Hacia la arcada del álgebra homológica

Una introducción a las categorías abelianas

Bruno Stonek

bruno@stonek.com

8 de julio de 2011

Índice

1. Definiciones previas

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es:

a) *inicial* si para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $A \to X$,

b) *final* si para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $X \to A$,

c) *cero* si es inicial y final.

Observación 1. Un objeto inicial en $\mathcal{C}$ es un objeto final en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. En particular un objeto cero en $\mathcal{C}$ es también un objeto cero en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Proposición 2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si existe un objeto inicial (final) en $\mathcal{C}$ entonces es único a menos de isomorfismo. En particular si existe un objeto cero entonces es único a menos de isomorfismo.*

Demostración. Sean $A, A' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ objetos iniciales en $\mathcal{C}$.

Como A es inicial, existe un único morfismo $A \xrightarrow{f} A'$.

Como A' es inicial, existe un único morfismo $A' \xrightarrow{g} A$.

Por lo tanto $gf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \ni \mathrm{id}_A$: al ser A inicial debe ser entonces $gf = \mathrm{id}_A$. Análogamente se prueba $fg = \mathrm{id}_{A'}$, y por lo tanto f es un isomorfismo.

Esto prueba la unicidad a menos de isomorfismo del objeto inicial en cualquier categoría. La unicidad del objeto final se deduce de la unicidad del objeto inicial en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. □

Notación. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si tiene un objeto inicial, notaremos a uno de ellos por $\varnothing$. Si tiene un objeto final, notaremos a uno de ellos por $\mathbf{1}$. Si tiene un objeto cero, notaremos a uno de ellos por $\mathbf{0}$.

La elección de la notación se justifica en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.

1. En **Set**, hay un único objeto inicial que es el conjunto vacío $\varnothing$. Los objetos finales son exactamente los conjuntos unitarios $\{x\}$. En particular no hay objeto cero en **Set**.

2. En **Mon**, los objetos iniciales y finales (y por lo tanto cero) son los monoides triviales $\{e\}$. Por lo tanto también en **Grp**, **Ab** y **R-Mód**.

3. En **Ring**, los objetos finales son los anillos triviales. No son objetos iniciales pues el cero debe ir al cero y el uno al uno. El anillo $\mathbb{Z}$ es el único objeto inicial.

4. En **Fld** no hay objetos iniciales ni finales. En efecto, no hay morfismos entre cuerpos de diferente característica. Sin embargo, si nos restringimos a la subcategoría de cuerpos de una característica fija, entonces el cuerpo primo $\mathbb{F}_p$ o $\mathbb{Q}$ es un objeto inicial, pero no hay objeto final.

Observación 4. Sea A un objeto de **Set**. Dar un elemento $x \in A$ es lo mismo que dar una flecha $x : 1 \to A$. Generalizando a una categoría $\mathcal{C}$ con un objeto final, un *elemento global* de A es un morfismo $1 \to A$.

En ciertas categorías como **Set** o **Top** los elementos globales son suficientes para determinar los morfismos, en el sentido que dos morfismos $f, g : A \to B$ son iguales si y sólo si para cualquier elemento global $x : 1 \to A$ se tiene $fx = gx$.

Sin embargo, en otras categorías como **Mon** esto no es cierto, pues para un objeto A hay un sólo elemento global $1 \to A$ que corresponde al neutro de A, y por lo tanto cualquier par de morfismos $A \to B$ coinciden en el elemento global.

Esto nos lleva a definir un *elemento generalizado* de un objeto A en una categoría $\mathcal{C}$ como una flecha $X \to A$ para algún $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Decimos que es un morfismo *constante* si vale lo mismo en todos los elementos generalizados, i.e. si para cualquier $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y cualquier par de flechas $g, h : X \to A$ se tiene $fg = fh$, i.e. el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Dualmente, f es un morfismo *coconstante* si el siguiente diagrama conmuta para cualquier par de flechas $g, h : X \to B$:

$$\begin{tikzcd} & X \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, shift right, "h"] \arrow[u, shift left, "g"'] \end{tikzcd}$$

Un *morfismo cero* es un morfismo constante y coconstante.

Una *categoría con morfismos cero* es una categoría $\mathcal{C}$ tal que existe una familia de morfismos $\{0_{X,Y} : X \to Y\}_{X,Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$ que cumple $0_{B,X} f = 0_{A,X}$ y $f 0_{X,A} = 0_{X,B}$ para todo morfismo $f : A \to B$ y todo objeto X en $\mathcal{C}$, i.e. los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "0_{A,X}"'] & B \arrow[r, "0_{B,X}"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "0_{X,A}"] \arrow[rr, bend right, "0_{X,B}"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Cuando no haya riesgo de confusión notaremos 0 en vez de $0_{X,Y}$.

Observación 5.

- La familia de morfismos en la definición de categoría con morfismos cero está formada por morfismos cero. En efecto, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] \arrow[dr, "0_{X,B}"] & \\ A \arrow[r, "0_{A,B}"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \\ A \arrow[ur, "0_{A,X}"] \arrow[r, "0_{A,B}"'] & B \arrow[u, shift right, "h"] \arrow[u, shift left, "g"'] \end{tikzcd}$$

  Pero además, los morfismos cero de una categoría con morfismos cero satisfacen una condición de compatibilidad.

- En una categoría con morfismos cero, la familia de morfismos cero es única. En efecto, si $\{0_{X,Y}\}$ y $\{0'_{X,Y}\}$ son dos familias de morfismos cero, entonces $0'_{A,B} = 0'_{A,B} 0_{A,A} = 0_{A,B}$ para todo par de objetos A, B en $\mathcal{C}$.

- Sea $\mathbf{Set}_*$ la categoría de conjuntos punteados cuyos objetos son pares (A, a) donde A es un conjunto y $a \in A$, y cuyos morfismos $(A, a) \to (B, b)$ son funciones $f : A \to B$ tales que $f(a) = b$. Es una categoría monoidal, con $A \otimes B = A \wedge B$, donde $A \wedge B$ es el *producto smash*: $A \wedge B := \frac{A \times B}{\{(x,y) : x = a \text{ ó } y = b\}}$.

