Teorema. *Sean* $F, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *functores. Si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, F-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)$ *entonces* $F \cong G$.

Demostración. Sea $\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, F-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)$ un isomorfismo natural. De esta manera, si $A \in \mathcal{D}$ entonces $\tau_{FA,A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FA) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA)$. Definimos $\varphi_A := \tau_{FA,A}(\mathrm{id}_{FA})$.

Dado $A \in \mathcal{D}$, veamos que φ_A es un isomorfismo. Tenemos $\tau^{-1}_{GA,A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GA, GA) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GA, FA)$; definimos $\psi_A := \tau^{-1}_{GA,A}(\mathrm{id}_{GA})$.

La naturalidad de $\tau_{-,A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, FA) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, GA)$ nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[d, "\psi_A"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FA) \arrow[r, "\tau_{FA,A}"] \arrow[d, "\psi_A^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA) \arrow[d, "\psi_A^*"] \\ FA & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GA, FA) \arrow[r, "\tau_{GA,A}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GA, GA) \end{tikzcd}$$

Considerando $\mathrm{id}_{FA} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FA)$, obtenemos que $\psi_A^*(\tau_{FA,A}(\mathrm{id}_{FA})) = \varphi_A\psi_A$ es igual a

$$\tau_{GA,A}(\psi_A^*(\mathrm{id}_{FA})) = \tau_{GA,A}(\psi_A) = \tau_{GA,A}(\tau^{-1}_{GA,A}(\mathrm{id}_{GA})) = \mathrm{id}_{GA}$$

y por lo tanto $\varphi_A\psi_A = \mathrm{id}_{GA}$. Análogamente se verifica que $\psi_A\varphi_A = \mathrm{id}_{FA}$.

Verifiquemos ahora que $\varphi : F \Rightarrow G$ es una transformación natural. Sea $g : A \to A'$ una flecha de $\mathcal{D}$. Tenemos que verificar que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g"'] & FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "Fg"'] & GA \arrow[d, "Gg"] \\ A' & FA' \arrow[r, "\varphi_{A'}"'] & GA' \end{tikzcd} \tag{1}$$

La naturalidad de $\tau_{FA,-} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, F-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, G-)$ nos da la conmutatividad del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FA) \arrow[r, "\tau_{FA,A}"] \arrow[d, "(Fg)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\ A' & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FA') \arrow[r, "\tau_{FA,A'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA') \end{tikzcd}$$

Considerando $\mathrm{id}_{FA} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FA)$, obtenemos que $(Gg)_*(\tau_{FA,A}(\mathrm{id}_{FA})) = Gg \circ \varphi_A$ es igual a $\tau_{FA,A'}((Fg)_*(\mathrm{id}_{FA})) = \tau_{FA,A'}(Fg)$:

$$Gg \circ \varphi_A = \tau_{FA,A'}(Fg) \tag{2}$$

La naturalidad de $\tau_{-,A'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, FA') \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, GA')$ nos da la conmutatividad del siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "Fg"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA', FA') \arrow[r, "\tau_{FA',A'}"] \arrow[d, "(Fg)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA', GA') \arrow[d, "(Fg)^*"] \\ FA' & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FA') \arrow[r, "\tau_{FA,A'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, GA') \end{tikzcd}$$

Considerando $\mathrm{id}_{FA'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA', FA')$, obtenemos que $(Fg)^*(\tau_{FA',A'}(\mathrm{id}_{FA'})) = \varphi_{A'} \circ Fg$ es igual a $\tau_{FA,A'}((Fg)^*(\mathrm{id}_{FA'})) = \tau_{FA,A'}(Fg)$, i.e. $\tau_{FA,A'}(Fg) = \varphi_{A'} \circ Fg$.

De la ecuación (2) deducimos que $Gg \circ \varphi_A = \varphi_{A'} \circ Fg$, i.e. el cuadrado (1) conmuta.

Por lo tanto $\varphi : F \Rightarrow G$ es un isomorfismo natural, terminando la demostración. □

Corolario. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes)$ una categoría monoidal cerrada. Sea I su objeto unidad. Entonces $[I, -] \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, donde $[I, -]$ designa el hom interno.*

Demostración. Como $- \otimes I \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ y $- \otimes I$ es el adjunto a izquierda de $[I, -]$, tenemos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, [I, -]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(- \otimes I, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$$

La tesis se deduce inmediatamente del teorema anterior. □