Consideraciones sobre la lógica y sobre el funcionamiento de la matemática

Bruno Stonek
bruno@stonek.com

21 de marzo de 2012

El objetivo de este documento es considerar breve e informalmente algunas observaciones elementales de carácter lógico. La matemática descansa sobre la lógica; entre otras cosas, podemos decir que es la lógica la que nos indica qué razonamientos son válidos o inválidos.

Esto es de suprema importancia, porque, muy simplísticamente, podemos decir que la matemática *es demostrar teoremas a partir de axiomas y reglas lógicas* (la matemática es más que esto, pero aceptémoslo por ahora).

Hay muchos términos en esa frase en itálica que vale la pena aclarar. ¿Qué son las *reglas lógicas*? Son los fundamentos más primitivos de la matemática, es la *gramática* de la matemática. Tenemos que establecer un lenguaje (matemático) y una gramática que nos permita formar frases coherentes y potencialmente correctas.

¿Qué son los *axiomas*? Cada *teoría* descansa sobre un conjunto de axiomas. Nada surge de la nada. En algún lado hay que empezar. Debe haber ciertas afirmaciones que tomemos como verdaderas: la base de nuestro edificio matemático a partir del cual vamos a demostrar los *teoremas*. Observar la diferencia entre *axioma* y *teorema*: un axioma es algo que se *asume* verdadero (una regla del juego, digamos), a partir de lo cual, junto con las reglas lógicas y los teoremas previamente demostrados, se *demuestra* un teorema. Los teoremas a veces también adquieren nombres como *proposición*, *lema*, *corolario*.

Finalmente, ¿qué es *demostrar*? Lo que se demuestra es una *sentencia* (una frase), como por ejemplo

$$\text{“si } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es una función derivable entonces es continua”} \tag{1}$$

o “todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base”, y en ese momento adquiere el estatus de *teorema* (siendo antes meramente una *conjetura*). Lo que hacemos es utilizar la *hipótesis* conjunto con las reglas lógicas y los teoremas previamente demostrados para llegar a concluir la *tesis*.

Una sentencia que queremos demostrar que *no* es verdadera, no se demuestra, sino que se *refuta*, o en otras palabras, se demuestra su negación (refutar que “toda función continua es derivable” consiste en demostrar que “existen funciones continuas no derivables”, es decir, en exhibir un *contraejemplo*). Más llanamente, ¿cómo se demuestra que no todo número real es positivo? Exhibiendo un número real que no sea positivo. Por ejemplo, -4. En este caso, -4 es un contraejemplo a la afirmación “todo número real es positivo”. Observar que basta con exhibir *un* contraejemplo. Sí, es cierto que hay muchos otros números reales que no son positivos, por ejemplo, todo x que cumple $x < -4$, pero a efectos de demostrar que hay números reales que no son positivos, no es de interés.

Identifiquemos hipótesis y tésis en el ejemplo (1). La hipótesis es: “$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable.” La tesis es: “f es continua”. Explicamos *qué es* una demostración, pero no dijimos *cómo se hace* una demostración. Hay libros enteros dedicados a intentar trasmitir esta habilidad (e.g.[1] *How to Solve It*, de Pólya). Esto ya nos dice que es una habilidad que hay que trabajar mucho para conseguir. Además, el hecho de que existan grandes conjeturas que demoran años o siglos (o milenios) cuyas demostraciones o refutaciones eludan a los más grandes matemáticos, muestra que el arte de *demostrar* no es un procedimiento mecánico y rutinario. Más abajo comentaremos alguna estrategia elemental (y bien general) de prueba.

En todo caso, no hay que perder de vista que la tesis es *aquello a lo que queremos llegar*. En el ejemplo anterior, “f es continua” es aquello a lo que queremos llegar, por lo tanto (*¡a menos que estemos procediendo por absurdo!* Ver parágrafo siguiente.) *no podemos bajo ningún concepto* decir “como f es continua, entonces...”. Al contrario, la sentencia “f es continua” debe ser la frase final de la demostración.

