora probar la ecuación (4.3) para  $V = ge_i$  y  $W = e_j$ , donde  $g \in C^\infty(\varphi(U))$ . Sea  $t_0 \in I$ . Calculemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \langle (ge_i)(t), e_j(t) \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} g(t) \langle e_i(t), e_j(t) \rangle \\ &= g'(t_0) \langle e_i(t_0), e_j(t_0) \rangle + g(t_0) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \langle e_i(t), e_j(t) \rangle \\ &= g'(t_0) \langle e_i(t_0), e_j(t_0) \rangle + g(t_0) \left( \left\langle \frac{De_i}{dt}(t_0), e_j(t_0) \right\rangle + \left\langle e_i(t_0), \frac{De_j}{dt}(t_0) \right\rangle \right) \\ &= \left\langle \frac{D(ge_i)}{dt}(t_0), e_j(t_0) \right\rangle + \left\langle (ge_i)(t_0), \frac{De_j}{dt}(t_0) \right\rangle \end{aligned}$$

Como  $t_0 \in I$  es arbitrario, esto termina la demostración.  $\square$

## Transporte paralelo

Los resultados de esta sección quedan como ejercicio para el lector interesado, que puede consultarlos por ejemplo en el capítulo 2 de [dC].

**Definición 4.0.13.** Sea  $M$  una variedad y  $\nabla$  una conexión en  $M$ . Si  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva y  $V \in \mathcal{X}(\alpha)$ , decimos que  $V$  es *paralelo* si  $\frac{DV}{dt} = 0$ .

*Ejemplo 4.0.14.* Si  $M = \mathbb{R}^2$  con la conexión usual, entonces un campo paralelo a lo largo de una curva es un campo constante sobre la curva (ver figura 4.2).

El siguiente resultado abarca a la proposición 4.0.12.

**Proposición 4.0.15.** Sea  $M$  una variedad riemanniana con una conexión  $\nabla$ . Son equivalentes:

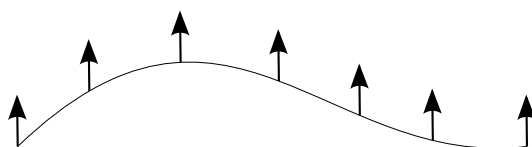


Figura 4.2

1.  $\nabla$  es compatible con la métrica,
2. para toda curva  $\alpha : I \rightarrow M$  y  $V, W \in \mathcal{X}(\alpha)$  se cumple

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

3. para toda curva  $\alpha : I \rightarrow M$  y  $P, P' \in \mathcal{X}(\alpha)$  paralelos se cumple que la función  $\langle P, P' \rangle$  es constante.

*Observación 4.0.16.* En particular, si  $P, P' \in \mathcal{X}(\alpha)$  son paralelos entonces  $|P|, |P'|$  y el ángulo entre  $P$  y  $P'$  son constantes.

Una aplicación del teorema de Picard nos da el siguiente teorema.

**Teorema 4.0.17.** Sea  $M$  una variedad con una conexión  $\nabla$ . Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva,  $t_0 \in I$  y  $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ . Existe un único  $V \in \mathcal{X}(\alpha)$  paralelo tal que  $V(t_0) = V_0$ , llamado transporte paralelo de  $V_0$  a lo largo de  $\alpha$ .

Si  $\alpha : I \rightarrow M$ ,  $t_0, t_1 \in I$ , sea  $P_{t_0 t_1} : T_{\alpha(t_0)}M \rightarrow T_{\alpha(t_1)}M$  definido como  $P_{t_0 t_1}(v) = V(t_1)$  donde  $V$  es el transporte paralelo de  $v$  a lo largo de  $\alpha$ .

**Proposición 4.0.18.** El mapa  $P_{t_0 t_1} : T_{\alpha(t_0)}M \rightarrow T_{\alpha(t_1)}M$  es una isometría lineal, y en particular preserva normas y ángulos.

**Proposición 4.0.19.** La derivada covariante se recupera a partir del transporte paralelo, de la siguiente manera:

$$\frac{DV}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(P_{t_0 t})^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0}$$

Observar que conseguimos “conectar”  $T_{\alpha(t_0)}M$  con  $T_{\alpha(t)}M$ : es lo que dijimos al comienzo del capítulo 3 que queríamos lograr.

Si  $\alpha$  es una curva cerrada en  $\mathbb{R}^2$ , si se transporta paralelamente un vector a lo largo de toda la curva, se vuelve al mismo lugar (ver figura 4.3).

No ocurre lo mismo en  $S^2$ , como se puede apreciar en la figura 4.4. Si transportamos paralelamente un vector por el camino  $A \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow A$ , no obtenemos el mismo vector, obtenemos un vector que forma un ángulo  $\alpha$  con el original.

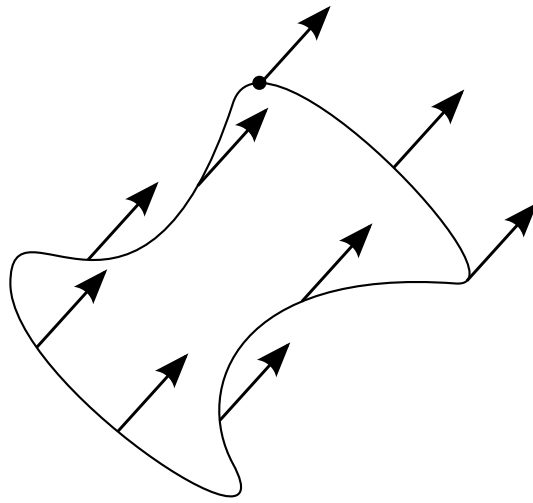


Figura 4.3: El grupo de holonomía de  $\mathbb{R}^2$  es trivial

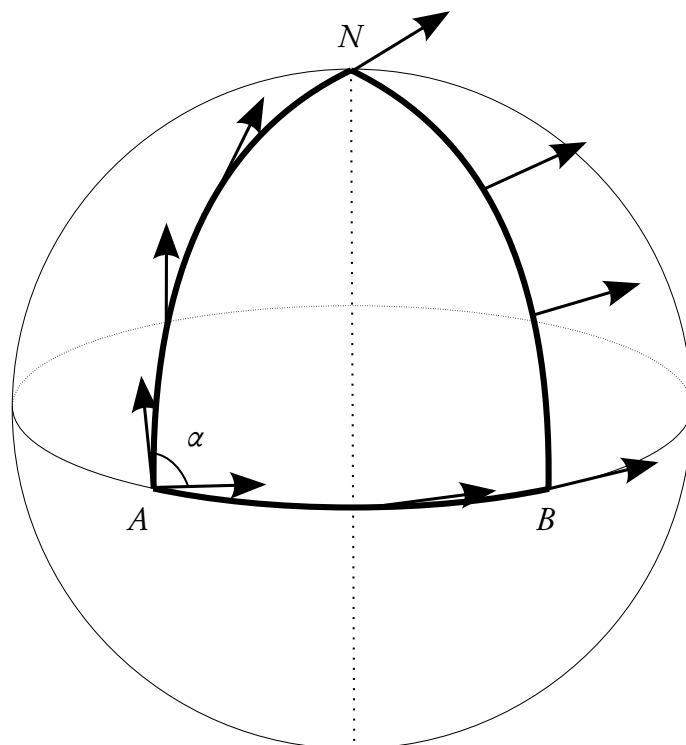


Figura 4.4: El grupo de holonomía de  $S^2$  es no trivial



---

Si  $p \in M$ , consideremos todas las isometrías de transporte paralelo  $P : T_p M \rightarrow T_p M$  que resultan de todas las curvas cerradas basadas en  $p$ . Se obtiene un subgrupo del grupo de isometrías de  $T_p M$ , llamado *grupo de holonomía en  $p$* .

Es geoméricamente claro que el grupo de holonomía de cualquier punto en  $\mathbb{R}^2$  es trivial, mientras que el grupo de holonomía de cualquier punto en  $S^2$  es  $SO(2)$ , el grupo de rotaciones del plano.

# Capítulo 5

## Geodésicas

**Definición 5.0.20.** Sea  $M$  una variedad con una conexión,  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva y  $\frac{D}{dt}$  la derivada covariante a lo largo de  $\gamma$ . Decimos que  $\gamma$  es una *geodésica* si  $\dot{\gamma} \in \mathcal{X}(\gamma)$  es paralelo, i.e. si

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$$

Decimos que  $\gamma$  es una *geodésica maximal* si es una geodésica que no puede definirse en un intervalo mayor.

*Ejercicio 5.0.21.* Probar que una isometría local entre variedades con sendas conexiones preserva geodésicas.

*Ejercicio 5.0.22.* Probar que en  $\mathbb{R}^n$  con la conexión usual las geodésicas son las rectas parametrizadas con velocidad constante.

**Proposición 5.0.23.** Sea  $M$  una variedad con una conexión. Toda geodésica en  $M$  tiene rapidez constante, i.e., si  $\gamma : I \rightarrow M$  es una geodésica, entonces  $|\dot{\gamma}|$  es una función constante.