  Entonces una categoría con morfismos cero es exactamente una categoría enriquecida sobre $\mathbf{Set}_*$.

Proposición 6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero. La familia de morfismos $\{X \to \mathbf{0} \to Y\}_{X,Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$ convierte a $\mathcal{C}$ en una categoría con morfismos cero.*

Demostración. La prueba se lee en la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "0_{A,\mathbf{0}}"'] \arrow[rrr, bend right=50, "0_{A,X}"'] & B \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0_{B,X}"] & \mathbf{0} \arrow[r] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0_{X,A}"] \arrow[rrr, bend right=50, "0_{X,B}"'] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0_{\mathbf{0},B}"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$\square$

Ejemplo 7. 1. En **Set**, los únicos morfismos cero son las funciones vacías $\emptyset : \emptyset \to X$, necesariamente con dominio $\emptyset$, por lo tanto **Set** no es una categoría con morfismos cero.

2. Sea M un monoide. Podemos verlo como una categoría con un sólo objeto, y una flecha por cada elemento de M, siendo la composición de flechas el producto del monoide. Notaremos esta categoría por $\mathcal{C}_M$. Recíprocamente, toda categoría con un sólo objeto es un monoide.

   Si $M = G$ es un grupo, en la categoría $\mathcal{C}_G$ todas las flechas son isomorfismos. Recíprocamente, toda categoría con un sólo objeto y tal que todas sus flechas son isomorfismos es un grupo.

   En particular, si R es un anillo es un grupo abeliano, y notaremos $\mathcal{C}_R$ a la categoría recién descrita.

   Si R no es el anillo trivial, $\mathcal{C}_R$ no tiene objetos iniciales ni finales, y por lo tanto no tiene objeto cero. Sin embargo tiene un morfismo cero: el neutro para la suma, y este morfismo cero convierte trivialmente a $\mathcal{C}_R$ en una categoría con morfismos cero.

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con morfismos cero. El *núcleo* de un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ es, si existe, el igualador de f con $0_{A,B}$.

Es decir, es un par $(\operatorname{Ker} f, \ker f)$, donde $\ker f : \operatorname{Ker} f \to A$, que satisface $f(\ker f) = 0_{A,B}(\ker f)$ y es universal respecto de esta propiedad, es decir, todo morfismo $g : X \to A$ en $\mathcal{C}$ que también satisface $fg = 0_{A,B}g$ se factoriza de manera única a través de $\operatorname{Ker} f$. En otras palabras, existe una única $u : X \to \operatorname{Ker} f$ tal que $(\ker f)u = g$, i.e. tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{A,B}"'] & B \\ X \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

El *conúcleo* de f es, si existe, el núcleo de f^{op} en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Más explícitamente, es el coigualador de f con $0_{A,B}$.

Es decir, es un par $(\operatorname{Coker} f, \operatorname{coker} f)$, donde $\operatorname{coker} f : B \to \operatorname{Coker} f$ que satisface $(\operatorname{coker} f)f = \operatorname{coker} f 0_{A,B}$ y es universal respecto de esta propiedad, es decir, todo morfismo $g : B \to X$ que también satisface $gf = g0_{A,B}$ se factoriza de manera única a través de $\operatorname{Coker} f$. En otras palabras, existe una única $u : \operatorname{Coker} f \to X$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{A,B}"'] & B \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] \arrow[dr, "g"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dotted, "u"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ con morfismos cero *tiene núcleos* (resp. *conúcleos*) si para todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ existe el núcleo (resp. conúcleo) de f.

Observación 8. Como los igualadores y los coigualadores son únicos a menos de isomorfismo, entonces los núcleos y los conúcleos también.

Proposición 9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con morfismos cero. Entonces el núcleo de $0_{A,B} : A \to B$ es (A, id_A) (a menos de isomorfismo). Dualmente, su conúcleo es (B, id_B) (a menos de isomorfismo).*

Demostración. La prueba es el siguiente diagrama de núcleo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] & A \arrow[r, shift left, "0_{A,B}"] \arrow[r, shift right, "0_{A,B}"'] & B \\ X \arrow[u, dotted, "f"] \arrow[ur, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

□

Ejemplo 10. **R-Mód** tiene núcleos. Para ver esto, veamos más en general que tiene igualadores y coigualadores. Demostremos que el igualador de $f, g : A \to B$ es el conjunto $K := \{x \in A : f(x) = g(x)\}$, junto con $\iota : K \to A$ la inclusión.

Obviamente $f\iota = g\iota$. Veamos que es universal respecto de esta propiedad. Sea $m : X \to A$ tal que $fm = gm$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $f(m(x)) = g(m(x))$ para todo $x \in X$, por lo tanto $m(x) \in K$ para todo $x \in X$. Podemos restringir entonces el codominio de m a K, formando $\tilde{m} : X \to K$. Esta $\tilde{m}$ es tal que $\iota\tilde{m} = m$, y es la única que cumple esto ya que ι es una inclusión.

Por lo tanto K es el igualador de f y g; es el núcleo algebraico $\mathrm{Ker}\ (f - g)$.

Poniendo $g = 0_{A,B}$, encontramos que en **R-Mód** el núcleo categórico de f coincide con el núcleo algebraico de f. Por lo tanto esto es cierto también en **Ab**.

Sin embargo, en **Ring** la noción de núcleo algebraico y núcleo categórico divergen. En el sentido categórico los núcleos ni siquiera están definidos pues la categoría de anillos no tiene morfismos cero, sin embargo tenemos una noción familiar de núcleo algebraico de un homomorfismo de anillos. Llevar esta noción a lenguaje categórico es más complicado, y no lo haremos aquí.