Es importante también **justificar** cada paso. Cada deducción debe estar propiamente justificada. Uno tiene que ser capaz de responder a la pregunta “¿por qué?” frente a cada afirmación que hace. Esto es de crucial importancia, además de ser una buena herramienta de verificación de demostraciones. Una justificación es básicamente remitirse a una propiedad básica ya demostrada, o remitirse a un teorema, o remitirse a un ejercicio ya resuelto (cuyo estátus lógico es el mismo que el de un teorema), o remitirse a un axioma.

Finalmente, aclaremos lo que es una *definición*. Hay ciertas entidades que uno no define, son los *conceptos primitivos* de la teoría. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos, no se define lo que es un conjunto, ni el símbolo $\in$. Uno da una lista de axiomas de propiedades que cumplen los conjuntos y la relación de pertenencia. Pero cualquier otra noción que utilicemos debe ser *definida*. Por ejemplo, una función no es un concepto primitivo, es un concepto que *se define*. Un vector es un concepto que *se define*[2]. Y un número natural, un número real, la intersección de dos conjuntos, etc.

[1] *exempli gratia*, abreviando *por ejemplo*.

[2] Observemos que la “definición” que a veces se adopta de “vector”, como “una entidad matemática que tiene una magnitud, una dirección y un sentido” está mal, por varias razones. La primera siendo, ¿qué es una “entidad matemática”? Por ejemplo, un tren tiene una magnitud, una dirección y un sentido. ¿Y por qué no habría de ser un tren una “entidad matemática”? Al fin y al cabo nunca dijimos lo que era ser una “entidad matemática”. Aquí vemos la importancia de ser realmente *preciso* en sus afirmaciones. La segunda siendo que esta definición no se generaliza bien pues hay “vectores” que no tienen ningún “sentido” razonable asociado.

Reductio ad absurdum La reducción al absurdo es una frecuente estrategia de demostración. Para el ejemplo (1) el razonamiento sería así. "Sea f una función derivable. Supongamos que no es continua. En este caso, pasaría tal y tal cosa [...] y en conclusión, $0 = 1$. Esto es absurdo, pues sabemos que $0 \neq 1$. Entonces no puede ser cierto que f no sea continua (pues en este caso, ¡sería $0 = 1$!), es decir, debe ser f continua."

Puede suceder que el absurdo no pase por contradecir algún axioma o teorema previo ($0 \neq 1$ en este caso), sino por contradecir la propia hipótesis. Es decir, algo de este estilo: "Sea f una función derivable. Supongamos que no es continua. En este caso, pasaría tal y tal cosa [...] y en conclusión, f no sería derivable. Esto es absurdo (asumimos que f era derivable), así que necesariamente es f continua". Este tipo de reducción al absurdo es especialmente corriente, y se llama *demostrar el contrarrecíproco*. Ya comentaremos esto más abajo.

Algunas consideraciones lógicas

Llamémosle *sentencias* a las frases *asertivas*, es decir, a las frases que afirman algo, y por lo tanto son susceptibles de ser verdaderas o falsas. Por ejemplo, "José tiene el pelo verde", o "$ad - bc = 0$". Una frase que no es una sentencia es, por ejemplo, "Comete todas las verduras."

Si la sentencia A depende de una variable x, notemos $A(x)$. Por ejemplo, $A(x)$ puede ser "x es un número real".

Tenemos ciertas *conectivas lógicas* y *cuantificadores* que permiten formar nuevas sentencias a partir de sentencias dadas.

Conjunción Notemos $A \wedge B$ a la sentencia que entendemos como "A y B", es decir, la sentencia que es verdadera si y sólo si A y B son verdaderas.

Disyunción Notemos $A \vee B$ a la sentencia que entendemos como "A o B", es decir, a la sentencia que es verdadera si y sólo si A es verdadera o B es verdadera. Aquí debemos tener cuidado, porque este "o" debemos tomarlo como no excluyente. Es decir, si A y B son verdaderas a la vez, entonces $A \vee B$ sí es verdadera.

Ejemplo de "o" no excluyente (el que está representando $\vee$): "Si tiene notas tan altas es que es muy inteligente o muy estudiosa". No estamos excluyendo la posibilidad de que sea muy inteligente *y* sea muy estudiosa.