*Demostración.* Veamos que  $|\dot{\gamma}|^2$  es constante. Para ver esto, veamos que su derivada es nula. Usando la proposición 4.0.12, obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \left\langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma} \right\rangle = 0$$

pues al ser  $\gamma$  una geodésica, es  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ . □

*Observación 5.0.24.* Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular con la conexión usual. Del ejemplo 4.0.11 deducimos que una curva  $\alpha$  en  $S$  parametrizada con rapidez constante es una geodésica si y sólo si su aceleración  $\alpha''(s)$  es normal al plano tangente  $T_{\alpha(s)}S$ , para todo  $s$ .

Utilizando la unicidad de las geodésicas deducimos que en  $S^2$  las geodésicas son los arcos de círculo máximo parametrizados con velocidad constante.

## 5.1 Mapa exponencial

Veamos cómo queda la ecuación de la geodésica en coordenadas locales. Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización con  $\varphi(U) \cap \gamma(I) \neq \emptyset$ , y sea  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  su referencial local asociado. Sea  $(x_1, \dots, x_n)(t) \in U$  de manera que  $\gamma(t) = \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$  allí donde la expresión tiene sentido. De esta forma,  $\dot{\gamma}(t) = \sum_i \dot{x}_i(t) e_i(t)$ , donde  $e_i(t) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}$ .

Utilizando la expresión (4.2) de la derivada covariante en coordenadas locales, se obtiene

$$0 = \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = \sum_k \left( \ddot{x}_k(t) + \sum_{i,j} \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) e_k(t)$$

Hagamos un abuso de notación y denotemos por  $\Gamma_{ij}^k(t)$  a  $\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$ . Restrinjamos  $\gamma$  a los tiempos  $t$  tales que  $\gamma(t) \in \varphi(U)$ : sea  $A = \alpha^{-1}(\alpha(I) \cap \varphi(U))$ . Entonces  $\gamma|_A$  es geodésica si y sólo si

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

Esta es la *ecuación de las geodésicas*. Es un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Observar que  $\gamma$  es una geodésica si y sólo si existe un atlas  $\mathcal{A}$  tal que, si  $\varphi \in \mathcal{A}$  es tal que  $\varphi(U) \cap \gamma(I) \neq \emptyset$  y escribimos  $\gamma(t) = \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$ , entonces se satisface el sistema (5.1).

**Proposición 5.0.25.** *Sea  $M$  una variedad con una conexión. Para todo  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  existe un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  con  $0 \in I$  y una geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Dos tales geodésicas coinciden allí donde están ambas definidas. En particular, existe una única geodésica maximal  $\gamma_v$  en  $M$  tal que  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ .*

*Demostración.* Sean  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización con  $\varphi(0) = p$ . Una curva  $\gamma$  en  $\varphi(U)$ ,  $\gamma(t) = \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$  es una geodésica si y sólo si

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n$$

Por el teorema de Picard, existe un intervalo  $I$  y una curva  $(x_1, \dots, x_n) : I \rightarrow U$  que satisface el sistema anterior y tiene condiciones iniciales  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Definimos  $\gamma : I \rightarrow M$  como  $\gamma = \varphi \circ (x_1, \dots, x_n)$ . Entonces  $\gamma$  es la geodésica buscada.

El resultado de unicidad y de existencia de una única geodésica maximal se deduce de la unicidad en el teorema de Picard y de la unicidad de una solución maximal.  $\square$

## 5.1. Mapa exponencial

El siguiente lema es muy razonable: si recorremos la geodésica más rápido por un factor  $a$ , obtenemos una geodésica con dominio achicado proporcionalmente en el mismo

## 5.1 Mapa exponencial

factor. Recíprocamente, recorriendo la geodésica más lento podemos conseguir que esté definida en un intervalo mayor.

**Lema 5.1.1** (homogeneidad de las geodésicas). *Sea  $M$  una variedad con una conexión. Sean  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ . Si el dominio de  $\gamma_v$  es  $(-\delta, \epsilon)$  entonces para todo  $a \in \mathbb{R}$  el dominio de  $\gamma_{av}$  es  $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\epsilon}{a})$ , y se cumple*

$$\gamma_v(at) = \gamma_{av}(t) \quad \text{para todo } t \in \left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\epsilon}{a}\right)$$

*Demostración.* Definimos  $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M$  como  $h(t) = \gamma_v(at)$ . Veamos que  $h$  es una geodésica maximal tal que  $h(0) = p$  y  $\dot{h}(0) = av$ , y por lo tanto debe ser  $h = \gamma_{av}$ , terminando la demostración.

Claramente  $h(0) = p$ . Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización. Escribamos entonces  $\gamma_v(t) = \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$  para todo  $t$  tal que  $\gamma_v(t) \in \varphi(U)$ . Sea  $\tilde{x}_i(t) := x_i(at)$  allí donde la expresión de la derecha tiene sentido.

Supongamos primero que  $\varphi(0) = p$ . Entonces

$$h(t) = \gamma_v(at) = \varphi(x_1(at), \dots, x_n(at)) = \varphi(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$$

Ahora bien,  $\dot{\tilde{x}}_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(at) = a \dot{x}_i(at)$ , y en particular  $\dot{h}(0) = av$ , como muestra el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \dot{h}(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d\varphi_0 \left( \sum_i \dot{\tilde{x}}_i(0) e_i \right) \\ &= a d\varphi_0 \left( \sum_i \dot{x}_i(0) e_i \right) = a \dot{\gamma}_v(0) = av \end{aligned}$$

Verifiquemos ahora que  $h$  es una geodésica. Supongamos entonces que  $\varphi : U \rightarrow M$  es una parametrización tal que  $\varphi(U) \cap \gamma_v(I) \neq \emptyset$  arbitraria (i.e. no necesariamente alrededor de  $p$ ). Verifiquemos que se satisface el sistema (5.1):

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(t) \dot{\tilde{x}}_i(t) \dot{\tilde{x}}_j(t) &= a^2 \ddot{x}_k(at) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(t) a \dot{x}_i(at) a \dot{x}_j(at) \\ &= a^2 \left( \ddot{x}_k(at) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(t) \dot{x}_i(at) \dot{x}_j(at) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

al ser  $\gamma_v$  una geodésica.

Por lo tanto  $h$  es una geodésica maximal (pues  $\gamma_v$  lo es) que satisface que  $\gamma_v(0) = p$  y  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ , de manera que  $h = \gamma_{av}$ .  $\square$

## 5.1 Mapa exponencial

**Proposición 5.1.2.** *Sea  $M$  una variedad con una conexión. Existe un abierto  $\mathcal{U} \subset TM$  que contiene a todos los vectores nulos  $(q, 0)$  sobre el que la aplicación  $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$  definida como  $\exp(q, w) = \gamma_w(1)$ , es diferenciable.*

*El mapa  $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$  se llama mapa exponencial de  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización. Escribamos  $\gamma(t) = \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$ . El teorema de Picard y la diferenciabilidad respecto de las condiciones iniciales implican que existe una función diferenciable

$$x : (-\delta, \epsilon) \times B(0, \epsilon_1) \times B(0, \epsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad B(0, \epsilon_1) \subset U, B(0, \epsilon_2) \subset \mathbb{R}^n$$

tal que  $t \mapsto x(t, x_0, v_0)$  es la solución maximal del sistema (5.1) con condiciones iniciales  $(x_0, v_0) \in B(0, \epsilon_1) \times B(0, \epsilon_2)$ .

Observar que  $x(0, 0, 0) = 0$  luego reduciendo el dominio de  $x$  podemos suponer que su imagen cae dentro de  $U$ . Por el lema de homogeneidad de las geodésicas, achicando  $\epsilon_2$  podemos además suponer que

$$x : (-2, 2) \times B(0, \epsilon_1) \times B(0, \epsilon_2) \rightarrow U$$

Definamos  $\xi : B(0, \epsilon_1) \times B(0, \epsilon_2) \rightarrow U$  como  $\xi(x_0, v_0) = x(1, x_0, v_0)$ . De esta forma, el mapa  $(-1, 1) \rightarrow U$ ,  $t \mapsto \xi(x_0, t v_0)$  es la única solución maximal de (5.1) con condiciones iniciales  $(x_0, v_0)$ , por la última cuenta en la prueba del lema de homogeneidad.

Ahora transportamos esta función al fibrado tangente.

Sea  $\hat{\varphi}$  la parametrización de  $TM$  inducida por  $\varphi$ , i.e.

$$\hat{\varphi} : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM, \quad \hat{\varphi}(x, v) = (\varphi(x), d\varphi_x(v))$$

Sea  $\mathcal{U} = \hat{\varphi}(B(0, \epsilon_1) \times B(0, \epsilon_2)) \subset TM$ .

Definimos  $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$  mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\exp} & M \\ \hat{\varphi} \uparrow & & \uparrow \varphi \\ B(0, \epsilon_1) \times B(0, \epsilon_2) & \xrightarrow{\xi} & U \end{array}$$

De esta forma,  $\exp$  es diferenciable. Observar que si  $(q, w) \in \mathcal{U}$  entonces  $(q, tw) \in \mathcal{U}$  para todo  $t \in [-1, 1]$ .