Ejercicio 11. Mostrar que **R-Mód** tiene conúcleos viendo que el igualador de $f, g : A \to B$ morfismos de R-módulos es $\frac{B}{\mathrm{Im}\ (f-g)}$.

Proposición 12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con morfismos cero y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Si existe el núcleo de f, entonces* $\ker\ f$ *es un monomorfismo; si existe el conúcleo de f, entonces* $\mathrm{coker}\ f$ *es un epimorfismo.*

Demostración. Como el conúcleo de f es el núcleo de f^{op} en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ y la noción dual de monomorfismo es epimorfismo, basta demostrar que el núcleo es un monomorfismo.

Sean g, h tales que $X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ker}\ f \xrightarrow{\ker f} A$ conmuta, i.e. $(\ker\ f)g = (\ker\ f)h$. Tenemos que probar que $g = h$.

Como $\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\ker f} A \overset{f}{\underset{0_{A,B}}{\rightrightarrows}} B$ conmuta, se tiene que $(\ker f)g$ hace conmutar $X \xrightarrow{(\ker f)g} A \overset{f}{\underset{0_{A,B}}{\rightrightarrows}} B$, por lo tanto por la propiedad universal del núcleo, existe una única $u : X \to \operatorname{Ker} f$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{A,B}"'] & B \\
X \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "(\ker f)g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Pero tanto g como h hacen conmutar el diagrama en el lugar de u, por lo tanto son iguales. □

2. Categorías preaditivas

Definición. Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es *preaditiva*, o una *Ab-categoría*, si:

I) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano para todo $A, B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$,

II) La composición de morfismos en $\mathcal{C}$,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (f, g) \mapsto gf$$

es biaditiva para todo $A, B, C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, i.e.

$$(g + g')f = gf + g'f, \qquad g(f + f') = gf + gf'$$

para todo $f, f' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g, g' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$.

Observación 13.

- Una categoría preaditiva es una categoría enriquecida sobre la categoría monoidal **Ab**. Es decir, sus hom-sets tienen una estructura de grupo abeliano que se comporta bien con la composición.

- En una categoría preaditiva, se tiene que para cualquier objeto A, el conjunto de endomorfismos de A, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ es un anillo con la composición como producto.

  Recíprocamente, cualquier anillo es el conjunto de endomorfismos de un objeto de alguna categoría preaditiva. En efecto, sea R un anillo. Entonces claramente $\mathcal{C}_R$ es una categoría preaditiva, y el conjunto de endomorfismos de su único objeto es R.

  De esta manera, es lo mismo dar un anillo que dar una categoría preaditiva con un sólo objeto. Esto nos da una definición puramente categórica de un anillo: una categoría preaditiva con un sólo objeto. A su vez esto nos permite ver a las categorías preaditivas con más de un objeto como generalizaciones de los anillos.

Proposición 14. *Toda categoría preaditiva $\mathcal{C}$ tiene morfismos cero, dados por los neutros de los grupos abelianos $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$.*

Demostración. En efecto, si $0_{X,Y}$ es el neutro del grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, entonces, dado un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$:

$$0_{B,X}f = (0_{B,X} + 0_{B,X})f = 0_{B,X}f + 0_{B,X}f \Rightarrow 0_{B,X}f = 0_{A,X}$$

restando de ambos lados. Análogamente $f0_{X,A} = 0_{X,B}$. Por lo tanto $\{0_{X,Y}\}_{X,Y\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$ es una familia de morfismos cero para $\mathcal{C}$. □

Ejemplo 15.

- Las categorías **Ab** y **R-Mód** son preaditivas.
- La categoría **Grp** no es preaditiva, pues la suma $f + g$ de homomorfismos de grupos no es en general un homomorfismo de grupos.
- Como ya vimos en la observación anterior, si R es un anillo entonces $\mathcal{C}_R$ es una categoría preaditiva. Este es un ejemplo de una categoría preaditiva sin objeto cero.

Proposición 16. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva, $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Son equivalentes:*

i) *A es inicial,*

ii) *A es final,*

iii) *A es cero,*

iv) $\mathrm{id}_A = 0_{A,A} : A \to A$*,*

v) *el grupo abeliano* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ *es trivial.*

Demostración. Ejercicio sencillo para el lector. □

2.1. Functores aditivos, representaciones y módulos

Definición. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías preaditivas. Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es *aditivo* si a nivel de flechas es un morfismo de grupos abelianos, i.e. si

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{D}(F(A), F(B))$$

cumple $F(f + g) = F(f) + F(g)$ para todo $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Observación 17.

1. La composición de functores aditivos es un functor aditivo, y el functor identidad es aditivo. Por lo tanto tenemos una subcategoría de **Cat** cuyos objetos son las categorías pequeñas preaditivas y cuyos morfismos son los functores aditivos.
2. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{D}$ es una categoría preaditiva, entonces la categoría de functores **Fun**$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es preaditiva, con la suma de transformaciones naturales punto a punto.
3. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías preaditivas, con $\mathcal{C}$ pequeña, entonces la categoría de functores aditivos **Add**$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una categoría preaditiva (es una subcategoría de **Fun**$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$).

Ejemplo 18. Si R y S son anillos, un homomorfismo de anillos $R \to S$ se corresponde con un functor aditivo $F : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_S$.

A continuación damos una definición categórica de una *representación*, y veremos cómo se corresponde con las representaciones algebraicas conocidas.

Definición. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías. Una *$\mathcal{D}$-representación* de $\mathcal{C}$ es un functor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Ejemplo 19. Sea G un grupo y tomemos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$. Notemos $\star$ al único objeto de $\mathcal{C}_G$.

1. Si $\mathcal{D} = \mathbf{Set}$, entonces un functor $F : \mathcal{C}_G \to \mathbf{Set}$ es una representación por permutaciones de G, i.e. un homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{Sym}(X)$. En otras palabras, una acción de G en X. Explícitamente, $V = F(\star)$ y ρ es F a nivel de flechas.

