Universidad de la República

Facultad de Ciencias

El proceso de formalización de la lógica matemática

La crisis de la geometría euclídea

Bruno Stonek
bruno@stonek.com

26 de julio de 2011

Resumen

En este ensayo nos proponemos explicar por qué la lógica matemática sufrió una formalización tan radical a comienzos del siglo XX, a través del estudio de un caso particular: la geometría (no) euclídea y la historia de la polémica del quinto postulado, desde Euclides hasta Hilbert.

Índice

Introducción

Euclides comienza el libro primero de sus *Elementos* (circa 300 A.C.) con una lista de *definiciones*, la primera de las cuales es:

> *Un punto es lo que no tiene partes.*

Veintidós siglos después (en 1899), Hilbert comienza sus *Fundamentos de Geometría* de esta manera:

> *Consideremos tres sistemas diferentes de cosas. Llamaremos* puntos *a las cosas que componen el primer sistema, y las designaremos por las letras A, B, C . . .*

Vemos entonces una diferencia fundamental: Euclides *define* punto abstrayendo lo que intuitivamente nos es dado por la observación del mundo tangible, usando sin embargo palabras del mismo mundo.

Para Hilbert, un punto es un *elemento* de un *conjunto abstracto* elegido a priori.

Euclides define también *línea recta* y *superficie plana*, y describe qué *construcciones* se puede hacer con estas entidades, apelando también a conceptos físicos que parten de una observación sensorial: por ejemplo,

> *Los extremos de una línea son puntos.*

donde por "extremo" debemos entender lo que la intuición subjetiva nos da a entender.

La metodología de Hilbert es diferente. Él postula la *existencia* de un conjunto determinado de "cosas" que satisfacen ciertas propiedades que son el resultado de abstraer una experiencia primera e informal que tenemos con la *geometría*[1].

En este acercamiento moderno a la matemática, se trata de abstraer lo suficiente el comportamiento que tienen los "puntos" para poder desarrollar una teoría que sea, ante todo, no-contradictoria, es decir, *consistente*.

En efecto, la pretensión de que podemos realmente *definir* un punto de manera tan sencilla (quizás incluso simplista) como lo hace Euclides es una pretensión que fue superada con los siglos.

Pero ¿cuál es el problema en dar una "definición" como la de Euclides? A fin de cuentas, si bien un punto no tiene/no puede tener *realidad física*, si una descripción como la de Euclides nos lleva a buen puerto, es decir, si logra realmente con sus axiomas sobre los puntos (y las rectas, y los planos, etc.) *demostrar* las proposiciones que estimamos que estas entidades deben satisfacer, pues ¿cuál es el problema? ¿Por qué esa intención de introducir un *formalismo* abstracto que parece desnaturalizar algo tan intuitivo como la geometría plana?

[1] *Geometría*, medir la tierra: la primera aproximación es puramente práctica y *terrenal*.

El nacimiento de las geometrías no euclídeas

De la nada he creado un nuevo y extraño universo.

János Bolyai[2]

Euclides, luego de dar sus definiciones, enuncia cinco "postulados" (ver apéndice primero para una lista de sus definiciones, postulados y nociones comunes). ¿Qué debemos entender por postulado? En la antigüedad se denominaba *axioma* a una "verdad autoevidente", y un postulado es una sentencia que se *postula* verdadera[3]. El quinto postulado (ver figura 1) dice:

> *Si una recta, al cortar a otras dos, forma ángulos internos menores a dos ángulos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.*

John Playfair[4] demostraba en 1795 que el postulado era equivalente a la siguiente afirmación[5] (ver figura 2):

> *Por un punto exterior a una recta, se puede trazar a lo sumo una paralela a la recta dada.*[7]

Euclides consideraba que este postulado, así como los otros cuatro, era evidente y por tanto no requería de demostración. Sin embargo, en las demostraciones de las primeras 28 proposiciones que él enuncia no hace uso del quinto postulado. Esto es quizá indicación de

[2]Matemático húngaro (1802-1860).

[3]Las nociones de axioma y postulado se confundirán en el desarrollo de la lógica matemática de finales del siglo XIX, como veremos más adelante.

[4]Matemático escocés (1748-1819).

[5]Si bien esta reformulación se conoce como *axioma de Playfair*, ésta ya era conocida por Proclo[6](ver [3], p.148). En el segundo apéndice se enuncian otras equivalencias del quinto postulado.

[6]Matemático y filósofo griego (410-485).

[7]Con los otros postulados se puede demostrar que no sólo hay a lo sumo una, sino que siempre hay *exactamente* una.