Verifiquemos que  $\exp(q, tw) = \gamma_w(t)$  para todo  $t \in [-1, 1]$ . Dado  $(q, w) \in \mathcal{U}$  sea  $\tilde{w} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(\tilde{w}) = w$ . Entonces:

$$\exp(q, tw) = \varphi(\xi(\varphi^{-1}(q), t\tilde{w})) = \varphi(x(1, \varphi^{-1}(q), t\tilde{w})) = \varphi(x(t, \varphi^{-1}(q), \tilde{w}))$$

Por lo tanto  $t \mapsto \exp(q, tw)$  es una geodésica maximal que pasa por  $\varphi(x(0, \varphi^{-1}(q), \tilde{w})) = q$ , y tal que  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \exp(q, tw) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(\tilde{w}) = w$ . Debe ser entonces  $\exp(q, tw) = \gamma_w(t)$ .

## 5.1 Mapa exponencial

En particular, la definición de  $\exp$  es independiente de  $\varphi$ , luego podemos repetir la construcción en cada entorno coordenado, y por unicidad de las geodésicas conseguimos un mapa  $\exp$  definido en un abierto  $\mathcal{U} \subset TM$  que contiene a todos los puntos de la forma  $(p, 0) \in TM$ .  $\square$

**Definición 5.1.3.** Sea  $M$  una variedad con una conexión, y sea  $p \in M$ . Sea  $\mathcal{U}_p = \mathcal{U} \cap T_p M$ , donde  $\mathcal{U}$  es el de la proposición 5.1.2. Definimos el *mapa exponencial en  $p$*  que denotamos  $\exp_p$  como la composición  $\mathcal{U}_p \xrightarrow{\iota} \mathcal{U} \xrightarrow{\exp} M$ .

Explícitamente,  $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$ .

**Definición 5.1.4.** Sea  $M$  una variedad con una conexión, y sea  $\mathcal{U} \subset TM$  como en la proposición 5.1.2. Definimos el *flujo geodésico* como el mapa  $\phi : (-\delta, \epsilon) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ ,  $\phi(t, p, v) = \gamma_v(t)$ .

**Observación 5.1.5.** 1. El mapa  $\exp_p$  es diferenciable por ser composición de mapas diferenciables.

2. Si  $M$  es una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita, tomaremos como  $\mathcal{U}_p$  a una bola  $B(0, \epsilon) \subset T_p M$ , donde la bola es respecto de la métrica en  $T_p M$  inducida por el producto interno de la métrica riemanniana.

3. El lema de homogeneidad de las geodésicas nos da que  $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$ .

4. El lema de homogeneidad de las geodésicas expresado en términos del flujo geodésico nos dice que  $\phi(t, p, av) = \phi(at, p, v)$ .

Geoméricamente,  $\exp_p(v)$  es el punto de  $M$  obtenido al desplazarse por una unidad de tiempo a partir de  $p$  a lo largo de la geodésica que pasa por  $p$  con velocidad  $v$ , de manera que  $\exp_p(v)$  está definido para valores de  $v$  suficientemente chicos.

Podemos interpretar  $\exp_p(v)$  de otra manera similar.

Observar que  $\phi(1, q, v) = \phi\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$ ; además, la curva  $\gamma : t \mapsto \phi\left(t, q, \frac{v}{|v|}\right)$  está parametrizada por longitud de arco, pues por la proposición 5.0.23, se tiene que

$$|\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\gamma}(0)| = \left| \frac{v}{|v|} \right| = 1$$

De esta forma,  $\exp_p(v)$  es desplazarse desde  $p$  una longitud igual a  $|v|$  por una geodésica que pasa por  $p$  con velocidad  $\frac{v}{|v|}$ .

**Ejercicio 5.1.6.** Probar que el mapa exponencial  $\exp_p : T_p(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la identidad.

**Proposición 5.1.7.** Sea  $M$  una variedad con una conexión y sea  $p \in M$ . Entonces

$$d(\exp_p)_0 = \text{id}_{T_p M}$$

y en particular  $\exp_p$  es un difeomorfismo local en 0.

## 5.1 Mapa exponencial

*Demostración.*

$$d(\exp_p)_0(v) \stackrel{\text{r.c.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{tv}(1) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(t) = v$$

para todo  $v \in T_p M$ , de donde  $d(\exp_p)_0 = \text{id}_{T_p M}$ . Por el teorema de la función inversa,  $\exp_p$  es un difeomorfismo local en 0.  $\square$

En la figura (6.3) se puede apreciar el mapa exponencial de la esfera  $S^2$ . Observar que no es un difeomorfismo global, por ejemplo, tomando  $p = N$  el polo norte: tras recorrer un tiempo  $\pi$  todas las geodésicas que empiezan en  $N$  están en el polo sur.

**Definición 5.1.8.** Sea  $M$  una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita, y sea  $p \in M$ . Una *bola normal* en  $p$  es un entorno abierto de  $p$  en  $M$  de la forma  $\exp_p(B(0, r))$ , donde  $B(0, r) \subset T_p M$  es tal que  $\overline{B(0, r)}$  está incluida en un abierto donde  $\exp_p$  es un difeomorfismo sobre su imagen.

**Proposición 5.1.9.** Sea  $M$  una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita, y sea  $p \in M$ . Si  $B = \exp_p(B(0, r))$  es una bola normal en  $p$  y  $q \in B$ , entonces existe una única geodésica  $[0, 1] \rightarrow B$  que une  $p$  con  $q$  dentro de  $B$ .

*Demostración.* Como  $q \in B = \exp_p(B(0, r))$  y  $\exp_p$  es un difeomorfismo en  $B(0, r)$ , existe entonces  $v \in B(0, r)$  tal que  $q = \exp_p(v)$ . Por lo tanto la curva

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M, \quad \gamma(t) := \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$$

es una geodésica que cumple que  $\gamma([0, 1]) \subset B$  y  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ .

Supongamos ahora que  $\tau : [0, 1] \rightarrow B$  es una geodésica con  $\tau(0) = p, \tau(1) = q$ . Sea  $w = \dot{\tau}(0)$ . Las geodésicas  $\tau$  y  $t \mapsto \exp_p(tw)$  tienen velocidad inicial  $w$ , luego son iguales.

Observar que  $tw \in B(0, r)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , pues  $\exp_p(tw) = \tau(t) \in B = \exp_p(B(0, r))$  y  $\exp_p$  es un difeomorfismo en  $B(0, r)$ . En particular,  $w \in B(0, r)$ . Pero

$$\exp_p(w) = \tau(1) = q = \exp_p(v)$$

y al ser  $\exp_p$  inyectiva en  $B(0, r)$ , debe ser  $v = w$ . Por lo tanto  $\tau$  y  $\gamma$  son geodésicas definidas en  $[0, 1]$  con igual velocidad inicial, así que son iguales.  $\square$

*Observación 5.1.10.* Una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita es *completa* si las geodésicas están definidas en toda la recta real. Por ejemplo, toda variedad compacta es completa.

El teorema de Hopf-Rinow afirma que si  $M$  es una variedad completa y  $p, q \in M$ , entonces existe una geodésica entre  $p$  y  $q$ , y esta geodésica realiza la distancia  $d(p, q)$  (ver [dC], teorema 2.8).

# Capítulo 6

## Minimización local

Nuestro objetivo ahora es probar que las geodésicas “minimizan localmente las distancias entre los puntos”. Observar que decimos “localmente”: por ejemplo en  $S^2$  si tomamos dos puntos  $p, q$  no diametralmente opuestos, sólo yendo por un círculo máximo por un lado se minimizará la distancia. En la figura 6.1 vemos una geodésica entre  $p$  y  $q$  que no minimiza la distancia entre  $p$  y  $q$ . Si los puntos  $p$  y  $q$  son diametralmente opuestos, entonces hay infinitas geodésicas que unen  $p$  con  $q$ , y todas minimizan la distancia  $d(p, q)$ .

Considerando como variedad al abierto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ , observamos que entre los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  no hay geodésicas que minimicen la distancia (y de hecho, no hay ninguna curva que realice la distancia).

**Definición 6.0.11.** Sea  $M$  una variedad. Una *superficie parametrizada* en  $M$  es un mapa diferenciable  $\alpha : J_1 \times J_2 \rightarrow M$ , donde  $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$  son intervalos.

Si  $(s_0, t_0) \in J_1 \times J_2$ , sean  $\alpha_{s_0} : J_2 \rightarrow M, t \mapsto \alpha(s_0, t)$  y  $\alpha_{t_0} : J_1 \rightarrow M, s \mapsto \alpha(s, t_0)$ , las curvas coordenadas.