2. Si $\mathcal{D} = \mathbf{Vect}_k$, entonces un functor $F : \mathcal{C}_G \to \mathbf{Vect}_k$ es una representación lineal de G, i.e. un homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, igual que antes. En otras palabras, una acción lineal de G en V.

Ahora damos una definición categórica de un *módulo*, y veremos cómo es una generalización de los módulos sobre un anillo.

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva. La *categoría de módulos* de $\mathcal{C}$ es $\mathbf{Mód}(\mathcal{C}) := \mathbf{Add}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$.

Ejemplo 20. Sea R un anillo y tomemos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_R$. De nuevo, notemos $\star$ al único objeto de $\mathcal{C}_R$.

Un R-módulo es un functor *aditivo* $F : \mathcal{C}_R \to \mathbf{Ab}$. En efecto, recordemos que un R-módulo M es un grupo abeliano M con un homomorfismo de *anillos* $\rho : R \to \mathrm{End}(G)$.

Por lo tanto, tenemos $\mathbf{R}\text{-}\mathbf{Mód} = \mathbf{Add}(\mathcal{C}_R, \mathbf{Ab}) = \mathbf{Mód}(\mathcal{C}_R)$ (isomorfismo de categorías).

2.2. Biproductos

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Un *biproducto* de A y B es una quíntupla $(C, \pi_A, \pi_B, \iota_A, \iota_B)$, donde $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $\pi_A, \pi_B, \iota_A, \iota_B$ son flechas:

$$A \underset{\iota_A}{\overset{\pi_A}{\leftrightarrows}} C \underset{\pi_B}{\overset{\iota_B}{\leftrightarrows}} B \tag{1}$$

tales que:

$$\pi_A\iota_A = \mathrm{id}_A, \qquad \pi_B\iota_B = \mathrm{id}_B \tag{2}$$

$$\iota_A\pi_A + \iota_B\pi_B = \mathrm{id}_C \tag{3}$$

Observación 21.

- En el contexto de la definición anterior, se tiene:

$$\pi_A\iota_B = 0_{B,A}, \qquad \pi_B\iota_A = 0_{A,B} \tag{4}$$

En efecto:

$$\pi_A\iota_B = \pi_A\mathrm{id}_C\iota_B = \pi_A(\iota_A\pi_A + \iota_B\pi_B)\iota_B = \overbrace{\pi_A\iota_A}^{\mathrm{id}_A}\pi_A\iota_B + \pi_A\iota_B\overbrace{\pi_B\iota_B}^{\mathrm{id}_B} = \pi_A\iota_B + \pi_A\iota_B$$

Restando de ambos lados se obtiene $\pi_A\iota_B = 0_{B,A}$. Análogamente se obtiene $\pi_B\iota_A = 0_{A,B}$.

- Si $(C, \pi_A, \pi_B, \iota_A, \iota_B)$ es un biproducto de A y B en $\mathcal{C}$, entonces se verifica automáticamente que $(C, \iota_A, \iota_B, \pi_A, \pi_B)$ es un biproducto de A y B en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

- Análogamente, si $\mathcal{C}$ es una categoría preaditiva podemos definir el biproducto de una familia finita $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ como una $(2n+1)$-upla $(C, \pi_1, \ldots, \pi_n, \iota_1, \ldots, \iota_n)$ donde $\pi_i : C \to A_i$, $\iota_i : A_i \to C$ y tal que $\pi_i \iota_i = \mathrm{id}_{A_i}$ y $\sum_{i=1}^{n} \iota_i \pi_i = \mathrm{id}_C$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Proposición 22. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $(C, \pi_A, \pi_B, \iota_A, \iota_B)$ un biproducto de A y B. Entonces (C, π_A, π_B) es un producto de A y B y (C, ι_A, ι_B) es un coproducto de A y B.*

En particular, si existe el biproducto de A y B entonces: es único a menos de isomorfismo, y todo producto y coproducto de A y B son isomorfos.

Demostración. Verifiquemos que (C, π_A, π_B) es un producto de A y B. Sea $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y sean $f : X \to A$, $g : X \to B$. Tenemos que verificar que existe una única $u : X \to C$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\
& X \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que existe u que hace conmutar el diagrama. Entonces $\pi_A u = f, \pi_B u = g$. Componiendo con ι_A y con ι_B y sumando obtenemos:

$$\iota_A \pi_A u + \iota_B \pi_B u = \iota_A f + \iota_B g$$

Por lo tanto $\overbrace{(\iota_A \pi_A + \iota_B \pi_B)}^{\mathrm{id}_C} u = u = \iota_A f + \iota_B g$ entonces si u existe, es única. Además $\iota_A f + \iota_B g$ efectivamente hace conmutar el diagrama:

$$\pi_A(\iota_A f + \iota_B g) = \overbrace{\pi_A \iota_A}^{\mathrm{id}_A} f + \overbrace{\pi_A \iota_B}^{0_{B,A}} g = f$$

y análogamente $\pi_B(\iota_A f + \iota_B g) = g$.

Tenemos que $(C, \iota_A, \iota_B, \pi_A, \pi_B)$ es un biproducto de A y B en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Entonces por lo recién probado (C, ι_A, ι_B) es un producto de A y B en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, por lo tanto es un coproducto de A y B en $\mathcal{C}$. □

Observación 23.

- Verificar que un objeto es el (co)producto de otros dos requiere verificar una condición sobre muchas flechas: ser un (co)producto es algo *externo* a priori. En una categoría preaditiva, podemos verificar una condición *interna*, la de ser un biproducto.

- En general, se puede definir el biproducto de A y B objetos de una categoría con morfismos cero. Es una quíntupla como en (1) que satisface (2), (4) y tal que (C, π_A, π_B) es un producto de A y B y (C, ι_A, ι_B) es un coproducto de A y B.