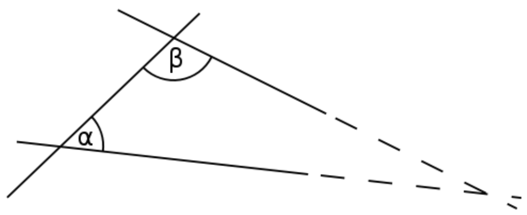

Figura 1: El quinto postulado de Euclides: $\alpha + \beta \leqslant 180^\circ$

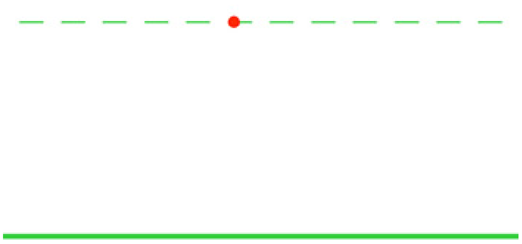

Figura 2: El axioma de Playfair

que él mismo estaba receloso de ese postulado: su complejidad es mayor a la de los otros cuatro.

Hubo a lo largo de la historia varios intentos de probar que el quinto postulado se podía *demostrar* a partir de los otros cuatro y de los axiomas, y por lo tanto era más bien un *teorema*.

Proclo (siglo V A.D.) menciona que ya Ptolomeo (siglo II A.D.) había dado una demostración (equivocada) del quinto postulado. Él mismo intenta demostrarlo, pero también se equivoca al utilizar una proposición que no se podía deducir de los otros axiomas y postulados.

Los árabes también lo intentaron en el medioevo, entre ellos los persas Omar Khayyam (siglo XI) y Nasir ad-Din at-Tusi (siglo XIII).

Ya en Europa, John Wallis creyó haberlo probado en 1663. Él mismo se dio cuenta más tarde que su prueba estaba basada en una hipótesis equivalente al propio quinto postulado.

En el siglo XVIII aparecen Girolamo Saccheri[8] y Adrien-Marie Legendre[9]. Con respecto de la geometría, el primero publicó *Euclides ab omni naevo vindicatus* ("Euclides liberado de toda falta") el año de su muerte, y el segundo publicó el reconocido libro de texto *Élements de Géometrie* en 1794, compendiando los logros de la geometría hasta entonces conseguidos.

Saccheri procedió de la siguiente manera. Primero probó que el quinto postulado era equivalente a que la suma de los ángulos de un triángulo (notémosla Σ) es de 180°. Luego, probó que la hipótesis de que $\Sigma > 180^\circ$ contradecía la infinitud de las rectas (segundo postulado). Iba por buen camino: este teorema, que afirma que $\Sigma \leqslant 180^\circ$ sin asumir el quinto postulado, se conoce como *teorema de Saccheri-Legendre*.

Pero cuando asumió que $\Sigma < 180^\circ$, no pudo llegar a un absurdo. En cambio, bajo este supuesto demostró un puñado de afirmaciones sorprendentes que contradecían la intuición, ¡no así los axiomas o los otros postulados! Sin embargo se vio repugnado por sus resultados (ver [8], p.1):

> *La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, ya que repugna a la naturaleza de la línea recta.*
>
> *Girolamo Saccheri*

Aquí, la psicología y el sentido de la estética le jugaron en contra a Saccheri y los que prosiguieron su trabajo en el siglo XVIII: seguramente estuvieron muy cerca de encontrar que no se llegaría a ninguna contradicción con la hipótesis de que $\Sigma < 180^\circ$. De hecho, se demostraron varios teoremas en estas hipótesis. Pero como iba en contra de lo que ellos *querían que fuera cierto*, no llegaron a descubrirlo.

En 1832, Bolyai acuña el nombre de *geometría absoluta*. El terreno de la geometría absoluta es aquél en el que se asumen todos los axiomas y postulados de Euclides salvo el quinto. El teorema de Saccheri-Legendre afirma pues que en la geometría absoluta, $\Sigma \leqslant 180^\circ$.

[8] Cura jesuita, filósofo escolástico y matemático italiano (1667-1733).
[9] Matemático francés (1752-1833).

Cuando asumimos que $\Sigma > 180^\circ$ (o equivalentemente, que no hay rectas paralelas a una recta dada por un punto dado), contradecimos el segundo postulado. Pero si lo modificamos, añadiendo que todos los segmentos tienen la misma longitud, entonces no hay contradicción. Este terreno es el de la *geometría elíptica*. Hay, por lo tanto, teoremas de la geometría absoluta que no lo son de la geometría elíptica.

Nikolai Lobachevski[10] y Bolyai desarrollarían en los años 1830 la *geometría hiperbólica*, en la que $\Sigma < 180^\circ$, o equivalentemente, hay al menos dos paralelas a una recta dada por un punto dado. Se puede decir sin temor que *Sobre los principios de la geometría* (1829) de Lobachevski es el primer tratado publicado sobre geometría hiperbólica. Bolyai publicaría sus logros en un apéndice a *La ciencia del espacio absoluto* (1832).

