Corolarios del lema de Yoneda

Bruno Stonek

bruno@stonek.com

4 de febrero de 2014

1. El lema y sus corolarios

Supongamos que tenemos dos objetos de una categoría y queremos probar que son isomorfos. Un corolario del lema de Yoneda nos dice que basta probar que sus respectivos functores representables son isomorfos. Más sucintamente,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,B) \Rightarrow A \simeq B$$

Una manera elocuente (e informal) de expresar esto es que para conocer un objeto A a menos de isomorfismo basta conocer $\mathrm{Hom}(X,A)$ para todo objeto X. Parece que Ravi Vakil explicó este fenómeno con una analogía muy colorida con la física de partículas (paráfrasis mía):

> Supongamos que estamos en un acelerador de partículas y tenemos una partícula desconocida que queremos identificar. Lo que podemos hacer es tirarle con diferentes partículas y ver qué pasa. Si le tiramos con todas las partículas posibles, de todas las maneras posibles, entonces podremos determinar completamente nuestra partícula incógnita.

Antes de seguir, cabe observar que la versión *dual* con functores covariantes también vale. Es decir,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,-) \Rightarrow A \simeq B$$

Tanto los enunciados como las pruebas son duales, así que arbitrariamente decidimos enfocarnos en el caso contravariante.

Fijemos algo de notación. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ es la categoría de functores contravariantes $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ con morfismos las transformaciones naturales. Dados dos functores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, notemos $\mathrm{Nat}(F,G)$ al conjunto de transformaciones naturales de F en G; es decir, $\mathrm{Nat}(F,G) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}(F,G)$ en el caso en que $\mathcal{C}$ es pequeña.

Lema (Yoneda)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $C \in \mathcal{C}$ un objeto, y sea $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ un functor contravariante, es decir, $F \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Entonces hay una biyección*

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C),F) &\simeq FC \\ \tau &\mapsto \tau_C(1_C) \\ \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,C) \xrightarrow{\theta_a} FX \right)_{X\in\mathcal{C}} &\leftarrow\!\shortmid a \\ h \overset{\theta_a}{\longmapsto} (Fh)(a) & \end{aligned}$$

Además, esta biyección es natural en C y en F, en el sentido que hay isomorfismos naturales

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\star,-),F)"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\simeq"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,-),\star)"] \arrow[r, bend right, "ev_C"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\simeq"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

donde $\star$ indica dónde evaluar, y ev_C es la evaluación en C.

Demostración. Simplemente hay que ver que ese morfismo $FC \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,-),F)$ está bien definido, y verificar que la composición en ambos sentidos es la identidad. La naturalidad es respirar hondo y verificar la conmutatividad de los cuadrados. $\square$

Definición. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor. Dados $X, Y \in \mathcal{C}$ objetos, consideremos la función $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$, $f \mapsto Ff$. Decimos que F es:

- *fiel* si para todo X, Y la función $F_{X,Y}$ es inyectiva,
- *pleno* si para todo X, Y la función $F_{X,Y}$ es sobreyectiva,
- *inyectivo en objetos* si la función $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, $A \mapsto FA$ es inyectiva,
- una *inmersión* si es fiel, pleno e inyectivo en objetos.

Corolario (Inmersión de Yoneda)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. El functor*

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\quad Y \quad} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,f)"] \\ B & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,B) \end{tikzcd} \quad (\longmapsto)$$

es una inmersión, llamada inmersión de Yoneda*.*

Demostración. Veamos que es inyectivo en los objetos. Si $A, B \in \mathcal{C}$ son objetos tales que $YA = YB$, i.e. tales que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,B)$, entonces, al evaluar en A, se obtiene $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Como el codominio de una flecha es único, debe ser $B = A$.

Veamos que es fiel y pleno. Para ello, fijemos $C, D \in \mathcal{C}$. Queremos ver que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}}(YC,YD), \qquad f \mapsto Yf \tag{1}$$

es una biyección. Observar que el término de la derecha es, por definición, el conjunto $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,D))$.

Esto nos lleva entonces a considerar el functor $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,D)$ en el lema de Yoneda. Éste nos da que

$$FC = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) \simeq \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,D)) \tag{2}$$

Basta ver que la biyección (2) es la misma función que (1). Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$. Si le aplicamos la biyección (2) explicitada en el lema de Yoneda, obtenemos $f \mapsto \tau$, donde

$$\tau = \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \xrightarrow{\tau_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D) \right)_{X \in \mathcal{C}}$$

y donde

$$\tau_X(h) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h, D)(f) = h^*(f) = fh$$

Por otro lado,

$$Yf = \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D) \right)_{X \in \mathcal{C}}$$

donde

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f)(h) = f_*(h) = fh$$

En conclusión, la función (1) coincide con la función (2) y por lo tanto es una biyección. $\square$

Debemos pensar en la inmersión de Yoneda como una suerte de "representación" de la categoría $\mathcal{C}$ como una subcategoría plena de la categoría de prehaces $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$.[1] Esta representación es muy buena comparada con la que nos da, por ejemplo, el teorema de Cayley. En el teorema de Cayley el morfismo $G \to \mathrm{Sym}(G)$ es inyectivo pero no suele ser sobreyectivo. En cambio, la inmersión de Yoneda es plena.