  Se obtiene que ambas definiciones son equivalentes para una categoría preaditiva, i.e. en una categoría preaditiva (3) es equivalente con (2) + (4) + biproducto es producto y coproducto.[1]

[1] Como además la noción de biproducto por lo general se utiliza en categorías preaditivas, parece sensato optar por la definición más económica de biproducto, si bien es menos general.

Proposición 24. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Son equivalentes:*

1. *Existe un producto de A y B,*
2. *Existe un coproducto de A y B,*
3. *Existe un biproducto de A y B.*

Además, en este caso los objetos producto, coproducto y biproducto son isomorfos.

Demostración. La proposición anterior nos dice que $3 \Rightarrow 1, 2$. Basta ver que $1 \Rightarrow 3$ y $2 \Rightarrow 3$.

($1 \Rightarrow 3$) Sea $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ el producto de A y B. Tenemos entonces que para todo objeto X y flechas $f : X \to A$, $g : X \to B$ existe una única $u : X \to A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Tomemos $X = A, f = \mathrm{id}_A, g = 0_{A,B}$ y $X = B, f = 0_{B,A}, g = \mathrm{id}_B$, de tal manera que existen únicos ι_A, ι_B que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\ & A \arrow[ul, "\mathrm{id}_A"] \arrow[u, dotted, "\iota_A"] \arrow[ur, "0_{A,B}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\ & B \arrow[ul, "0_{B,A}"] \arrow[u, dotted, "\iota_B"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_B"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que $(A \times B, \pi_A, \pi_B, \iota_A, \iota_B)$ es un biproducto de A y B.

Lo único que hay que verificar es que $\varphi := \iota_A\pi_A + \iota_B\pi_B = \mathrm{id}_{A\times B}$. φ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[u, dotted, "\varphi"] \arrow[ur, "\pi_B"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto,

$$\pi_A\varphi = \pi_A(\iota_A\pi_A + \iota_B\pi_B) = \overbrace{\pi_A\iota_A}^{\mathrm{id}_A}\pi_A + \overbrace{\pi_A\iota_B}^{0_{B,A}}\pi_B = \pi_A$$

y se verifica $\pi_B\varphi = \pi_B$ de manera análoga.

Como también $\mathrm{id}_{A\times B}$ hace conmutar el diagrama, la propiedad universal del producto nos da que $\varphi = \mathrm{id}_{A\times B}$.

($2 \Rightarrow 3$) Un coproducto en $\mathcal{C}$ es un producto en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Por $1 \Rightarrow 3$ tenemos entonces que existe un biproducto $(C, \pi_A, \pi_B, \iota_A, \iota_B)$ de A y B en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Entonces $(C, \iota_A, \iota_B, \pi_A, \pi_B)$ es un biproducto de A y B en $\mathcal{C}$. $\square$

3. Categorías aditivas

Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ es *aditiva* si:

I) es preaditiva,

II) tiene un objeto cero,

III) tiene biproductos binarios, i.e. para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$ existe su biproducto.

Observación 25.
- La proposición 24 nos dice que en la condición III) es equivalente poner que $\mathcal{C}$ tenga productos binarios, o coproductos binarios.
- Las condiciones II) y III) son equivalentes a II'): $\mathcal{C}$ *tiene biproductos finitos*. En efecto, un objeto final (resp. inicial) es el producto (resp. coproducto) de $\varnothing$ objetos.

Proposición 26. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva, $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Entonces f es un monomorfismo si y sólo si tiene núcleo y es cero. Dualmente, f es un epimorfismo si y sólo si tiene conúcleo y es cero.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un monomorfismo. Veamos que $\mathbf{0}$ con $0_{\mathbf{0},A}$ es un núcleo para f. Se tiene que $f0_{\mathbf{0},A} = 0_{\mathbf{0},B} = 0_{A,B}0_{\mathbf{0},A}$. Sea $g : X \to A$ tal que $fg = 0_{A,B}g$. Entonces $fg = 0_{X,B} = f0_{X,A}$, luego $g = 0_{X,A}$ pues f es mono. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "0_{\mathbf{0},A}"] & A \arrow[r, tail, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{A,B}"'] & B \\ X \arrow[ur, "0_{X,A}"'] & & \end{tikzcd}$$

Existe un único mapa $X \to \mathbf{0}$, y éste hace conmutar el diagrama.

Recíprocamente, sea $f : A \to B$ un morfismo tal que $(\mathbf{0}, 0_{\mathbf{0},A})$ es su núcleo. Sean $g, h : X \to A$ tales que $fg = fh$. Se tiene que $g - h : X \to A$ es tal que:

$$f(g-h) = fg - fh = 0_{X,B} = 0_{A,B}(g-h)$$

por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "0_{\mathbf{0},A}"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{A,B}"'] & B \\ X \arrow[ur, "g-h"'] & & \end{tikzcd}$$

Como $(\mathbf{0}, 0_{\mathbf{0},A})$ es un núcleo para f, se tiene que existe una única flecha $X \to \mathbf{0}$ que hace conmutar el diagrama. La única flecha posible es $0_{X,\mathbf{0}}$, de donde

$$g - h = 0_{\mathbf{0},A}0_{X,\mathbf{0}} = 0_{X,A} \Rightarrow g = h$$

concluyendo que f es un monomorfismo. $\square$

Observación 27. Un functor entre categorías aditivas es aditivo si y sólo si preserva biproductos (ver [7], página 193).

4. Categorías abelianas

Definición. Una categoría $\mathcal{C}$ es *abeliana* si es una categoría aditiva que además satisface:

I) todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene un núcleo y un conúcleo,

II) todo monomorfismo es un núcleo y todo epimorfismo es un conúcleo.

Si una categoría aditiva satisface solo I), se dice que es *preabeliana*.

La condición II) se expresa también como: todos los monomorfismos y epimorfismos son normales.[2]

Observación 28.
- En una categoría preabeliana, al tener la existencia de (co)núcleos garantizada, para verificar que un morfismo $f : A \to B$ es un monomorfismo, basta verificar que $fx = 0 \Rightarrow x = 0$ para cualquier $x : X \to A$.