Cuando decimos "desarrollan" queremos decir: asumen que $\Sigma < 180^\circ$ y demuestran teoremas en estas hipótesis. A esta altura la marea ha cambiado, y ya no se intenta demostrar el quinto postulado a partir de los demás, sino que se empieza a creer que en realidad resulta *independiente*, y que no hay contradicción con los demás postulados y axiomas si se supone $\Sigma < 180^\circ$.

Bernhard Riemann[11] analizaría y profundizaría las tres geometrías en su tesis doctoral *Sobre las hipótesis que están en la base de la geometría* (1854): la euclídea ($\Sigma = 180^\circ$, también llamada *parabólica*), la hiperbólica ($\Sigma < 180^\circ$) y también la elíptica ($\Sigma > 180^\circ$), hasta el momento mayormente inexplorada. Un caso particular de geometría elíptica estudiado por Riemann es el de la *geometría esférica*, la geometría, por ejemplo, de la superficie terrestre.

Cabe mencionar que Carl Gauss[12] ya había desarrollado con anterioridad a los trabajos de Lobachevski y Bolyai la geometría hiperbólica, pero por alguna razón que nos elude decidió no publicar sus resultados. En 1824, en una correspondencia privada, escribe:

> *La suposición que la suma de los tres ángulos es menor que* 180° *lleva a una geometría curiosa, bastante diferente de la nuestra, pero perfectamente consistente, que he desarrollado a mi entera satisfacción.*
>
> *Carl Gauss*

En 1832, escribe acerca de Bolyai:

> *Debo observar que recientemente he recibido un pequeño trabajo desde Hungría sobre geometría no euclídea en el que encuentro todas mis ideas y resultados desarrollados con gran elegancia, aunque en una forma concentrada que lo hace de difícil lectura para quien no está familiarizado con el asunto. El autor es un oficial austríaco muy joven, el hijo de un amigo de mi infancia con el que había discutido a menudo este asunto en 1798, aunque mis ideas en ese momento estaban mucho menos desarrolladas y maduras que las que obtuvo este joven a través de sus propias reflexiones. Considero a este joven geómetra, Bolyai, como un genio de primera categoría.*
>
> *Carl Gauss*

[10] Matemático ruso (1792-1856).
[11] Matemático alemán (1826-1866)
[12] Matemático alemán (1777-1855), tutor de Riemann.

La consistencia relativa

> *[La imposibilidad de demostrar el postulado de las paralelas] es el escándalo de la geometría y la desesperación de los geómetras.*
>
> *Jean le Rond d'Alembert*[13]

> *Cada vez estoy más convencido de que la necesidad física de nuestra geometría euclidiana no puede ser demostrada al menos por la razón humana.*
>
> *Carl Gauss*

Hasta ahora se había intentado atacar el problema *positivamente*, es decir, probar que el quinto axioma *sí* se puede deducir de los otros y de los axiomas. Para llevar esto a cabo, se hacía como siempre en matemática: sucesivas afirmaciones que se deducen de las anteriores utilizando los axiomas y postulados y las reglas de la lógica y la aritmética (que Euclides llamó "nociones elementales").

Ahora bien, esto fue infructuoso: todas las supuestas "demostraciones" cometían un error de razonamiento en algún lugar. A partir de Saccheri la evidencia apuntaba a que en realidad *no se podía* demostrar el quinto postulado a partir de los otros y de los axiomas. Es decir, asumiendo alguna forma de la *negación* del quinto postulado (léase, que $\Sigma < 180^\circ$) no se lograba llegar a una contradicción. Pero que Riemann y los demás no lograran llegar a una contradicción no significa nada: nadie duda del genio de estos grandes matemáticos, pero éste no es argumento suficiente.

Eugenio Beltrami[14] y Felix Klein[15] ponen un punto final *relativo* a esta disquisición. El primero, en *Ensayo de interpretación de la geometría no euclídea* y *Teoría fundamental de los espacios de curvatura constante*, ambos de 1868, y el segundo en *Sobre la llamada geometría no euclídea* (1871).

Decimos que una teoría es *consistente* si no presenta contradicciones. Beltrami y Klein demuestran entonces la *consistencia relativa* de la geometría hiperbólica respecto de la geometría euclídea. Esto significa que si la geometría euclídea es consistente, también lo es la geometría hiperbólica.

¿Cómo se hace esto? Exhibiendo un *modelo* de la geometría hiperbólica. Es decir, asumiendo que la geometría euclídea es consistente, se definen nuevos puntos, rectas, etc. a partir de los de la geometría euclídea, y se demuestra que con estas reglas se satisfacen los postulados y axiomas. En este modelo, $\Sigma < 180^\circ$, por lo tanto no puede ser cierto que $\Sigma = 180^\circ$: hemos construido un modelo de la geometría absoluta que no es un modelo de la geometría euclídea: es decir, en este modelo el quinto postulado de Euclides es falso.