Definimos

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(s_0, t_0)} := \alpha'_{t_0}(s_0) = d\alpha_{(s_0, t_0)} \left( \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{(s_0, t_0)} \right) \in T_{\alpha(s_0, t_0)} M$$

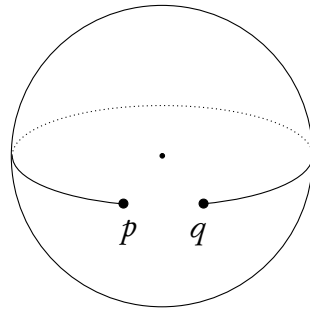


Figura 6.1: La geodésica marcada no minimiza la distancia entre  $p$  y  $q$



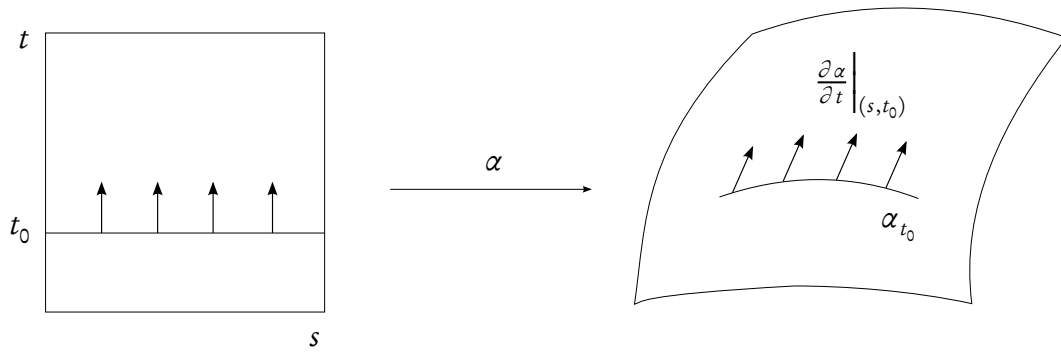


Figura 6.2: Superficie parametrizada

y

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} := \alpha'_{s_0}(t_0) \in T_{\alpha(s_0, t_0)}M = d\alpha_{(s_0, t_0)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} \right) \in T_{\alpha(s_0, t_0)}M$$

Dado  $(s_0, t_0) \in J_1 \times J_2$ , consideremos los siguientes campos de vectores a lo largo de las curvas coordenadas (ver figura 6.2):

$$t \mapsto \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \in \mathcal{X}(\alpha_{s_0}), \quad s \mapsto \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s, t_0)} \in \mathcal{X}(\alpha_{t_0})$$

**Lema 6.0.12** (de simetría). *Sea  $\alpha : J_1 \times J_2 \rightarrow M$  una superficie parametrizada, donde  $M$  es una variedad con una conexión simétrica. Sea  $(s_0, t_0) \in J_1 \times J_2$ , y sean  $\frac{D}{dt}$  y  $\frac{D}{ds}$  las derivadas covariantes a lo largo de  $\alpha_{s_0}$  y de  $\alpha_{t_0}$  respectivamente. Entonces*

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \right) (t_0) = \frac{D}{ds} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s, t_0)} \right) (s_0)$$

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe  $\varphi : U \rightarrow M$  una parametrización tal que  $\alpha(J_1 \times J_2) \subset \varphi(U)$ . Sea  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  el referencial local asociado.

Escribamos  $\alpha(s, t) = \varphi(\alpha_1(s, t), \dots, \alpha_n(s, t))$ . Sea  $(s_0, t_0) \in J_1 \times J_2$ . Derivando, obtenemos

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \stackrel{\text{r.c.}}{=} \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t)} \quad (6.1)$$

Aplicamos  $\frac{D}{dt}$  y evaluamos en  $t_0$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \right) (t_0) \\
&= \sum_i \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \right) (t_0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t_0)} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t)} \right) (t_0) \right) \\
&\stackrel{\#}{=} \sum_i \left( \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t \partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t_0)} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \left( \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (\alpha(s_0, t_0)) \right) \\
&\stackrel{*}{=} \sum_i \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t \partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t_0)} + \sum_{i, j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha(s_0, t_0)) \quad (6.2)
\end{aligned}$$

En  $\stackrel{\#}{=}$  usamos que  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t)} \in \mathcal{X}(\alpha_{s_0})$  se extiende a  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big| \in \mathcal{X}(\varphi(U))$ , luego

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t)} \right) (t_0) = \nabla_{\alpha_{s_0}(t_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha(s_0, t_0) = \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha(s_0, t_0))$$

En  $\stackrel{*}{=}$  usamos la ecuación análoga a (6.1) pero habiendo derivado respecto de  $t$ .

Esto concluye la demostración, pues la expresión (6.2) es simétrica en las variables  $s$  y  $t$ , ya que  $\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ , y al ser la conexión simétrica, es  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  para todo  $i, j, k$ .  $\square$

**Lema 6.0.13** (de Gauss). *Sea  $M$  una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita. Sea  $p \in M$ . Sea  $v \in T_p M$  tal que  $\exp_p(v)$  está definido. Si  $w \in T_p M$ , entonces*

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Observar que  $\exp_p : B(0, \epsilon) \subset T_p M \rightarrow M$ , entonces  $d(\exp_p)_v : T_v(T_p M) \rightarrow T_{\exp_p(v)} M$ . Pero al ser  $T_p M$  un espacio vectorial, sencillamente  $T_v(T_p M) \simeq T_p M$ , así que considerando  $v, w \in T_v(T_p M)$ , la expresión del lema de Gauss tiene sentido.

El lema nos dice en particular que la imagen de una esfera suficientemente chica en torno de 0 en  $T_p M$  es enviada por el mapa exponencial a una curva (llamada *esfera geodésica*) perpendicular a todas las geodésicas originadas en  $p$  (llamadas *geodésicas radiales*), i.e.  $v \perp w$  implica  $d(\exp_p)_v(v) \perp d(\exp_p)_v(w)$  (ver figura 6.3).

*Demostración.* Descomponemos  $T_v(T_p M)$  como la suma directa del subespacio generado por  $v$  y su subespacio perpendicular. Por la linealidad del producto interno en la segunda variable y de  $d(\exp_p)_v$ , basta probar el lema para  $w = v$  y para  $w \perp v$ .

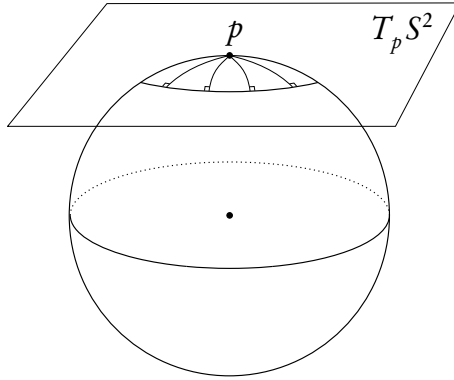


Figura 6.3: El mapa exponencial de  $S^2$

Supongamos primero que  $w = v$ . Usando la proposición 5.0.23, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 |d(\exp_p)_v(v)|^2 &\stackrel{\text{r.c.}}{=} \left| \frac{d}{dt} \Big|_{t=1} \exp_p(tv) \right|^2 = \left| \frac{d}{dt} \Big|_{t=1} \gamma_{tv}(1) \right|^2 \\
 &= \left| \frac{d}{dt} \Big|_{t=1} \gamma_v(t) \right|^2 = |\dot{\gamma}_v(1)|^2 = |\dot{\gamma}_v(0)|^2 \\
 &= |v|^2
 \end{aligned}$$

probando el lema en este caso.

Supongamos ahora que  $w \perp v$ . Como  $\exp_p(v)$  está definido, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_p(tv(s))$  está definido, para  $0 \leq t \leq 1$ ,  $-\epsilon < s < \epsilon$ , donde  $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_p M$  es una curva con  $v(0) = v$ ,  $v'(0) = w$  y tal que  $s \mapsto |v(s)|$  es una función constante (ver figura 6.4).

Definimos una superficie parametrizada

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [-1, 1] \rightarrow M, \quad \alpha(s, t) = \exp_p(tv(s))$$

Observar que  $t \mapsto \alpha(s_0, t)$  es la geodésica  $t \mapsto \gamma_{v(s_0)}(t)$  para todo  $s_0$ , pues

$$\alpha(t, s_0) = \exp_p(tv(s_0)) = \gamma_{tv(s_0)}(1) = \gamma_{v(s_0)}(t)$$

Entonces

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s,t)} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(s,t)} \exp_p(tv(s)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d(\exp_p)_{tv(s)}(v(s)) \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s,t)} = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(s,t)} \exp_p(tv(s)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d(\exp_p)_{tv(s)}(tv'(s)) \quad (6.4)$$

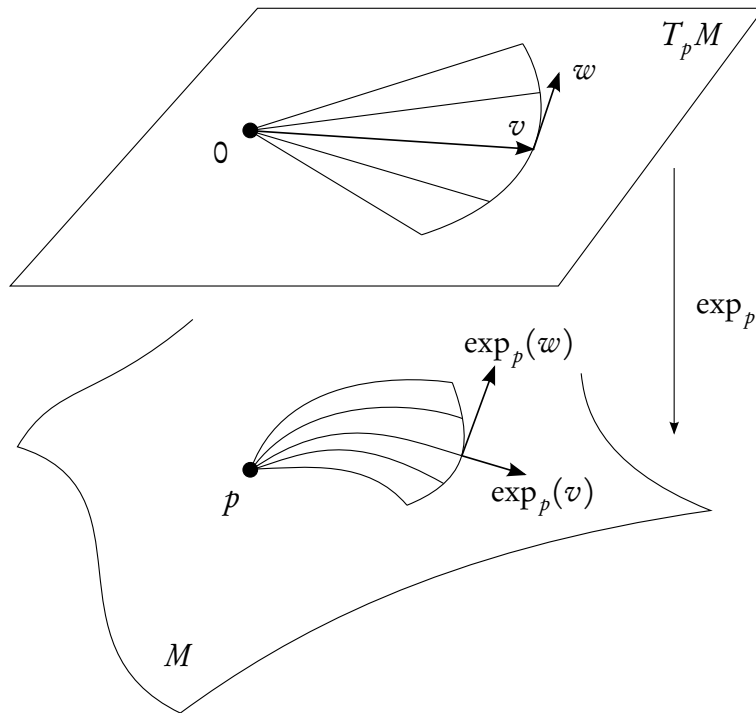


Figura 6.4

Tomando  $(s, t) = (0, 1)$ , obtenemos que

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,1)} = d(\exp_p)_v(v), \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,1)} = d(\exp_p)_v(w)$$

Lo que queremos probar entonces es que

$$\left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,1)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,1)} \right\rangle = 0 \tag{6.5}$$

*Afirmación:*  $\frac{d}{dt} \left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t)} \right\rangle = 0.$

*Demostración:* Sea  $t_0 \in [-1, 1]$ .