Ejemplo de "o" excluyente (que **no** es el $\vee$): si la azafata en el avión nos pregunta "¿Pollo o pasta?", está excluyendo la posibilidad de pollo *y* pasta (por más que pueda haber algún gracioso goloso que le pida ambos). A veces en español agregamos un "o" adicional delante para enfatizar que el "o" es excluyente. Por ejemplo, "los estudiantes de Álgebra Lineal I deben inscribirse o al grupo 60 o al grupo 70".

Negación Notemos $\neg A$ a la sentencia que entendemos como "no A", es decir, la sentencia que es verdadera si y sólo si A es falsa. Por ejemplo, si A es "Mercedes es rubia", entonces $\neg A$ es "No es cierto que Mercedes sea rubia", o menos enrevesadamente, "Mercedes no es rubia".

Implicación Notemos $A \Rightarrow B$ a la sentencia que entendemos como "si A entonces B". Hay que observar que $A \Rightarrow B$ es falso solamente cuando A es verdadero y B es falso. (Pausa para la reflexión.) Si A y B son verdaderas, la implicación es verdadera. Pero también si A es falsa, sin importar la verdad de B. Es decir, la sentencia "Si los peces ladran, entonces Montevideo fue fundada por James Bond" es verdadera. Nos dicen Ferrater Mora y Leblanc en *Lógica Matemática*, p.35:

> Esta interpretación del condicional es llamada *interpretación material*. Fue conocida ya por Filón de Megara (siglo IV a. de C.) y ampliamente utilizada por los estoicos y por algunos lógicos medievales. Luego cayó en el olvido y sólo comenzó a ser de nuevo utilizada por G. Frege (1879) y Ch. S. Peirce (1885). Fué muy debatida por los lógicos ya en la antigüedad [...]

Si $A \Rightarrow B$, decimos que A es una *condición suficiente* para que ocurra B, y que B es una *condición necesaria* para que ocurra A. Por ejemplo, es suficiente ser francés para ser europeo, pero no es necesario. También es necesario tener cuatro patas para ser un perro, pero no es suficiente.

Decimos que $B \Rightarrow A$ es el *recíproco* de $A \Rightarrow B$.

Observar finalmente que el hecho que la sentencia $A \Rightarrow B$ sea verdadera no nos dice nada a priori sobre la verdad de A o de B. Es decir, probar que $A \implies B$ no es probar que vale A, ni probar que vale B, es probar que *siempre que se cumple A, se cumple B*.

Equivalencia Notemos $A \Leftrightarrow B$ a la sentencia que entendemos como "A si y sólo si B". Por "si y sólo si" debemos entender dos cosas: *si*, es decir "A si B", es decir $B \Rightarrow A$ (e.g. "Hay nubes si llueve"); y *sólo si*, es decir "A sólo si B", es decir $A \Rightarrow B$ (e.g. "Llueve sólo si hay nubes").

Por lo tanto, demostrar que $A \Leftrightarrow B$ es demostrar tanto que $A \Rightarrow B$ (implicación directa) como que $B \Rightarrow A$ (implicación recíproca).

Es muy importante tener bien clara la diferencia entre $A \Rightarrow B$ y $A \Leftrightarrow B$. La segunda afirmación contiene a la primera (es una afirmación *más fuerte*). Pero puede pasar que $A \Rightarrow B$ no signifique que $B \Rightarrow A$. Por ejemplo, si llueve entonces hay nubes, pero no significa que si hay nubes entonces llueve. En otras palabras, una condición suficiente no tiene por qué ser necesaria (y recíprocamente).

Cuantificador existencial Sea $A(x)$ una sentencia. Notemos $\exists x : A(x)$ a la sentencia que entendemos como "existe x tal que $A(x)$ es verdadera". Por ejemplo, si $A(x)$ es "ser una galletita", entonces la sentencia $\exists x : A(x)$ se entiende como "existe x que es una galletita", o en un español más correcto, "existe una galletita".