Al haber entonces modelos de la geometría absoluta que son consistentes con el quinto postulado (geometría euclídea), y otros modelos que son consistentes con la negación del segundo postulado (geometría hiperbólica), deducimos la independiencia del quinto postulado respecto de los otros. Siempre asumiendo, sin embargo, que *la propia geometría euclídea es consistente*.

[13]Matemático, físico, filósofo y enciclopedista francés (1717-1783).

[14]Matemático italiano (1835-1900).

[15]Matemático alemán (1849-1925).

Beltrami y Klein construyen el modelo conocido como *modelo de Beltrami-Klein* de la geometría hiperbólica. También Henri Poincaré daría otros dos modelos, conocidos como *disco de Poincaré* y *semiplano de Poincaré*. Describiremos este último en el tercer apéndice.

Falta entonces demostrar algo que hemos tomado por obvio todo este tiempo: que la geometría euclídea es consistente. En efecto, la demostración de Beltrami de la existencia de un modelo de la geometría hiperbólica fue asumiendo la consistencia de la geometría euclídea.

Se busca entonces dar una prueba de consistencia *absoluta* de la geometría euclídea. Porque, ¿cómo sabemos que los clásicos axiomas y postulados de Euclides, estudiados y desarrollados a lo largo de tantos siglos, no son contradictorios? Es decir, ¿cómo sabemos que dentro de la geometría euclídea no podemos demostrar la *negación* de alguno de los postulados o axiomas?

Hilbert y la lógica matemática

> *Uno debe poder decir siempre, en vez de puntos, rectas y planos: mesas, sillas y jarras de cerveza.*
>
> *David Hilbert*

Hilbert, en esta célebre frase que se le acredita, está apuntando a que los teoremas que demostremos deben poder deducirse lógicamente de los axiomas que le imponemos a los objetos acerca de los cuales hablamos, sin estar pensando en ninguna *interpretación* (en ningún *modelo*) de estos axiomas.

Las secciones anteriores fundamentan la preocupación que tenía Hilbert por reformular la geometría euclídea. El *shock* epistemológico que constituyó el descubrimiento de las geometrías no euclídeas llevó a Hilbert a preocuparse por los fundamentos de la geometría clásica de Euclides.

Hilbert no estaba del todo contento con el desarrollo formal de la geometría de Euclides. A veces los dibujos geométricos llevaban a hacer ciertas deducciones que en realidad no estaban del todo fundamentadas en los axiomas y postulados. Por lo tanto Hilbert formuló en *Fundamentos de geometría* (1899) una nueva axiomatización de la geometría, un sistema axiomático puramente formal en el que las interpretaciones no se encuentran en su concepción: éstas sólo vendrían *a posteriori*.

Este fue uno de los primeros *sistemas formales* en la matemática, sentando el camino para otros que vendrían en el siglo XX y cambiando definitivamente la manera de fundamentar la matemática. Evidencia de esto es la siguiente correspondencia de Hilbert con Gottlob Frege[16](ver [7], p.294). Frege le escribe a Hilbert:

> *Le llamo axiomas a proposiciones que son verdaderas, pero que no son demostradas porque su conocimiento procede de una fuente que no es lógica, que podemos llamar intuición espacial. La verdad de los axiomas implica por supuesto que no se contradicen. Esto no necesita prueba ulterior.*

A lo cual Hilbert responde:

> *Desde que empecé a pensar, escribir y a dar conferencias sobre estos asuntos, siempre he dicho exactamente lo contrario. Si los axiomas propuestos arbitrariamente no se contradicen mutuamente o a alguna de sus consecuencias, deben ser verdad y las cosas que definen deben existir. Este es para mí el criterio de verdad y existencia.*

Así vemos cómo la matemática va cambiando desde una ciencia basada en "verdades evidentes" a una ciencia deductiva que parte de premisas lógicas que sólo debemos cuidar que no se contradigan, sin tener cuidado *a priori* de su significado[17]. Así Hilbert abre la vía para el *formalismo* en el siglo XX.

De esta manera, para la lógica matemática del siglo XX, no hay distinción entre axioma y postulado, ya que no hay "verdades evidentes": lo *evidente* desaparece de la matemática en la manipulación formal.

[16] Matemático, lógico y filósofo (1848-1925).

[17] Es la *sintáctica* la que se ocupa de inferir sentencias *correctas*. De la *verdad* se ocupa la semántica, notablemente a partir de la creación de *modelos*.

> *La matemática es un juego carente de significado en el que uno juega con símbolos carentes de significado de acuerdo a unas reglas formales establecidas de antemano.*
>
> *David Hilbert*

El desarrollo de los sistemas axiomáticos formales sienta las bases para las pruebas formales de consistencia relativa. La "crisis de la geometría", así como la crisis de la teoría de conjuntos de Cantor (en la cual no entraremos aquí), demuestran que es imperativo desarrollar la lógica matemática con rigor.

En sus Fundamentos, Hilbert demuestra que la consistencia de la geometría euclídea se deduce de la consistencia del análisis real, es decir de la consistencia de la teoría de los números reales (la *aritmética de segundo orden*).