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t)} \right\rangle \\
&= \left\langle \left. \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t)}(t_0), \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t_0)} \right\rangle + \left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t_0)}, \left. \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t)}(t_0) \right\rangle \quad (6.6) \\
&\stackrel{*}{=} \left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t_0)}, \left. \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t)}(t_0) \right\rangle \\
&= \left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t_0)}, \left. \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s,t_0)}(0) \right\rangle \quad \text{por el lema de simetría} \\
&= \frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s,t_0)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s,t_0)} \right\rangle \quad \text{por compatibilidad con la métrica} \quad (6.7)
\end{aligned}$$

En  $\stackrel{*}{=}$  usamos que el primer sumando de (6.6) es nulo, pues al ser  $t \mapsto \alpha(0, t)$  una geodésica, se tiene que  $\left. \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t)}(t_0) = 0$ .

Seguimos calculando: al ser  $t \mapsto \alpha(s, t)$  la geodésica  $t \mapsto \gamma_{v(s)}(t)$ , conseguimos gracias a la proposición 5.0.23 que

$$\left| \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s,t_0)} \right|^2 = |\dot{\gamma}_{v(s)}(t_0)|^2 = |\dot{\gamma}_{v(s)}(0)| = |v(s)| = |v(0)| = |v|$$

Por lo tanto la expresión de (6.7) es nula, lo cual prueba la afirmación.  $\blacksquare$

Hemos probado entonces que la función  $t \mapsto \left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t)} \right\rangle$  es constante. En particular, usando las expresiones (6.3) y (6.4) y la proposición 5.1.7 conseguimos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,1)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,1)} \right\rangle &= \left\langle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,0)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,0)} \right\rangle \\
&= \langle d(\exp_p)_0(v), d(\exp_p)_0(w) \rangle \\
&= \langle v, w \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

probando la igualdad (6.5) y terminando la demostración.  $\square$

Ahora podemos probar que las geodésicas minimizan localmente las distancias.

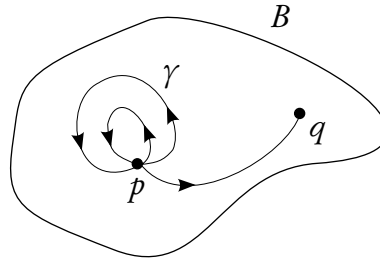


Figura 6.5

**Teorema 6.0.14.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita. Sea  $p \in M$  y sea  $B \subset M$  una bola normal en  $p$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  una geodésica dentro de  $B$ , y sea  $q = \gamma(1)$ . Entonces  $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$  para toda curva  $c : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $c(0) = p, c(1) = q$ .<sup>1</sup>*

*Además, si  $\ell(c) = \ell(\gamma)$ , entonces  $c$  es una reparametrización de  $\gamma$ .*

*Demostración.* Escribamos  $B = \exp_p(B(0, r))$ , de manera que  $\exp_p$  sea un difeomorfismo en un abierto que contiene a  $\overline{B(0, r)}$ .

• Supongamos primero que  $c([0, 1]) \subset B$ . Podemos suponer que  $c(t) \neq p$  para todo  $t \in (0, 1]$ , pues si  $c(t_0) = p$  para cierto  $t_0 \in (0, 1]$  con  $c(t) \neq p$  para todo  $t \in (t_0, 1]$ , entonces  $\ell(c) > \ell(c|_{[t_0, 1]})$ , y  $c|_{[t_0, 1]}$  es una curva que vale  $p$  sólo en  $t_0$  (ver figura 6.5).

Utilicemos coordenadas polares. Como  $c(t) \in B$  para todo  $t$  y  $c(t) \neq p$  para todo  $t \neq 0$ , podemos escribir  $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$  para todo  $t \in (0, 1]$ , donde  $r : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $v : (0, 1] \rightarrow T_p M$  con  $|v(t)| = 1$  para todo  $t$ . Definimos  $r(0) = 0$ .

Definimos

$$\alpha : (0, 1] \times (0, 1] \rightarrow B, \quad \alpha(r, t) = \exp_p(rv(t))$$

de modo que  $c(t) = \alpha(r(t), t)$ . Entonces por la regla de la cadena,

$$c'(t) \stackrel{\text{r.c.}}{=} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{(r(t), t)} r'(t) + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(r(t), t)}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{(r(t), t)} &= \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r(t), t)} \exp_p(rv(t)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(v(t)) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(r(t), t)} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(r(t), t)} \exp_p(rv(t)) \stackrel{\text{r.c.}}{=} d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(r(t)v'(t)) \end{aligned} \quad (6.8)$$

<sup>1</sup>La conclusión se puede resumir como  $\ell(\gamma) = d(p, q)$  con la distancia introducida en la observación 2.0.26.

Usando el lema de Gauss, conseguimos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{(r(t),t)}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(r(t),t)} \right\rangle &= r(t) \langle d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(v(t)), d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(v'(t)) \rangle \\ &= r(t) \langle v(t), v'(t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así que por el teorema de Pitágoras,

$$|c'(t)|^2 = \left| \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{(r(t),t)} \right|^2 |r'(t)|^2 + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(r(t),t)} \right|^2 \quad (6.9)$$

Como  $r \mapsto \alpha(r, t) = \exp_p(rv(t)) = \gamma_{rv(t)}(1) = \gamma_{v(t)}(r)$  es una geodésica, entonces tiene rapidez constante igual a  $|v(t)| = 1$ , y por lo tanto

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{(r(t),t)} \right| = |\dot{\gamma}_{v(t)}(r(t))| = |v(t)| = 1$$

De la ecuación (6.9) deducimos que para todo  $t$ , se tiene

$$|c'(t)|^2 \geq |r'(t)|^2 + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(r(t),t)} \right|^2 \geq |r'(t)|^2 \quad (6.10)$$

Integrando,

$$\ell(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt \geq \int_0^1 |r'(t)| dt \geq \left| \int_0^1 r'(t) dt \right| = |r(1) - r(0)| = r(1) \quad (6.11)$$

y por lo tanto

$$\ell(c) \geq r(1) \quad (6.12)$$

Sea  $\bar{v} = \dot{\gamma}(0)$ , de manera que  $\gamma(t) = \gamma_{\bar{v}}(t)$  para todo  $t$ . Entonces  $\bar{v} = r(1)v(1)$ , pues  $\exp_p(\bar{v}) = \gamma_{\bar{v}}(1) = q = \exp_p(r(1)v(1))$ . Por lo tanto

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^1 |\dot{\gamma}(0)| dt = |\bar{v}| = r(1)$$

De la desigualdad (6.12) deducimos que  $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$ .

Probemos ahora la segunda parte del teorema. Supongamos que  $\ell(c) = \ell(\gamma)$ .

*Afirmación:*  $|c'(t)| = |r'(t)|$  para todo  $t$ .

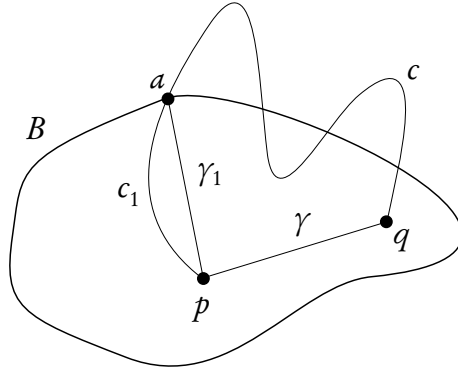


Figura 6.6

*Demostración:* como  $\ell(c) = \ell(\gamma) = r(1)$ , entonces la desigualdad (6.11) es una igualdad, así que  $\int_0^1 |c'(t)| dt = \int_0^1 |r'(t)| dt$ . La desigualdad (6.10) nos da que  $|c'(t)| \geq |r'(t)| > 0$  para todo  $t$ , así que en conclusión  $|c'(t)| = |r'(t)|$  para todo  $t$ . ■

Por lo tanto la desigualdad (6.10) es una igualdad, así que utilizando la expresión (6.8) conseguimos que

$$0 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(r(t), t)} = d(\exp_p)_{r(t)v(t)}(r(t)v'(t))$$

Como  $(\exp_p)|_{B(0, r)}$  es un difeomorfismo y  $r(t)v(t) \in B(0, r)$ , entonces  $d(\exp_p)_{r(t)v(t)}$  es un isomorfismo lineal, y por lo tanto debe ser  $r(t)v'(t) = 0$  para todo  $t$ , de donde  $v'(t) = 0$  para todo  $t$  y  $v$  es una función constante.