Esta sentencia es verdadera. Observar que no estamos diciendo nada sobre el *número* de galletitas que existen, sencillamente estamos afirmando que existe *una* galletita. Para demostrar que existe una galletita, no es necesario ir a la góndola del supermercado y mirar que hay miles de galletitas de diferentes tipos, basta con alcanzar el viejo paquete de galletitas que tenemos en el escritorio, y exhibir las últimas que allí quedan. Es importante tener presente que no estamos afirmando que exista una *única* galletita.

La unicidad merece su propio símbolo. Si queremos decir que existe *un único x* que cumple $A(x)$ (es decir, no sólo $\exists x : A(x)$, sino que además ese x es único), entonces escribiremos

$\exists! x : A(x)$. Por ejemplo, $\exists! x : (x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x^2 = 2)$ (existe una única raíz cuadrada real positiva de 2).

Observar que $\exists! x : A(x)$ es verdadera si y sólo si es verdadera $\exists x : A(x) \wedge (A(y) \wedge A(z) \Rightarrow y = z)$. Esta es la definición formal de $\exists! x : A(x)$.

Un último ejemplo: la sentencia $\exists x : x = 2$ no proporciona gran información, apenas afirma que existe el número 2.

Cuantificador universal Sea $A(x)$ una sentencia. Notemos $\forall x A(x)$ a la sentencia que entendemos como "para todo x se tiene que $A(x)$ es verdadera". Por ejemplo, si $A(x)$ es "ser una galletita", entonces la sentencia "$\forall x A(x)$" no es verdadera, porque existen entidades que no son galletitas: yo existo (al menos eso pretende Descartes) y no soy una galletita (de esto creo poder convencerme solo).

Si la sentencia $A(x)$ es $x^2 = (-x)^2$, entonces la sentencia $\forall x \in \mathbb{R}\ A(x)$ es verdadera. Para *demostrar* esto no basta con exhibir, por ejemplo, que $1^2 = (-1)^2$ y que $2^2 = (-2)^2$, hay que exhibir una *demostración* de que esto vale *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Cómo se relacionan Ahora veamos cómo se relacionan estas conectivas y cuantificadores. Es importante que se convenzan de cada ítem.

- La sentencia $\neg(A \vee B)$ es verdadera si y sólo si es verdadera $(\neg A) \wedge (\neg B)$.
- La sentencia $\neg(A \wedge B)$ es verdadera si y sólo si es verdadera $(\neg A) \vee (\neg B)$.
- La sentencia $A \Rightarrow B$ es verdadera si y sólo si es verdadera $(\neg A) \vee B$. Esto se toma a veces como *definición* de $A \Rightarrow B$.
- La sentencia $\neg(\exists x : A(x))$ es verdadera si y sólo si es verdadera $\forall x \neg A(x)$.
- La sentencia $\neg(\forall x A(x))$ es verdadera si y sólo si es verdadera $\exists x : \neg A(x)$.
- (*Contrarrecíproco*) La sentencia $A \Rightarrow B$ es verdadera si y sólo si es verdadera $\neg B \Rightarrow \neg A$ (que se llama *contrarrecíproco* de $A \Rightarrow B$). Se deduce entonces que $A \Leftrightarrow B$ es verdadera si y sólo si $(\neg A) \Leftrightarrow (\neg B)$ es verdadera.

  Por ejemplo, "si llueve entonces hay nubes" es verdadera si y sólo si es verdadera "si no hay nubes entonces no llueve".

  Otro ejemplo: decimos que una función $f : X \to Y$ es *inyectiva* si para todo $x, y \in X$ se cumple $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Considerando el contrarrecíproco, obtenemos que probar que una función es inyectiva es equivalente a probar que para todo $x, y \in X$ se cumple $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

  Un ejemplo de álgebra lineal: demostrar "si $\{(a, b), (c, d)\}$ son linealmente dependientes entonces $ad - bc = 0$" es equivalente a demostrar "si $ad - bc \neq 0$ entonces $\{(a, b), (c, d)\}$ son linealmente independientes".