Pero Hilbert no iba a detenerse ahí. ¿Qué hay de la consistencia del análisis? Y la crisis conjuntista seguía sin resolverse. Formula entonces el programa conocido como "programa de Hilbert" en la década de 1920. En este programa se establecía como objetivo formalizar toda la matemática en forma axiomática, y probar que esta axiomatización era consistente, de manera *absoluta*.

Además, en sus famosos 23 problemas abiertos del 1900, él plantea como segundo problema hallar una demostración de que la aritmética de primer orden (la aritmética de Peano, la teoría de los números naturales: ver apéndice cuarto) es consistente.

No debemos entender sin embargo que este cambio de rumbo hacia un formalismo creciente cambie la manera en la que el matemático concibe nuevos resultados. Más bien, es aquello a lo que se recurre cuando surge un problema como los que surgieron a comienzos del siglo XX. André Weil[18] comenta (ver [7], p.306):

> *Si la lógica es la higiene del matemático, no es su fuente de comida; los grandes problemas proveen el pan diario sobre el que él prospera. Hemos aprendido a rastrear nuestra ciencia entera a una única fuente, constituida por unos pocos signos y unas pocas reglas para su uso; ésta es una fortaleza incuestionable, dentro de la cual difícilmente podríamos confinarnos sin riesgo de hambruna, pero a la cual siempre somos libres de replegarnos en caso de incertidumbre o peligro externo.*

[18] Matemático francés (1906-1998).

Gödel y Gentzen

> *Una geometría no puede ser más cierta que otra; sólo puede ser más conveniente.*
>
> *Henri Poincaré*[19]

Lo que se logró hasta el momento fueron pruebas de consistencia relativa. Si tal teoría, más "fácil de aceptar" para la psicología de un matemático, es consistente, entonces tal otra teoría es consistente.

Falta entonces probar la consistencia de la teoría más elemental: la de la aritmética de Peano.

Aquí entra en escena Kurt Gödel[20]. Su primer teorema de incompletitud (1931) muestra que cualquier teoría capaz de expresar la aritmética elemental (como la aritmética de Peano) no puede ser consistente y completa a la vez, donde *completa* significa que todo enunciado en el lenguaje de la teoría se puede demostrar o demostrar su negación.

Por lo tanto, si una teoría que contiene a la aritmética de Peano es consistente, entonces existe un enunciado (por ejemplo, el *enunciado de Gödel*) que *no se puede demostrar ni refutar*. Contrarrecíprocamente, si una teoría es completa, es decir, si todos los enunciados de la teoría se pueden demostrar, entonces el sistema axiomático es inconsistente: hay una contradicción en ellos.

Su segundo teorema de incompletitud, del mismo año, dice que una teoría capaz de expresar la aritmética elemental[21] puede probar su propia consistencia (es decir, que existe una prueba de la consistencia *absoluta* de la teoría) si y sólo si la teoría es inconsistente[22].

Los dos teoremas de incompletitud son grandes logros de la matemática del siglo XX. Recomendamos al lector releer los dos párrafos precedentes para una cabal comprensión de los mismos.

Estos teoremas establecen un límite muy severo al sueño de Hilbert y de la escuela formalista de comienzos del siglo XX. En realidad directamente muestra que el programa de Hilbert es imposible. El primer teorema nos dice que si la teoría es consistente, necesariamente habrá un enunciado *indecidible*, es decir, un enunciado que nunca podremos demostrar ni refutar. El segundo teorema nos dice que las pruebas de consistencia absoluta son imposibles en una teoría consistente (bajo ciertas débiles hipótesis sobre la aritmética).

Aún así esto no significa que debamos tirar todo por la borda. Sencillamente, la pretensión de que es posible formalizar toda la matemática de manera demostrablemente consistente es imposible de realizar.

---

[19] Matemático, físico y epistemólogo francés (1854-1912).

[20] Matemático, lógico y filósofo austríaco (1906-1978).

[21] Y con ciertas hipótesis débiles adicionales sobre demostrabilidad, por ejemplo las *condiciones de demostrabilidad de Hilbert-Bernays*.

[22] La *aritmética de Robinson*, que es esencialmente la aritmética de Peano menos inducción, también está en las hipótesis de los teoremas de Gödel. Sin embargo, hay teorías (aún más débiles; no están en las hipótesis de Gödel) consistentes de la aritmética de primer orden que son capaces de probar su propia consistencia. Se llaman teorías *autoverificantes*: claramente su interés reside específicamente dentro de la lógica matemática; su impacto en el resto de la matemática es escaso.