Entonces  $v(t) = v(1) = \frac{\bar{v}}{r(1)}$ , de donde

$$c(t) = \exp_p(r(t)v(t)) = \exp_p\left(r(t)\frac{\bar{v}}{r(1)}\right) = \exp_p\left(\frac{r(t)}{r(1)}\bar{v}\right) = \gamma_{\bar{v}}\left(\frac{r(t)}{r(1)}\right)$$

Como  $\gamma_{\bar{v}}(t) = \gamma(t)$  para todo  $t$ , deducimos que  $c$  es una reparametrización de  $\gamma$ .

• Supongamos ahora que  $c([0, 1]) \not\subset B$ . En este caso podemos escribir  $c$  como la concatenación  $c_1 c_2$ , siendo  $c_1$  una curva que une  $p$  con  $a \in \partial B$ , el primer punto donde  $c$  corta a  $\partial B$  (ver figura 6.6). Como tenemos el teorema probado para el caso en que la imagen de la curva está en  $B$ , entonces  $\ell(c_1) \geq \ell(\gamma_1)$ , siendo  $\gamma_1$  una geodésica que une  $p$  con  $a$  dentro de  $B$  (proposición 5.1.9). Por lo tanto

$$\ell(c) > \ell(c_1) \geq \ell(\gamma_1) > \ell(\gamma)$$

al ser  $a \in \partial B$  y  $q \in B$ , probando que  $\ell(c) > \ell(\gamma)$ . En particular  $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$  y además no puede darse en este caso que  $\ell(c) = \ell(\gamma)$ . □



**Corolario 6.0.15.** Si  $q \in B$ , entonces  $d(p, q) = \ell(\gamma)$ , siendo  $\gamma$  la única geodésica que une  $p$  con  $q$  dentro de  $B$  y  $d$  la función distancia de la observación 2.0.26.

En particular,  $B \subset M$  es la bola abierta de centro  $p$  y radio  $r$  con esta distancia.

*Demostración.* Para la segunda afirmación, basta observar que

$$B = \exp_p(B(0, r)) = \{\gamma_v(1) : |v| < r\} = \{\gamma_v(1) : \ell(\gamma_v) < r\} \quad \square$$

Ahora queremos ver el recíproco, i.e. si una curva es minimizante entonces es una geodésica. Para ello precisamos la siguiente

**Proposición 6.0.16.** Sea  $M$  una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita. Para todo  $p \in M$  existe  $W \subset M$  un entorno abierto de  $p$  y un  $\delta > 0$  tal que  $\exp_q(B(0, \delta)) \supset W$  para todo  $q \in W$  y  $\exp_q(B(0, \delta))$  es una bola normal de  $q$ .

Decimos que  $W$  es un *entorno totalmente normal* de  $p$  (es un “entorno normal” de todos sus puntos, con un radio que no depende del punto).

*Demostración.* Sea  $p \in M$ . Sea  $\mathcal{U} \subset TM$  como en la proposición 5.1.2. Definimos  $F : \mathcal{U} \rightarrow M \times M$  como  $F(q, v) = (q, \exp_q(v))$ . Entonces gracias a la proposición 5.1.7, tenemos que

$$dF_{(p,0)} = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Por el teorema de la función inversa, existe  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$  entorno abierto de  $(p, 0)$  tal que  $F(\mathcal{U}') \subset M \times M$  es un entorno abierto de  $F(p, 0) = (p, p)$  y  $F|_{\mathcal{U}'} : \mathcal{U}' \rightarrow F(\mathcal{U}')$  es un difeomorfismo.

Como  $\mathcal{U}'$  es abierto y por la definición de  $\mathcal{U}$ , podemos suponer que  $\mathcal{U}' = V' \times B(0, \delta)$  para cierto  $V' \subset M$  entorno abierto de  $p$ , y  $\delta > 0$  tal que  $B(0, \delta) \subset T_p M$ .

Sea  $W \subset M$  un entorno abierto de  $p$  de tal forma que  $W \times W \subset F(\mathcal{U}')$ . De esta forma, si  $q \in W$  entonces  $q \times W \subset F(q \times B(0, \delta))$  por cómo son  $\mathcal{U}'$  y  $F$  en la primera coordenada. Por lo tanto, por definición de  $F$  en la segunda coordenada se tiene que  $W \subset \exp_q(B(0, \delta))$  para todo  $q \in W$ .

Además  $F|_{\mathcal{U}'}$  es un difeomorfismo, y por lo tanto  $\exp_q(B(0, \delta))$  es una bola normal en  $q$ . □

*Observación 6.0.17.* Esta proposición junto con el teorema 6.0.14 prueban la siguiente versión más fuerte de la proposición 5.1.9: para todo  $p \in M$  existe  $W \subset M$  un entorno abierto de  $p$  y un  $\delta > 0$  tal que para todo  $q_1, q_2 \in W$  existe una única geodésica de longitud  $< \delta$  que minimiza la distancia entre  $q_1$  y  $q_2$ .

Se puede probar algo más fuerte: para todo  $p \in M$  y todo  $\epsilon > 0$  suficientemente chico, la bola normal de radio  $\epsilon$  centrada en  $p$  es convexa. Un subconjunto  $S \subset M$  se dice *convexo* si para todo  $p, q \in S$  existe una única geodésica de longitud  $d(p, q)$  contenida en  $S$ . Ver [dC], capítulo 3, sección 4.

---

**Corolario 6.0.18.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita. Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  es una curva que une  $p$  con  $q$  tal que  $\ell(\gamma) = d(p, q)$ , entonces  $\gamma$  se puede reparametrizar a una geodésica.*

*Demostración.* Sea  $t \in [0, 1]$  y  $W \subset M$  un entorno totalmente normal de  $\gamma(t)$ . Sea  $I \subset [0, 1]$  un intervalo cerrado tal que  $t \in I$  y  $\gamma(I) \subset W$ . Entonces  $\gamma|_I : I \rightarrow W$  une dos puntos de una bola normal, por cómo es  $W$ .

Por la hipótesis sobre  $\gamma$  y por el teorema 6.0.14, se tiene que  $\ell(\gamma|_I)$  es la longitud de una geodésica que une estos dos puntos en  $W$ . Por el teorema 6.0.14,  $\gamma|_I$  es una reparametrización de esta geodésica.

Este argumento vale para todo  $t$ , así que  $\gamma$  es una reparametrización de una geodésica.  $\square$

# Apéndice A

## Plano hiperbólico

Estudiemos con mayor profundidad al plano hiperbólico, introducido en el ejemplo 2.0.31.

Sea  $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  el semiplano superior estricto. Es una variedad de dimensión 2, al ser un abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

La *métrica hiperbólica*, o *métrica de Poincaré* en  $\mathbb{H}$  es

$$g_{(x,y)} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

De esta forma, en cada punto  $(x, y)$  esta métrica es la usual modificada por un factor escalar  $\frac{1}{y^2}$ .

**Coefficientes de la métrica** Consideremos  $\text{id} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  como parametrización. Calculemos los coeficientes de la métrica:

$$\begin{cases} E(x, y) = \langle (1, 0), (1, 0) \rangle_{(x,y)} = \frac{1}{y^2} \\ F(x, y) = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle_{(x,y)} = 0 \\ G(x, y) = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle_{(x,y)} = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

y por lo tanto

$$(g_{ij}(x, y))_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

**Símbolos de Christoffel** Para calcular los símbolos de Christoffel usamos la segunda identidad de Christoffel (3.4): por ejemplo, para  $\Gamma_{11}^1$ ,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_x - F(2F_x - E_y)) = 0$$

Análogamente, calculamos los demás símbolos, consiguiendo:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y} \end{cases}$$

**Curvatura** La curvatura de una superficie abstracta con una métrica riemanniana se define a través de la siguiente fórmula de Cálculo III, que expresa la curvatura en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y de los símbolos de Christoffel (es una de las ecuaciones de Gauss):

$$K := \frac{1}{E} \left( (\Gamma_{11}^2)_y - (\Gamma_{12}^2)_x + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \right)$$

Deducimos inmediatamente que la curvatura del plano hiperbólico es  $-1$ .

**Geodésicas** <sup>1</sup> Para encontrar las geodésicas del plano hiperbólico, resolveremos la ecuación de las geodésicas. En este caso, toda geodésica  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{2}{y} \dot{x} \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{1}{y} (\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

• Supongamos primero que  $x$  es constante. Entonces  $y$  satisface

$$\ddot{y} - \frac{1}{y} \dot{y}^2 = 0$$

Esta es una ecuación diferencial autónoma de segundo orden no lineal. El truco para resolverlas es introducir una variable  $v = \dot{y}$ . De esta forma, por la regla de la cadena,

$$\ddot{y} = \dot{v} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

de donde la ecuación diferencial queda así:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden separable. Integrando, obtenemos que  $v = c_1 y$ , así que  $\dot{y} = c_1 y$ . En conclusión, las geodésicas con  $x$  constante satisfacen

$$y(t) = c_1 e^{c_2 t}$$

<sup>1</sup>En esta sección encontramos directamente las geodésicas. Se ofrece un camino alternativo en el párrafo *Minimizantes*, que utiliza los resultados del párrafo *Isometrías de  $\mathbb{H}^2$* .

y en particular están definidas en todo  $\mathbb{R}$ .