Lema. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor fiel y pleno y sean $A, B \in \mathcal{C}$. Entonces $FA \simeq FB \Rightarrow A \simeq B$. Más específicamente, F refleja isomorfismos, i.e. si $f : A \to B$ es una flecha en $\mathcal{C}$ tal que $Ff : FA \to FB$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. Sean $FA \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} FB$ flechas tales que $\varphi\psi = 1_B$ y $\psi\varphi = 1_A$.

Como F es pleno, entonces $\varphi = Ff$ y $\psi = Fg$ para ciertas flechas $A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$.

Entonces $F(fg) = Ff \circ Fg = \varphi\psi = 1_{FB} = F(1_B)$. Como F es fiel, entonces $fg = 1_B$. Análogamente $gf = 1_A$. Entonces $f : A \to B$ es un isomorfismo, luego $A \simeq B$. $\square$

Corolario. *Sean $A, B \in \mathcal{C}$. Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$ entonces $A \simeq B$.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata del lema anterior aplicado a la inmersión de Yoneda. $\square$

Una consecuencia directa de este corolario del lema de Yoneda y de que los functores representables preservan límites es que todo functor adjunto a derecha preserva límites.[2]

Podemos dar otro corolario del lema de Yoneda.

Definición. Sea $X : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ un functor contravariante.

1. Una *representación* de X es un par (C, α) donde $C \in \mathcal{C}$ y $\alpha : \mathrm{Hom}(-, C) \Rightarrow X$ es un isomorfismo natural.

[1] Se le suele llamar *prehaz en $\mathcal{C}$* a un functor contravariante $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

[2] Bueno, lo que se deduce directamente es que el objeto límite es preservado: que las flechas límite son preservadas requiere una verificación adicional.

2. Un par (C, x) donde $C \in \mathcal{C}$ y $x \in XC$ es un *elemento* del prehaz X.

3. Un elemento (C, u) de X es *universal* si para todo (C', x) elemento de X existe una única $f : C' \to C$ tal que $(Xf)(u) = x$.

Corolario. *Sea X un prehaz*[3]*. Hay una biyección entre pares (C, α) donde $C \in \mathcal{C}$ y $\alpha : \mathrm{Hom}(-, C) \Rightarrow X$ es una transformación natural, y elementos del prehaz X. Esta biyección se restringe a una biyección entre representaciones de X y elementos universales de X.*

Demostración. Si $C \in \mathcal{C}$ y $\mathrm{Hom}(-, C) \Rightarrow X$ es una transformación natural, entonces se le asocia a (C, α) el elemento $(C, \alpha_C(\mathrm{id}_C))$.

Si (C, x) es un elemento de X, se le asocia el par (C, α^x) donde $\alpha^x_{C'}(f) = (Xf)(x)$. Es fácil verificar que α^x es una transformación natural.

Se verifica rápidamente que estas funciones son una inversa de la otra. Además, α^u es biyectiva si y sólo si (C, u) es universal, por definición de α^u. $\square$

Terminamos con un comentario que quizás ilustre la importancia de los elementos de un prehaz. Recordemos que si $\mathcal{C}$ es una categoría y $C \in \mathcal{C}$, un *elemento generalizado* de C es una flecha hacia C.

Sea X un prehaz. El corolario de arriba dice que los elementos de X están en biyección con los elementos generalizados de $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ que parten de un functor hom. Esto justifica quizás la terminología (asumiendo que la terminología de *elemento generalizado* está justificada, y a mi juicio lo está, tomar e.g. $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ y como dominio del elemento un conjunto unitario).

Los elementos de X son además los objetos de una categoría $E(X)$, donde una flecha $(C, x) \to (C', x')$ consiste de una flecha $f : C \to C'$ tal que $(Xf)(x) = x'$.

Hay un functor de proyección $P : E(X) \to \mathcal{C}$ dado por $P(C, x) = C$, $P(f) = f$.

Se puede demostrar un "teorema de densidad" en la categoría de prehaces, cuya idea es que los functores representables son "densos" en la categoría de todos los prehaces. Más formalmente, este teorema dice que el objeto colímite del siguiente diagrama

$$E(X) \xrightarrow{P} \mathcal{C} \xrightarrow{Y} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$$

es exactamente X.

[3]... en una categoría pequeña $\mathcal{C}$, para estar seguros sobre los fundamentos.