De todas formas, a los pocos años (1936) Gerhard Gentzen[23] encuentra un resultado positivo. Demuestra (usando inducción transfinita hasta ϵ_0) la consistencia relativa de la aritmética de Peano suponiendo unos axiomas mucho menos fuertes. En la introducción de su artículo, escribió:

> *El objetivo de este artículo es probar la consistencia de la teoría de números elemental, o, mejor dicho, reducir la cuestión de la consistencia a ciertos principios fundamentales.*

Al respecto de la necesidad de las pruebas de consistencia, dice:

> *La matemática está considerada como la ciencia más certera. Que pudiera llevar a resultados que se contradicen unos a otros parece imposible. La fe en la indudable certeza de las pruebas matemáticas fue sacudida con violencia alrededor del 1900 por el descubrimiento de las antinomias o paradojas de la teoría de conjuntos. Resultó que en esta rama de las matemáticas, las contradicciones surgen sin que seamos capaces de reconocer ningún error específico en nuestro razonamiento.*

Llegado este punto, la pretensión de demostrar *absolutamente* la consistencia de una teoría se hace a un lado. Los resultados de consistencia relativa como el de Gentzen logran sencillamente darnos evidencia *metamatemática* de la consistencia de la teoría en cuestión. Por ejemplo, para la psicología de Alfred Tarski[24], este resultado no provee más evidencia de la existente sobre la consistencia de la aritmética:

> *La demostración de Gentzen de la consistencia de la aritmética es sin duda un resultado metamatemático muy interesante, que puede resultar muy estimulante y fructífero. No puedo decir, sin embargo, que la consistencia de la aritmética sea ahora mucho más evidente para mí... que antes de que se obtuviera esta demostración.*

[23] Matemático y lógico alemán (1909-1945)
[24] Matemático y lógico polaco (1901-1983).

Conclusiones

No puedes encontrar la verdad con la lógica si no la has encontrado ya sin ella.

G.K. Chesterton[25]

En vista de los resultados de Gödel, no es posible dar una demostración de la consistencia absoluta de la geometría euclídea. Sabemos, sin embargo, gracias a Hilbert, que si la aritmética de segundo orden (la teoría de los números reales) es consistente, entonces la geometría euclídea también lo es.

Gracias al trabajo de Beltrami y Klein, sabemos que si la geometría euclídea es consistente, entonces la geometría hiperbólica también lo es.

La intención, a lo largo de siglos y milenios, de demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los demás, se probó pues una tarea imposible, por ser falsa: el quinto postulado es *independiente*, pues existe una geometría absoluta relativamente consistente según la cual este postulado es falso.

Con el objetivo de explicar *por qué* fue necesario llevar la matemática y su lógica hacia un grado de formalismo superior, desentrañamos "el escándalo" de las geometrías no euclídeas. Vimos el apogeo del optimismo formalista cuyo epítome fue el programa de Hilbert, y vimos su caída en el trabajo de Gödel.

Los teoremas de Gödel tuvieron repercusiones no sólo en la filosofía de la matemática, sino también en la filosofía de los filósofos en general. A este respecto sólo podemos tener reparos. La matemática no puede probar nada acerca del mundo: sólo puede probar afirmaciones acerca de *modelos* del mundo, y tomarse estos modelos demasiado en serio puede llevar a errores de juicio. Las palabras de Gian-Carlo Rota[26] son de alerta:

> *La terminología falsamente filosófica de la lógica matemática ha llevado erróneamente a los filósofos a pensar que la lógica matemática trata sobre la verdad en el sentido filosófico. Pero esto es un error. La lógica matemática no trata sobre la verdad, sino sobre el juego de la verdad.*
>
> *Gian-Carlo Rota*

El *juego de la verdad* al que se refiere Rota, o más específicamente, la noción de *verdad* en matemática fue desarrollada por primera vez por Tarski a partir de 1933 (*Sobre el concepto de verdad en los lenguajes formales*). En el contexto de los lenguajes formales, la verdad es un concepto semántico: caracterizamos ciertas sentencias de nuestra teoría formal puramente sintáctica como *verdaderas* utilizando el *metalenguaje*.

De esta manera, por ejemplo, si el francés fuera nuestro lenguaje formal y el español nuestro metalenguaje, podríamos decir que

"Ana est blonde" es verdadero si y sólo si Ana es rubia.

Se define entonces la verdad pasando por un metalenguaje; ¿podemos definir verdad utilizando el propio lenguaje objeto? En 1936, Tarski demostró el *teorema de indefinibilidad*

[25] Escritor inglés (1874-1936).
[26] Matemático y filósofo ítalo-estadounidense (1932-1999).

de la verdad, una suerte de análogo de los teoremas de incompletitud de Gödel pero en la semántica en vez de en la sintáctica. En este teorema, se demuestra que no se puede definir la verdad de los enunciados de la aritmética de primer orden dentro de la misma aritmética, exhibiendo un análogo a la paradoja del mentiroso: "Esta sentencia es falsa".