• Supongamos ahora que  $x$  no es constante, de manera que  $\dot{x} \neq 0$ . Por la regla de la cadena, tenemos que  $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ , así que  $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ . Derivemos respecto de  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \stackrel{\text{r.c.}}{=} \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} \\ &\stackrel{\text{(A.1)}}{=} \frac{1}{\dot{x}^3} \left( \dot{x} \frac{1}{y} (\dot{y}^2 - \dot{x}^2) - \dot{y} \left( \frac{2}{y} \dot{x} \dot{y} \right) \right) \\ &= \frac{1}{y} \frac{1}{\dot{x}^2} (\dot{y}^2 - \dot{x}^2 - 2\dot{y}^2) = -\frac{1}{y} \left( 1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} \right) \\ &= -\frac{1}{y} \left( 1 + \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 \right) = -\frac{1}{y} \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Nos queda entonces la ecuación diferencial

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = -1$$

que utilizando la regla del producto, se simplifica a

$$\frac{d}{dx} \left( y \frac{dy}{dx} \right) = -1$$

Integrando, obtenemos  $y \frac{dy}{dx} = -x + \frac{a}{2}$ , que es una ecuación diferencial de variables separables. Separando e integrando nuevamente, obtenemos que  $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2}$ ; en definitiva,

$$x^2 + y^2 = ax + b, \quad \text{o equivalentemente,} \quad \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = b - \frac{a^2}{4}$$

Por lo tanto las geodésicas con  $x$  no constante describen semicircunferencias centradas en el eje  $Ox$ .

*Ejercicio A.0.19.* Probar que si parametrizamos una semicircunferencia como

$$t \mapsto \gamma(t) = A + B \tanh(t) + i \operatorname{sech}(t) \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$$

entonces  $\gamma$  es una geodésica de  $\mathbb{H}^2$ . Deducir que las geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ .<sup>2</sup>

• Como dos puntos de  $\mathbb{H}^2$  están o sobre una recta vertical o sobre una semicircunferencia centrada sobre el eje  $Ox$ , deducimos que dos puntos cualesquiera de  $\mathbb{H}^2$  se pueden unir mediante una única geodésica parametrizada por longitud de arco.

<sup>2</sup>Se aplica entonces el teorema de Hopf-Rinow (observación 5.1.10) que concluye que las geodésicas son las curvas minimizantes de  $\mathbb{H}^2$ . Cuando estudiemos las isometrías de  $\mathbb{H}^2$  podremos dar otra demostración de este hecho, sin usar el teorema de Hopf-Rinow (ver parágrafo *Minimizantes*).

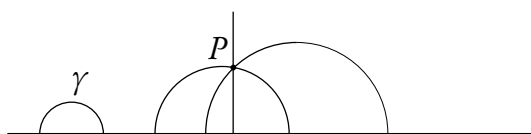


Figura A.1: Por el punto  $P$  pasan infinitas rectas paralelas a  $\gamma$

**La geometría hiperbólica** Si definimos como “recta” en  $\mathbb{H}^2$  a una geodésica, entonces se satisfacen todos los axiomas de la geometría euclídea, salvo el postulado quinto. Bajo la formulación de Playfair (1795), este dice que

*Por un punto exterior a una recta, se puede trazar a lo sumo una paralela a la recta dada.*

<sup>3</sup> La figura (A.1) muestra que este enunciado falla en la geometría hiperbólica. Se resolvió así en el siglo XVIII (Gauss, Lobachevski, Bolyai) una problemática planteada por Euclides: ¿es el quinto postulado independiente de los otros?

*[La imposibilidad de demostrar el postulado de las paralelas] es el escándalo de la geometría y la desesperación de los geómetras.*

*Jean le Rond d’Alembert*

**Isometrías de  $\mathbb{H}^2$**  Nuestro objetivo ahora es probar que todas las isometrías de  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$  que preservan la orientación estándar son transformaciones de Möbius  $T$  de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1 \quad (\text{A.2})$$

Sabemos de análisis complejo que la composición de transformaciones de Möbius se corresponde con la multiplicación de matrices, de manera que el grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^2$  que preservan la orientación será isomorfo al grupo especial lineal proyectivo

$$\text{PSL}_2(\mathbb{R}) := \frac{\text{SL}_2(\mathbb{R})}{\{\pm I\}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

*Ejercicio A.0.20.* Verificar que una  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como en (A.2) satisface  $T(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ .

Además, una  $T$  como en (A.2) es un difeomorfismo de  $\mathbb{H}$ , con inversa dada por  $T^{-1}(zw) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ , y preserva la orientación estándar de  $\mathbb{R}^2$ , al ser holomorfa.

<sup>3</sup>Del resto de la axiomática se deduce que siempre existe una.

• Verifiquemos ahora que una  $T$  como en (A.2) es una isometría. Usemos la identificación de  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ . Si  $z = x + iy$ , entonces

$$T(x, y) = \frac{1}{c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2} \left( ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd, (ad - bc)y \right) \quad (\text{A.3})$$

de manera que el diferencial de  $T$  en  $p = (x, y) \in \mathbb{H}^2$  es

$$dT_p = \frac{ad - bc}{(c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2)^2} \begin{pmatrix} (cx + d)^2 - c^2y^2 & 2(cx + d)cy \\ -2(cx + d)cy & (cx + d)^2 - c^2y^2 \end{pmatrix}$$

Sean  $V = (v_1, v_2), W = (w_1, w_2) \in T_p \mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^2$ . Entonces si  $T(p) = (u, v)$ ,

$$\langle dT_p(V), dT_p(W) \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{v^2} \langle dT_p(V), dT_p(W) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \frac{1}{v^2} V^t dT_p^t dT_p W \quad (\text{A.4})$$

Calculemos  $dT_p^t dT_p$ . Observar que  $dT_p$  es de la forma  $dT_p = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , de manera que  $dT_p^t dT_p = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$ . Este coeficiente  $\alpha^2 + \beta^2$  es

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{(ad - bc)^2}{(c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2)^4} \left( ((cx + d)^2 - c^2y^2)^2 + 4(cx + d)^2 c^2 y^2 \right) \\ &= \frac{(ad - bc)^2}{(c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$dT_p^t dT_p = \begin{pmatrix} \frac{(ad - bc)^2}{(c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(ad - bc)^2}{(c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2)^2} \end{pmatrix}$$

Comparar con el segundo término de (A.3); de esta forma, si seguimos la cuenta que comenzamos en (A.4),

$$\begin{aligned} \langle dT_p(V), dT_p(W) \rangle_{\mathbb{H}^2} &= \frac{1}{v^2} V^t \begin{pmatrix} \frac{(ad - bc)^2}{(c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(ad - bc)^2}{(c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2)^2} \end{pmatrix} W \\ &= \frac{1}{v^2} V^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W \\ &= \langle V, W \rangle_{\mathbb{H}^2} \end{aligned}$$

y entonces  $T$  es una isometría.

• Todas las isometrías de  $\mathbb{H}^2$  que preservan orientación son de la forma (A.2).

Recordamos el siguiente resultado de análisis complejo: toda función holomorfa  $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  biyectiva y conforme (con la métrica plana) es de la forma (A.2) (capítulo 8, teorema 2.4 de [SS]).

Como en la métrica hiperbólica tenemos que  $E = G$  y  $F = 0$ , entonces esta métrica es conforme a la euclídea (es un ejercicio de Cálculo III), por lo tanto los ángulos hiperbólicos son los mismos que los ángulos euclídeos. Deducimos que una isometría hiperbólica de  $\mathbb{H}^2$  es en particular una aplicación conforme respecto de la métrica euclídea. Esta observación y el teorema recién citado concluyen lo deseado.

**Minimizantes** Sea  $0 < a < b$  y sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  tal que  $\gamma(t) = (0, t)$  para todo  $t$ . Probemos que  $\gamma$  realiza la distancia entre sus extremos, i.e.  $d(\gamma(a), \gamma(b)) = \ell(\gamma)$ .

Para ver esto, consideramos una curva cualquiera  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  tal que  $\alpha(a) = \gamma(a)$ ,  $\alpha(b) = \gamma(b)$ . Escribamos  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Entonces

$$\begin{aligned} \ell(\alpha) &= \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{y(t)^2}} dt \geq \int_a^b \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log(b/a) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log(b/a)$$

entonces  $\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma)$ . Como  $\alpha$  es arbitraria, esto prueba que  $\gamma$  realiza la distancia entre sus extremos, y de hecho la distancia vale  $\log(b/a)$ : a medida que el extremo inferior de  $\gamma$  se acerca al eje  $Ox$ , la longitud aumenta exponencialmente.

Probemos ahora que las semicircunferencias centradas en el eje  $Ox$  son minimizantes de  $\mathbb{H}^2$ . Sea  $C$  una circunferencia centrada en el eje  $Ox$  que lo corta en dos puntos  $a$  y  $b$ . Por análisis complejo, existe una transformación de Möbius del plano extendido,  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tal que  $T(C)$  es una recta vertical que corta al eje  $Ox$  en un punto  $p$ , con  $T(a) = p$  y  $T(b) = \infty$  (ver figura A.2).

