Adenda a la monografía 'Functores adjuntos y teoremas de adjunción'

Bruno Stonek

bruno@stonek.com

2 de julio de 2013:

• Agréguese el siguiente ítem trivial a la observación 1.3.2:
Si τ es un isomorfismo natural, entonces $H\tau$ y τF son isomorfismos naturales.

• En la sección 1.3.2, modifíquese la definición 1.3.7 para decir que en ese caso, se dice que F y G son *functores pseudo-inversos*. Obsérvese que G también es una equivalencia de categorías. Agréguese luego la siguiente

Observación 1. Una pseudo-inversa de una equivalencia de categorías $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es única a menos de isomorfismo natural. En efecto, si $G, G' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ satisfacen $GF \cong \mathrm{id}_\mathcal{C} \cong G'F$ y $FG \cong \mathrm{id}_\mathcal{D} \cong FG'$, entonces

$$G = \mathrm{id}_\mathcal{C} G \cong (G'F)G = G'(FG) \cong G'\mathrm{id}_\mathcal{D} \cong G'$$

• Agréguese la siguiente proposición antes de la observación 1.3.4:

Proposición 2. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor. Entonces F induce una transformación natural*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(-,-)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F-,F-)"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow F_{-,-}"] \end{tikzcd}$$

donde si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A,B) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(FA, FB)$ es $F_{A,B}(f) = Ff$.

La transformación natural $F_{-,-}$ es un isomorfismo natural si y sólo si F es fiel y pleno.

Demostración. Debemos verificar la conmutatividad del siguiente diagrama, para flechas f, f' cualesquiera:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, A') \arrow[r, "F_{A,A'}"] \arrow[d, "{[f^*, f'_*]}"'] & \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(FA, FA') \arrow[d, "{[(Ff)^*, (Ff')_*]}"] \\ A & B' & \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(B, B') \arrow[r, "F_{B,B'}"'] & \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(FB, FB') \end{tikzcd}$$

Sea $h \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, A')$. Recorriendo el diagrama en sentido horario, obtenemos

$$[(Ff)^*, (Ff')_*](F_{A,A'}(f)) = Ff' \circ Fh \circ Ff$$

Recorriendo el diagrama en sentido antihorario, obtenemos

$$F_{B,B'}([f^*, f'_*](h)) = F(f' \circ h \circ f) = Ff' \circ Fh \circ Ff$$

Esto prueba la naturalidad de $F_{-,-}$.

La última afirmación se deduce de que los isomorfismos de **Set** son las biyecciones, y de que por definición F es fiel y pleno cuando $F_{A,B}$ es una biyección para todo $A, B \in \mathcal{C}$. $\square$

- Modifíquese la proposición 2.3.9 de la siguiente manera.[1]

Proposición 3. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una equivalencia de categorías, y sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor pseudo-inverso de F. Sea $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ un isomorfismo natural. Entonces (F, G, η) es una adjunción.*

Dualmente, si $\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo natural, entonces (F, G, ϵ) es una adjunción.

Demostración. Se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF-, G-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)$$

donde el primer isomorfismo natural es el inducido por G como en la proposición 2, y el segundo isomorfismo natural es inducido por η. Más explícitamente, el segundo isomorfismo natural es el siguiente: si $\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left, "GF"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \end{tikzcd}$, consideramos el isomorfismo natural

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF-,-)"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\nu"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

donde $\nu = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)(\eta \times \mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{D}}})$ (composición de una transformación natural con un functor). Es decir, $\nu_{C,D}(h) = \eta_C^*(h) = f \circ \eta_C$.

Esto prueba que (F, G) es un par adjunto. Veamos que η es la unidad de esta adjunción, verificando su propiedad universal. Si $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$, $f : C \to GD$, entonces existe una única $g : FC \to D$ tal que Gg hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_C"'] & GD & & D \\ GFC \arrow[ur, dotted, "Gg"'] & & FC \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto: observar primero que como η_C es un isomorfismo, entonces podemos considerar $f \circ \eta_C^{-1} : GFC \to GD$. Como G es una equivalencia de categorías, en particular es un functor fiel y pleno, luego existe una única $g : FC \to D$ tal que $f \circ \eta_C^{-1} = Gg$. Esta g es la única que satisface lo deseado. $\square$

[1] Esta demostración, además de ser más elegante, prueba algo más que la proposición 2.3.9. No solo prueba que toda equivalencia de categorías es un functor adjunto, sino que además, su pseudo-inversa es su adjunto y un isomorfismo natural $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ o $FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ provee una unidad o una counidad.

Corolario 4. *Si F es una equivalencia de categorías, entonces es un adjunto a izquierda y a derecha.*

Demostración. Que F es un adjunto a izquierda se deduce directamente de la proposición anterior, y que F es un adjunto a derecha se deduce de que el rol de dos functores pseudo-inversos es simétrico. $\square$

Observación 5. No es cierto que si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías, con $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor pseudo-inverso de F y $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ y $\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ isomorfismos naturales, entonces (F, G, η, ϵ) es una adjunción: estas η y ϵ no tienen por qué satisfacer las identidades triangulares que nos dan una compatibilidad entre ellas.

En el caso en el que sí se cumple que (F, G, η, ϵ) es una adjunción, se dice que (F, G, η, ϵ) es una *equivalencia adjunta*.

Se puede demostrar (no lo haremos aquí) que si (F, G, η) es una terna como en la proposición 3, entonces existe un único isomorfismo natural $\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ tal que (F, G, η, ϵ) es una equivalencia adjunta (dualmente con (F, G, ϵ)).

20 de abril de 2016:

- Corríjase el ejemplo 2.5.10.3: la categoría $\mathbf{Top}_*$ no es monoidal. La asociatividad puede fallar para espacios cualesquiera (May-Sigurdsson, sección 1.5). Sí es cierto que $\mathbf{CGHaus}_*$ es monoidal.