Si pudiéramos extrapolar este resultado sobre lenguajes formales y aritmética a los idiomas, obtendríamos, por ejemplo, que es imposible en idioma español dar una noción de verdad que decida sobre cualquier frase en español si ésta es verdadera o falsa. Pero es este tipo de extrapolaciones arriesgadas sobre las cuales nos advierte Rota, y cuyo estudio en profundidad puede ser objeto de otro ensayo sobre filosofía y filosofía de la matemática.

Apéndice 1: axiomas de Euclides

Las siguientes definiciones, postulados y nociones comunes son el comienzo del libro primero de los *Elementos* de Euclides.

Definiciones

1. Un punto es lo que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.
6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo.
10. Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
11. Ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto.
12. Ángulo obtuso es el (ángulo) menor que un recto.
13. Un límite es aquello que es extremo de algo.
14. Una figura es lo contenido por uno o varios límites.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
16. Y el punto se llama centro del círculo.
17. Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.
18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.

19. Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.
20. De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isóceles la que tiene sólo dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales.
21. Además, de entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.
22. De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos entre sí, pero no es equilatera ni rectangular; y llámense trapecios las demás figuras cuadriláteras.
23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

Postulados

1. Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una única línea recta.
2. Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente.
3. Con un centro y un radio dado sólo se puede trazar una única circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos internos, y la suma de estos es menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado.

Nociones comunes

1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2. Si se añaden iguales a iguales, los todos son iguales.
3. Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales.
4. Las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Apéndice 2: equivalencias del quinto postulado

Enunciamos a continuación ciertas proposiciones que se demostraron equivalentes al quinto postulado.

1. (Axioma de Playfair) Por un punto exterior a una recta, se puede trazar a lo sumo una paralela a la recta dada.

2. (Axioma de Proclo) Si una recta intersecta una de dos paralelas, debe intersectar a la otra también.

3. La suma de los ángulos de un triángulo es de dos ángulos rectos.

4. Si dos paralelas son cortadas por una recta transversal, los ángulos alternos internos son iguales.

5. Las rectas paralelas son equidistantes.

6. Existen triángulos semejantes que no son congruentes.

7. En todo cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto.

8. Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada.

9. Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir un círculo que pase por todos ellos.

Apéndice 3: el semiplano de Poincaré

El semiplano de Poincaré es un modelo de la geometría hiperbólica.

Como conjunto, es $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, es decir, el semiplano superior sin la recta Ox.

En este modelo, las rectas son o bien arcos de circunferencia cuyos centros están en el eje Ox, o bien semirrectas verticales.

En la geometría hiperbólica, se tienen los siguientes teoremas que van en contra de la intuición que se hereda de la geometría euclídea:

- Hay rectas paralelas sin perpendicular común (se llaman *horoparalelas*; las que sí tienen perpendicular común se llaman *hiperparalelas*).
- Dos rectas hiperparalelas tienen una *única* perpendicular común.
- Las rectas paralelas no son equidistantes. Si son hiperparalelas, el segmento determinado por la perpendicular común es la menor distancia entre las rectas; si son horoparalelas, entonces no hay "menor distancia".

En este modelo, el ángulo entre dos rectas se mide como el ángulo entre las tangentes a los arcos; los arcos que se intersectan en el eje Ox son rectas horoparalelas (como ℓ y k en la figura 3); los arcos con mismo centro son rectas hiperparalelas (como n y k cuya única perpendicular es p, en la figura 3).

Observar que las rectas ℓ, m y q determinan un triángulo hiperbólico.

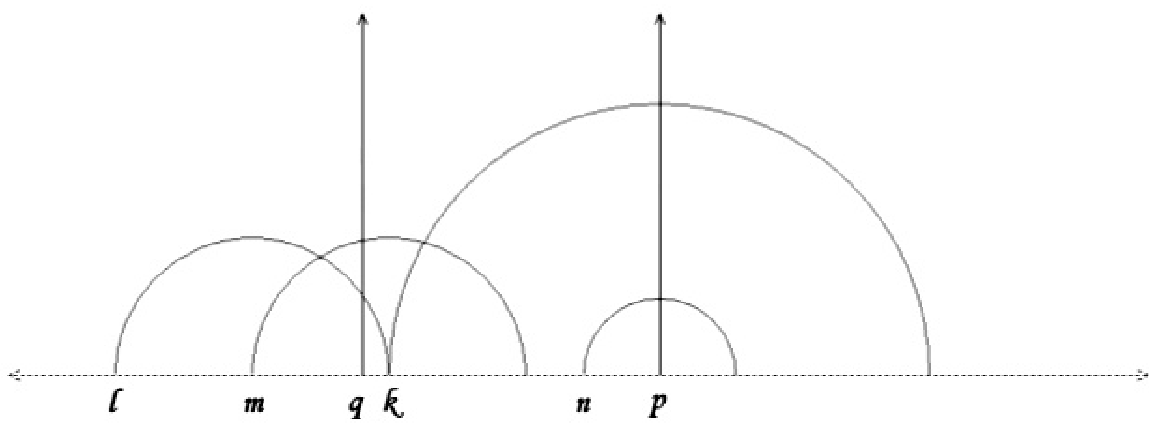

Figura 3: Rectas en el semiplano de Poincaré

Apéndice 4: la aritmética de Peano

Los axiomas de Peano fundamentan la teoría de los números naturales. Al ser ésta más sencilla que la geometría, optamos por enunciarlos de manera formal, ilustrando además el cambio histórico en la manera de introducir un sistema axiomático: comparar con los axiomas de Euclides.