Estas relaciones lógicas son **muy importantes**: *cualquier* sentencia matemática viene dada por una combinación de estas conectivas y cuantificadores. Asegúrense de comprenderlas. Además de ayudarnos a entender mejor los enunciados que se nos presenten, nos proveen también con estrategias para su demostración.

Por ejemplo: si se nos pide probar que la sentencia $\forall x(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists y : y^2 = x)$ es falsa, lo que tenemos que probar es que existe un racional que no tiene raíz cuadrada.

En efecto,

$$\begin{aligned}\neg(\forall x(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists y : y^2 = x)) &\equiv \exists x : \neg(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists y : y^2 = x)\\ &\equiv \exists x : \neg(x \notin \mathbb{Q} \vee \exists y : y^2 = x)\\ &\equiv \exists x : x \in \mathbb{Q} \wedge \forall y(y^2 \neq x)\end{aligned}$$

donde $A \equiv B$ es una abreviatura lógica para "la sentencia "A" es verdadera si y sólo si la sentencia "B" es verdadera".

Otras consideraciones generales Es importante *formar bien sus frases*. Así como hablar con corrección en español posibilita la comunicación, es importante hablar bien en matemática; de lo contrario puede haber confusiones. Por ejemplo, es importante relacionar bien las sentencias que uno afirma. Si uno escribe $x = 2$ y en la línea siguiente escribe $x^2 = 4$, ¿qué está diciendo? ¿Está diciendo que la primera sentencia implica la segunda, o está diciendo que son equivalentes? Si quiso decir $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$, entonces está razonando con corrección, pero si quiso decir $x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$ (o aún $x = 2 \Leftarrow x^2 = 4$), entonces está equivocándose, porque $(-2)^2 = 4$ y sin embargo $-2 \neq 2$.

También es importante distinguir una buena demostración de una demostración *simbólica*. Una demostración no es mejor por ser expresada únicamente con símbolos. De hecho, si recién estamos empezando a agarrarle la mano a las demostraciones, al contrario, es preferible ser verborrágico a ser parco con el lenguaje. Es especialmente bueno explicitar la hipótesis y la tesis en la demostración. Por ejemplo, "sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Queremos ver que es continua. Sea entonces $\epsilon > 0$. Queremos ver que existe un $\delta > 0$ tal que...". Una demostración que use más palabras no tiene por qué ser incompleta o informal (y recíprocamente, usar sólo chirimbolos no garantiza la correctitud de una demostración, tan sólo ofusca el texto y obstruye la legibilidad).

Supongamos que tenemos que demostrar que todo número real satisface la sentencia A. Entonces, una demostración puede empezar así: "Sea x un número real." y terminar por "Entonces $A(x)$." Eso concluye la demostración, porque el número real x que habíamos fijado al comienzo de la demostración era *arbitrario*. Observar la diferencia entre *fijo* y *arbitrario*: el x en la demostración está *fijo* (pues dijimos "sea x un número real", que a veces se dice "fijo x un número real"), pero es *arbitrario*, porque es un número real cualquiera. Por lo tanto al demostrar $A(x)$ estamos demostrando que vale A para cualquier número real.

Otra consideración al respecto es que la variable se puede llamar x como se puede llamar cualquier cosa. Podemos perfectamente empezar la demostración por "Sea $coco \in \mathbb{R}$", y terminarla por "Entonces $A(coco)$". El que la variable se llame "x" no conlleva ningún significado extra.

Ya mencionamos que demostrar es una habilidad que no es mecánica. No hay un algoritmo para demostrar un teorema. Sin embargo, Pólya en el libro antes mencionado (*How to Solve It*) sugiere los siguientes pasos para resolver un problema matemático:

- Primero, debes comprender el problema.

- Luego de comprenderlo, traza un plan.
- Lleva a cabo el plan.
- Reconsidera tu trabajo. ¿Cómo podrías mejorarlo?