  Dualmente, para verificar que es un epimorfismo, basta verificar que $yf = 0 \Rightarrow y = 0$ para cualquier $y : B \to Y$.

- La noción dual de "categoría abeliana" es "categoría abeliana"

Ejemplo 29.
- Las categorías **Ab** y **R-Mód** son abelianas. En efecto, si $i : N \to M$ es mono, entonces $i = \ker (M \twoheadrightarrow M/N)$; si $e : M \to Q$ es epi, entonces $e = \operatorname{coker} (\ker e \rightarrowtail M)$.

- La categoría de grupos abelianos finitamente generados es abeliana. La de grupos abelianos finitos también.

- Si R es un anillo noetheriano a izquierda, la categoría de R-módulos a izquierda finitamente generados es abeliana.

- Un ejemplo sencillo de una categoría que no cumple II), y además ilustra la terminología, es **Grp**. En efecto, toda inclusión $\iota : H \to G$ de un subgrupo en un grupo es un monomorfismo de grupos, sin embargo es equivalente ser el núcleo de un morfismo a que H sea un subgrupo *normal* de G.

- Una categoría aditiva que no es abeliana es la de los módulos libres sobre un anillo R: le faltan núcleos. Un submódulo de un módulo libre no tiene por qué ser libre. ¿Qué pasa si R es un dominio de ideales principales?

- La categoría **Ban** de espacios de Banach con morfismos los operadores acotados es preabeliana, donde si $f : X \to Y$ es un morfismo entonces $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ y $\operatorname{coker} f = Y/\overline{\operatorname{Im} f}$. Tenemos que clausurar la imagen de tal manera que estemos cocientando por un subespacio cerrado, y el resultado nos quede completo. En el fondo, lo que sucede es que los "subobjetos" en esta categoría son los subespacios cerrados, y las imágenes (en el sentido usual) no tienen por qué serlo. En el ejemplo 39 veremos que **Ban** no es abeliana.

[2] Decimos que un monomorfismo (epimorfismo) es *regular* si es un igualador (coigualador), y que es normal si es un núcleo (conúcleo).

Ejercicio 30. a) Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías abelianas. Si $\mathcal{C}$ es pequeña, entonces la categoría de functores $\mathbf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ es abeliana.

b) Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías, con $\mathcal{C}$ pequeña y aditiva y $\mathcal{D}$ abeliana. Entonces $\mathbf{Add}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ es abeliana.

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preabeliana, $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Definimos su *imagen* como el núcleo del conúcleo:

$$\overbrace{\ker\,(\operatorname{coker} f)}^{\operatorname{im} f} : \overbrace{\operatorname{Ker}\,(\operatorname{coker} f)}^{\operatorname{Im} f} \to B$$

y su coimagen como el conúcleo del núcleo:[3]

$$\overbrace{\operatorname{coker}\,(\ker f)}^{\operatorname{coim} f} : A \to \overbrace{\operatorname{Coker}\,(\ker f)}^{\operatorname{Coim} f}$$

Observación 31. La motivación viene de **R-Mód** (por ejemplo). Sea $f : A \to B$, e I la imagen en el sentido usual. Tenemos $\operatorname{coker} f : B \to \frac{B}{I}$: su núcleo es $I \rightarrowtail B$, por lo tanto $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}\,(\operatorname{coker} f) = I$, y el mapa es la inclusión.

Análogamente, la coimagen es $A \twoheadrightarrow \frac{A}{\ker f}$.

Observación 32. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preabeliana y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Construyamos una única $\overline{f}$ que encaje en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, tail, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\operatorname{coim} f"'] & B \arrow[r, two heads, "\operatorname{coker} f"] & \operatorname{Coker} f \\ & \operatorname{Coim} f \arrow[r, dotted, "\overline{f}"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, tail, "\operatorname{im} f"'] & \end{tikzcd} \tag{5}$$

Como $(\operatorname{Im} f, \operatorname{im} f)$ es el núcleo de $\operatorname{coker} f$ y $f : A \to B$ es otra flecha tal que $(\operatorname{coker} f)f = 0$, por la propiedad universal del núcleo existe una única $\tilde{f} : A \to \operatorname{Im} f$ tal que $(\operatorname{im} f)\tilde{f} = f$.

A su vez, como $(\operatorname{Coim} f, \operatorname{coim} f)$ es un conúcleo y $\tilde{f} : A \to \operatorname{im} f$ es otra flecha tal que $\tilde{f}(\ker f) = 0$, entonces existe una única $\overline{f} : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ tal que $\overline{f}(\operatorname{coim} f) = \tilde{f}$.

En conclusión, existe una única $\overline{f} : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ tal que el diagrama anterior conmuta.

Proposición 33. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Si f es un monomorfismo y un epimorfismo, entonces es un isomorfismo.* [4]

Demostración. Como f es un monomorfismo, existe $g : B \to X$ tal que $f = \ker g$. Entonces $gf = g(\ker g) = 0 = 0f$: como f es epimorfismo, esto implica $g = 0_{B,X}$. Pero entonces $f = \ker g = \ker 0_{B,X} = \mathrm{id}_B$ (proposición 9) a menos de isomorfismo. Como una identidad es un isomorfismo, f lo es también. $\square$

Veamos ahora que todo monomorfismo es el núcleo de su conúcleo, y que todo epimorfismo es el conúcleo de su núcleo:

[3] Existen definiciones más generales de imagen y coimagen que no dependen de la existencia de núcleos y conúcleos, a través de *subobjetos* y *objetos cociente*.

[4] Una categoría en la que mono-epi implica iso se dice *balanceada*.

Proposición 34. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Si f es un monomorfismo, entonces* $(\operatorname{im} f, \operatorname{Im} f) = (f, A)$*, y si f es un epimorfismo, entonces* $(\operatorname{coim} f, \operatorname{Coim} f) = (f, B)$ *(a menos de isomorfismo).*

Demostración. Probemos que si $e : B \to C$ es un epimorfismo, entonces $\operatorname{coker} (\ker e) = e$. Dualmente se concluye que si $m : A \to B$ es un monomorfismo entonces $\ker (\operatorname{coker} m) = m$.