Recordamos los símbolos de la lógica: $\forall$ (para todo), $\exists$ (existe), $\neg$ (no), $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\Rightarrow$ (implica), $\Leftrightarrow$ (si y sólo si).

Como conceptos primitivos, tenemos en nuestro lenguaje a la constante 0, al símbolo de relación 1-ario N, interpretado usualmente como "ser un número natural", y al símbolo de función 1-ario S. Esta función se llama "función sucesor", y semánticamente interpretamos usualmente que $S(x)$ tiene sentido cuando $N(x)$, en cuyo caso $S(x)$ se puede interpretar como $x + 1$.

A continuación presentamos los axiomas de Peano: elegimos presentar el quinto axioma (esquema axiomático) con la lógica de primer orden, lo cual nos permite decir que estos son los axiomas de la *aritmética de primer orden*. Se puede demostrar que son independientes; es decir, ninguno de ellos se puede deducir de los demás.

Axiomas de Peano

1) $N(0)$ (0 es un número natural)

2) $\forall x(N(x) \Rightarrow N(S(x))$ (el sucesor de un número natural es un número natural)

3) $\neg\exists x(N(x) \wedge 0 = S(x))$ (0 no es sucesor de ningún número natural)

4) $\forall x \forall y((N(x) \wedge N(y) \wedge S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y)$ (la función sucesor es inyectiva)

5_φ) $\forall \bar{y}(\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{y}) \Rightarrow \varphi(S(x), \bar{y})) \Rightarrow \forall x \varphi(x))$ para toda fórmula $\varphi(x, \bar{y})$

La última se conoce como *esquema axiomático de inducción*: para cada fórmula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ en el lenguaje de la aritmética de Peano, se tiene un axioma. La notación $\bar{y}$ es una abreviación de $y_1, \ldots, y_k$.

Debemos entenderla de esta manera: si φ es una fórmula que se satisface para 0, y cada vez que se satisface para un natural, se satisface para su sucesor, entonces se satisface para todos los números naturales.

Podríamos, en vez de utilizar un esquema axiomático, utilizar un sólo axioma, que fuera igual pero con un $\forall\varphi(x, \bar{y})$ delante. Pero de esta forma estaríamos cuantificando sobre fórmulas: estaríamos pasando al mundo de la lógica de segundo orden que es innecesariamente más complicado.

Referencias

[1] F. Gareth Ashurst (1985). *Fundadores de las matemáticas modernas*, Ed. Alianza, Madrid. 195 pp.

[2] Egmont Colerus (1972). *Breve historia de las matemáticas. 1*, Ed. Doncel, Madrid. 185 pp.

[3] Egmont Colerus (1973). *Breve historia de las matemáticas. 2*, Ed. Doncel, Madrid. 197 pp.

[4] Richard Courant (1996, 1941). *What is mathematics?* Ed. Oxford University Press, Oxford, New York. 566 pp.

[5] Euclides (1991; circa 300 A.C.). *Elementos, libros I-IV*, Ed. Gredos, Madrid. 368pp.

[6] David Hilbert (2005; 1950; 1899). *The Foundations of Geometry*. Disponible en el dominio público: http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf [Consulta: 13 de julio de 2011].

[7] Marvin J. Greenberg (1993, 1980, 1974). *Euclidean and non-Euclidean geometries. Development and History*, 3ª edición. Ed. W.H. Freeman and Company, New York. 483 pp.

[8] Ferran Mir (Universidad de Barcelona). *La proposición XXXIII de Saccheri*. 24 de octubre de 2006. http://personal.telefonica.terra.es/web/mir/ferran/propos33.pdf [Consulta: 11 de julio de 2011].

[9] J.J. O' Connor y E.F. Robertson (2001, University of St. Andrews, Scotland), *Gerhard Gentzen*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Gentzen.html

[10] Agustí Reventós y Carlos J. Rodríguez (Universidad Autónoma de Barcelona, 2006). *Gauss y la geometría. Geodesia y Geometría no Euclidiana*, http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/06-07/PG-06-07-Reventos.pdf [Consulta: 12 de julio de 2011].

[11] Richard Zach (2009). 'Hilbert's Program', *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/ [Consulta: 14 de julio de 2011].

[12] Is arithmetic consistent? http://www.mathpages.com/home/kmath347/kmath347.htm [Consulta: 12 de julio de 2011].