Estas sugerencias al ser de una tan gran generalidad (estamos hablando de *cualquier* problema matemático en cualquier área) tienen una utilidad acotada, sin embargo no se debe subestimar su importancia, especialmente la del primer ítem, en apariencia evidente. Pólya lo desarrolla:

- ¿Qué se te pide hallar o demostrar?
- ¿Puedes reformular el problema en tus propias palabras?
- ¿Puedes hacer una figura o diagrama que te ayude a entender el problema?
- ¿Hay suficiente información como para hallar una solución?
- ¿Entiendes todas las palabras usadas en el enunciado del problema?

Otro principio lógico que no mencionamos es el del *principio del tercero excluido*, que dice que dada cualquier sentencia A, la sentencia $A \vee (\neg A)$ es verdadera. Esto debería ser evidente, y por eso no lo mencionamos antes (*o soy rubio, o no lo soy*). Sin embargo, es la base de una demostración *casuística*, es decir, que distingue en casos.

Por ejemplo, si queremos demostrar que una sentencia $A(x)$ es cierta para todos los números reales x, entonces podemos razonar así. Sea x un número real. Queremos demostrar $A(x)$. Ahora bien, por el principio del tercero excluido se tiene que $x > 0$ o que $x \not> 0$. Basta, por lo tanto, demostrar que vale $A(x)$ si $x > 0$ o si $x \not> 0$. Si $x > 0$, entonces [cuentas] y llegamos a $A(x)$. Si $x \not> 0$ (es decir, si $x \leq 0$), entonces [otras cuentas] y llegamos a $A(x)$. Hemos terminado, entonces, la demostración.

A veces una situación exhibe una simetría tal que podemos *sin pérdida de generalidad* hacer una suposición extra. Ilustrémoslo con un ejemplo. Demostremos que

> Si tres objetos están pintados o de azul o de rojo, entonces debe haber dos objetos pintados del mismo color.

Demostración: asumamos sin pérdida de generalidad que el primer objeto es rojo. Si alguno de los otros dos objetos es rojo, terminamos; de lo contrario, los otros dos objetos son azules, y también terminamos. $\square$

Observar que esto funciona porque exactamente el mismo razonamiento (intercambiando "rojo" con "azul") funciona si hubiéramos asumido lo contrario, i.e.[3] que el primer objeto es azul. La razón de fondo es que no importa el orden de los objetos.

[3] *id est*, que abrevia *esto es*, o *es decir*.

Ejercicios[4]

Ejercicio 1. Expresar la negación, el recíproco y el contrarrecíproco de las siguientes sentencias.

1. Si es martes, debemos estar en Brasil.
2. Me iré a casa si ya pasó la medianoche.
3. El perro del hortelano no come ni deja comer al amo.
4. $\forall x \exists y : x \neq y$.

Ejercicio 2. Negar las siguientes sentencias.

1. $e^5 > 0$.
2. $3 < 5$ o $7 \geq 8$.
3. $\sin(\frac{\pi}{2}) < 0$ y $\tan(0) \geq 0$.
4. Si $y = 3$ entonces $y^2 = 7$.
5. $w - 3 > 0$ implica que $w^2 + 9 > 6w$.
6. $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$.
7. Existe un entero Q tal que para todos los reales $x > 0$ existe un natural k tal que si $x \leq k$ entonces Q es supercalifragilisticoespialidoso.
8. Para todo real $\epsilon > 0$ existe un natural k tal que para todo natural n se cumple $|a_n - k^2| < \epsilon$.

Ejercicio 3. Supongamos que los valores de x son vacas. Sea $A(x)$ la sentencia "x es marrón", $B(x)$ la sentencia "x tiene cuatro años", y $C(x)$ la sentencia "x tiene manchas blancas". Expresar las siguientes sentencias simbólicamente.

1. Hay una vaca marrón.
2. Todas las vacas tienen cuatro años.
3. Hay una vaca marrón con manchas blancas.
4. Todas las vayas de cuatro años tienen manchas blancas.
5. Existe una vaca tal que si tiene cuatro años, entonces no tiene manchas blancas.
6. Toda vaca es marrón si y sólo si no tiene cuatro años.
7. No hay vacas marrones.

[4] Es fundamental observar que la *verdad o falsedad* de las sentencias no entra nunca en juego en estos ejercicios.