Queremos verificar que $e = \operatorname{coker} (\ker e)$. Observemos primero que se tiene $e(\ker e) = 0$. Sea $y : B \to Y$ tal que $y(\ker e) = 0$, queremos ver que existe una única $y' : C \to Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} e \arrow[r, tail, shift left, "\ker e"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[dr, "y"'] & C \arrow[d, dotted, "y'"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Como e es epimorfismo, existe $f : A \to B$ tal que $e = \operatorname{coker} f$. Esta f cumple entonces $ef = (\operatorname{coker} f)f = 0$, por lo tanto por la propiedad universal del núcleo, existe una única $f' : A \to \operatorname{Ker} e$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} e \arrow[r, tail, "\ker e"] & B \arrow[r, shift left, "e"] \arrow[r, shift right, "0"'] & C \\ A \arrow[u, dotted, "f'"] \arrow[ur, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $0 = y(\ker e)$, entonces $0 = y(\ker e)f' = yf$. Como $e = \operatorname{coker} f$, por la propiedad universal del conúcleo, existe una única y' como queremos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[dr, "y"'] & C \arrow[d, dotted, "y'"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

El diagrama conmutativo que resume la demostración es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "f'"'] & & B \arrow[rr, two heads, "e"] \arrow[dr, "y"] & & C \arrow[dl, dotted, "y'"] \\ & \operatorname{Ker} e \arrow[ur, tail, "\ker e"'] \arrow[rr, "0"'] & & Y & \end{tikzcd}$$

$\square$

Observación 35. La proposición anterior no vale siempre. Por ejemplo, en **Mon**, la inclusión $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es un monomorfismo y un epimorfismo, pero no es un isomorfismo.

Observación 36. En el teorema siguiente usaremos la siguiente propiedad fácil de verificar de los monomorfismos y epimorfismos, que nos parece conveniente recordar:

- Si fg es un monomorfismo, entonces g es un monomorfismo.
- Si fg es un epimorfismo, entonces f es un epimorfismo.

Las categorías abelianas fueron introducidas por Buchsbaum (1955) y Grothendieck (1957), en [2] y [6] respectivamente. Ambos le piden a una categoría preabeliana una condición diferente para que sea abeliana: el siguiente teorema muestra que esa condición es equivalente a la definición que hemos dado, que es debida a Freyd ([4]).

Teorema 37. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preabeliana. Entonces $\mathcal{C}$ es abeliana si y sólo si para todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ el morfismo $\overline{f} : \text{Coim } f \to \text{Im } f$ de la observación 32 es un isomorfismo.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $\overline{f}$ es un isomorfismo. Sea $f : A \to B$ un monomorfismo en $\mathcal{C}$: veamos que es un núcleo.

Como f es un monomorfismo, $(\text{Ker } f, \ker f) = (\mathbf{0}, 0_{\mathbf{0},A})$. Por lo tanto

$$\text{Coim } f = \text{Coker } (\ker f) = \text{Coker } 0_{\mathbf{0},A} = A$$

por la proposición 9. Por lo tanto, tenemos $A = \text{Coim } f \simeq \text{Im } f = \text{Ker } (\text{coker } f)$, de donde A es un núcleo. Dualmente se consigue que todo epimorfismo es un conúcleo.

($\Rightarrow$) Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\text{coim } f"'] & B \\
\text{Coim } f \arrow[r, "\overline{f}"] & \text{Im } f \arrow[u, tail, "\text{im } f"']
\end{tikzcd}$$

Para probar que $\overline{f}$ es un isomorfismo, probaremos que es mono y epi. A este fin, probaremos que $(\text{im } f)\overline{f}$ es mono, y por lo tanto $\overline{f}$ es mono; y que $\overline{f}(\text{coim } f)$ es epi, luego $\overline{f}$ es epi.

Sea $i = (\text{im } f)\overline{f}$. Probemos entonces que i es un monomorfismo.

Para ver esto, sea $x : X \to \text{Coim } f$ tal que $ix = 0$. Probemos que $x = 0$. Por la propiedad universal del conúcleo aplicada a x, tenemos que existe una única j que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \text{Coim } f \arrow[r, two heads, "\text{coker } x"] \arrow[dr, "i"'] & \text{Coker } x \arrow[d, dotted, "j"] \\
& & B
\end{tikzcd}$$

Como $\text{coker } x$ y $\text{coim } f$ son ambos epimorfismos, entonces su composición $\varphi = (\text{coker } x)(\text{coim } f)$ también lo es. Por lo tanto existe un $h : H \to A$ tal que $h\varphi = \text{coker } h$. Veamos que existe un único h' tal que $h = (\ker f)h'$, haciendo conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& H \arrow[dl, dotted, "h'"'] \arrow[d, "h"] & & & \\
\text{Ker } f \arrow[r, tail, "\ker f"'] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\text{coim } f"'] & & B & \\
& & \text{Coim } f \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, two heads, "\text{coker } x"'] & & \text{Coker } x \arrow[ul, "j"'] \\
& X \arrow[ur, "x"] & & &
\end{tikzcd}$$

En efecto, $fh = i(\text{coim } f)h = j(\text{coker } x)(\text{coim } f)h = j\varphi h = j(\text{coker } h)h = 0$, por lo tanto por la propiedad universal del núcleo aplicada a f existe una única h' tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\text{Ker } f \arrow[r, tail, "\ker f"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \\
H \arrow[u, dotted, "h'"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora tenemos $(\text{coim } f)h = (\text{coim } f)(\ker f)h' = (\text{coker } (\ker f))(\ker f)h' = 0$. Por la propiedad universal del conúcleo aplicada a h y como $\varphi = \text{coker } h$, existe una única φ' tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "0"'] & A \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "\text{coim } f"'] & \text{Coker } x \arrow[d, dotted, "\varphi'"] \\
& & \text{Coim } f
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\text{coim } f = \varphi'\varphi = \varphi'(\text{coker } x)(\text{coim } f)$. Como coim f es epimorfismo, esta igualdad implica que $\varphi'\text{coker } x = \text{id}_{\text{Coim } f}$, que es un monomorfismo, por lo tanto coker x es un monomorfismo. Además coker x cumple $(\text{coker } x)x = 0 = (\text{coker } x)0$, por lo tanto $x = 0$, concluyendo que i es un monomorfismo.