Sea  $B$  el eje  $Ox$ . Como  $T$  es de Möbius y  $B$  es una recta,  $T(B)$  es una recta o una circunferencia. Como  $b \in B$  y  $T(b) = \infty$ , entonces  $\infty \in T(B)$  y por lo tanto  $T(B)$  debe ser una recta.

Toda transformación de Möbius es un mapa conforme, así que debe preservar el ángulo recto que hay entre  $B$  y  $T(C)$ : esto es,  $T(B)$  debe ser una recta perpendicular a  $T(C)$ , que pasa por  $p$  ya que  $a \in B$  y entonces  $p = T(a) \in B$ . Por lo tanto  $T(B) = B$ .

Como  $T$  es holomorfa, entonces  $T$  preserva orientación; como además  $T(B) = B$ , entonces necesariamente  $T(\mathbb{H}^2) \subset \mathbb{H}^2$ . Por el resultado de análisis complejo que recordamos al final párrafo anterior, los coeficientes de  $T$  son reales, y por lo tanto  $T$  es de la forma (A.2): es entonces una isometría del plano hiperbólico.

En particular,  $T^{-1} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  lleva geodésicas en geodésicas (ejercicio 5.0.21). Llamémosle ahora  $C$  a  $C \cap \mathbb{H}^2$ . Observar que  $T^{-1}(T(C)) = C$ : como  $T(C)$  es una recta



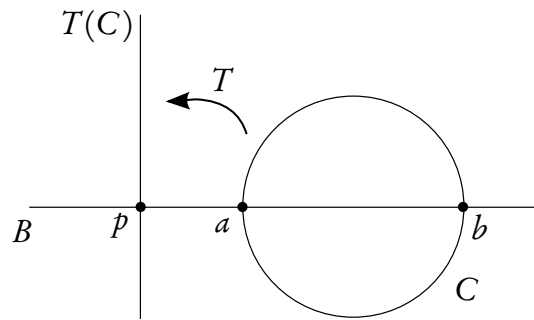


Figura A.2

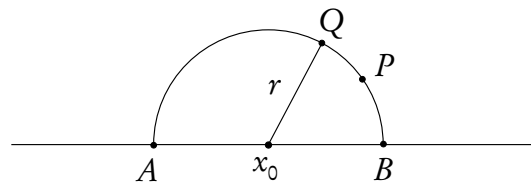


Figura A.3

vertical, la podemos parametrizar a una geodésica, y por lo tanto podemos parametrizar  $C$  a una geodésica. Como para cualquier par  $(p, v) \in T\mathbb{H}^2$  existe una recta vertical o una semicircunferencia centrada en el origen que pasa por  $p$  con velocidad  $v$ , por unicidad de las geodésicas deducimos que estas son todas las geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ . Esto da una manera diferente de hallar las geodésicas a la del párrafo *Geodésicas*.

Pero hemos probado algo más. Como  $T^{-1}$  es una isometría, entonces preserva distancias. En particular, preserva la propiedad de minimización: como ya probamos que  $T(C)$  es minimizante (al ser una recta vertical), entonces  $T^{-1}(T(C)) = C$  es minimizante.

En conclusión, las curvas minimizantes de  $\mathbb{H}^2$  son las rectas verticales y las semicircunferencias centradas en el eje  $Ox$ .

*Ejercicio A.0.21.* Sean  $P, Q \in \mathbb{H}^2$ . Probar que

$$d(P, Q) = \left| \log \left( \frac{AP/BP}{AQ/BQ} \right) \right|$$

donde  $A, B$  son los puntos indicados en la figura (A.3) y  $AP, BP, AQ, BQ$  son distancias euclídeas. (Sugerencia: utilizar la parametrización  $t \mapsto (x_0 + r \cos t, r \sin t)$ ).

# Bibliografía

- [dC] Manfredo P. Do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser Boston, 1992.
- [GP] Victor Guillemin y Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, NJ 5.6 (1974): 7.
- [Ivo] Carlos Ivorra, *Topología algebraica con aplicaciones a la geometría diferencial*, disponible en <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm>
- [Mat] Yukio Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Vol. 208. American Mathematical Society, 2002.
- [Mil] John Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.
- [Lee1] John Lee *Introduction to Smooth Manifolds*. Vol. 218, Graduate Texts in Mathematics, SpringerVerlag, New York, 2003.
- [Lee1b] John Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd. Edition. Vol. 218. Springer, 2012.
- [Lee2] John Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Vol. 176. Springer Verlag, 1997.
- [OR] Enrique Outerelo y Jesús Ruiz, *Mapping degree theory*, Vol. 108. American Mathematical Society, 2009.
- [Shif] Theodore Shifrin, *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*, University of Georgia, 2012.
- [SS] Stein Shakarchi
- [Wei] Jan Weidner, *What is torsion in differential geometry intuitively?*, <http://mathoverflow.net/questions/20493>.
- [Tu] Loring Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer Science+ Business Media, 2011.

# Índice alfabético

- Acción
  - por difeomorfismos, 102
  - por homeomorfismos, 101
  - por isometrías, 121
  - propiamente discontinua, 101
- Acción continua, 76
- Ángulo, 119
- Antípoda, 45
- Atlas, 97
  - diferenciable, 98
  - maximal, 98
- Atractor, 51
- Bola normal, 143
- Cambio de coordenadas, 97
- Campo
  - de vectores, 46, 111
  - a lo largo de una curva, 130
  - paralelo, 134
  - norte-sur, 66
- Característica de Euler, 66
- Chichón, 28
- Circulación, 52
- Clasificación de las 1-variedades, 21
- Coefficientes de la métrica, 118
- Conexión, 122, 125
  - compatible con la métrica, 125
  - simétrica, 126
- Corchete de Lie, 114
- Curva, 106
- Derivación, 102, 104, 113
- Derivada, 106
  - covariante, 131
- Difeomorfismo, 100
  - local, 100
- Diferencial, 105
  - total, 109
- Dipolo, 52
- Distancia en una variedad riemanniana, 119
- Ecuación de las geodésicas, 139
- Embedding*, 25
- Encaje, 25
- Entorno totalmente normal, 153
- Entorno tubular, 84
- Esfera geodésica, 146
- Espacio
  - proyectivo, 102
  - tangente, 104
- Estructura diferenciable, 98
- Fórmula
  - de Koszul, 129
  - del grado, 72
- Fibrado
  - normal, 81
  - tangente, 109
- Flujo
  - de una ecuación diferencial, 32
  - geodésico, 142
- Forma de volumen, 120
- Función
  - chichón, 28, 30

- coordenada, 107
  - diferenciable, 100
- Funciones componentes, 112
- Geodésica, 138
  - radial, 146
- Gradiente, 88
- Grado
  - de Brouwer, 41, 44
  - módulo 2, 38
- Grupo
  - de holonomía, 135
  - especial ortogonal, 76
  - ortogonal, 76
  - topológico, 76
- Homotopía, 31
- Índice de una singularidad, 51, 56
- Inmersión, 25
- Isometría, 120
  - local, 120
- Isotopía, 32, 36
- Lema
  - de extensión, 30
  - de Gauss, 146
  - de homogeneidad, 33
  - de homogeneidad de las geodésicas, 140
  - de homotopía, 38, 43
  - de isotopía, 35
  - de la pila de discos, 8
  - de simetría, 145
  - del borde, 42
- Longitud, 119
- Mapa
  - antipodal, 45
  - de Gauss, 57
- Mapa exponencial, 141
- Métrica
  - hiperbólica, 121, 155
  - riemanniana, 117
- Norma, 119
- Orientación, 98
- Orientación preimagen, 42
- Ortogonalidad, 119
- Parametrización, 97
- Partición de la unidad, 29
- Proyección, 109
- Proyección estereográfica, 10
- Punto
  - crítico, 7
  - de silla, 52
  - regular, 7
- Pushforward, 48
- Referencial local, 47, 112
- Representación en coordenadas, 100
- Repulsor, 51
- Signo, 41
- Símbolos de Christoffel, 123, 127
- Singularidad, 46
  - no degenerada, 59, 61
- Sumersión, 25
- Superficie parametrizada, 144
- Teorema
  - de Gauss-Bonnet, 74
  - de Hopf, 45
  - de Hopf-Rinow, 143
  - de la bola peluda, 46
  - de la función inversa, 106
  - de la no-retracción, 22
  - de Levi-Civita, 127
  - de partición de la unidad, 29
  - de Poincaré-Hopf, 63
  - de preimagen de valor regular, 19
  - de punto fijo de Brouwer, 22, 24
  - de Sard, 13

## BIBLIOGRAFÍA

---

- de Stone-Weierstrass, 23
- de Whitney, 101
- del entorno tubular, 84
- fundamental del álgebra, 12
- Toro, 102
  - plano, 121
- Torsión, 126
- Transporte paralelo, 135
- Valor
  - crítico, 7
  - regular, 7
- Variedad
  - cociente, 102
  - completa, 143
  - contráctil, 40
  - diferenciable, 98
  - riemanniana, 118
  - topológica, 97