Dualmente, concluimos que $\overline{f}(\text{coim } f)$ es un epimorfismo, terminando la demostración. □

Observación 38. En **R-Mód**, que la coimagen sea isomorfa a la imagen es decir que dado un morfismo $f : A \to B$ se tiene $\frac{A}{\text{Ker } f} \simeq \text{Im } f$: el primer teorema de isomorfismo. Podemos pensar entonces la proposición anterior como "una categoría preabeliana es abeliana si y sólo si cumple el primer teorema de isomorfismo".

Ejemplo 39. La categoría **Ban**, que ya vimos que es preabeliana, no es abeliana. Sea $f : X \to Y$ un operador acotado e inyectivo cuya imagen (en el sentido usual conjuntista) es un subconjunto denso y propio de Y. En este caso, $\text{Ker } f = \text{Coker } f = \mathbf{0}$, de donde $\text{Im } f \simeq Y$ y $\text{Coim } f \simeq X$, de donde la coimagen y la imagen no son isomorfas.

Corolario 40. *En una categoría abeliana cualquier morfismo $f : A \to B$ se descompone como $f = me$ donde e es un epimorfismo y m es un monomorfismo.*

Demostración. Tomar $m = \text{im } f$ y $e = \overline{f}(\text{coim } f)$. □

Proposición 41. *La descomposición de un morfismo $f : A \to B$ en una categoría abeliana como un epimorfismo seguido de un monomorfismo es canónica, en el siguiente sentido. Sean $e : A \to I$ epi y $m : I \to B$ mono tales que $f = me$. Entonces existe un isomorfismo $i : I \to \text{Im } f$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& & & I \arrow[dl, dotted, "i"'] \arrow[ddl, tail, bend left, "m"] \\
A \arrow[rrru, two heads, bend left, "e"] \arrow[r, two heads, "\text{coim } f"] \arrow[drr, "f"'] & \text{Coim } f \arrow[r, tail, two heads, "\overline{f}"] & \text{Im } f \arrow[d, tail, "\text{im } f"] & \\
& & B &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Tenemos que m es otro mapa además de $\mathrm{im}\ f$ que va a parar a B. Verifiquemos que $(\mathrm{coker}\ f)m = 0$. En efecto, $0e = 0 = (\mathrm{coker}\ f)f = (\mathrm{coker}\ f)me$. Como e es epi, esto implica que $(\mathrm{coker}\ f)m = 0$. Por lo tanto, por la propiedad universal del núcleo aplicada a $\mathrm{coker}\ f$, existe una única i que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}\ f \arrow[r, tail, "\mathrm{im}\ f"] & B \arrow[r, two heads, shift left, "\mathrm{coker}\ f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \mathrm{Coker}\ f \\
I \arrow[u, dotted, "i"] \arrow[ur, tail, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $m = (\mathrm{im}\ f)i$ es mono, por lo tanto i es mono.

Por otro lado, e es otro mapa además de $\mathrm{coim}\ f$ que sale de A. Verifiquemos que $e(\mathrm{ker}\ f) = 0$. En efecto, $m0 = 0 = f(\mathrm{ker}\ f) = me(\mathrm{ker}\ f)$. Como m es mono, esto implica que $e(\mathrm{ker}\ f) = 0$. Por lo tanto, por la propiedad universal del conúcleo aplicada a $\mathrm{ker}\ f$, existe una única j que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ f \arrow[r, tail, shift left, "\mathrm{ker}\ f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & A \arrow[r, two heads, "\mathrm{coim}\ f"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & \mathrm{Coim}\ f \arrow[d, dotted, "j"] \\
& & I
\end{tikzcd}$$

Veamos que $ij = \overline{f}$. Para ver esto, recordemos que $\overline{f}$ es el único mapa que hace conmutar el diagrama 5. Verifiquemos entonces que ij hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{coim}\ f"'] & B \\
\mathrm{Coim}\ f \arrow[r, "ij"'] & \mathrm{Im}\ f \arrow[u, tail, "\mathrm{im}\ f"']
\end{tikzcd}$$

En efecto, $(\mathrm{im}\ f)i\overbrace{j(\mathrm{coim}\ f)}^{e} = \overbrace{(\mathrm{im}\ f)i}^{m}e = me = f$.

Entonces $ij = \overline{f}$ que es epi, de donde i es epi, y ya habíamos visto que era mono, por lo tanto es un isomorfismo. Además, como $e = j(\mathrm{coim}\ f)$ entonces $ie = ij(\mathrm{coim}\ f)$; y ya sabemos que $m = (\mathrm{im}\ f)i$, por lo tanto i hace conmutar el diagrama original. $\square$

5. En la arcada del álgebra homológica

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un diagrama $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ en $\mathcal{C}$ es *exacto en B* cuando $(\mathrm{im}\ f, \mathrm{Im}\ f) = (\mathrm{ker}\ g, \mathrm{Ker}\ g)$ a menos de isomorfismo. El diagrama siguiente:

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

es una *sucesión exacta corta* si es exacto en A, B y C, o equivalentemente, si f es mono, g es epi, e $\mathrm{im}\ f = \mathrm{ker}\ g$ a menos de isomorfismo.

Observación 42. Hemos visto es que cualquier flecha $f : A \to B$ se puede descomponer en dos sucesiones exactas cortas:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\ker f} A \xrightarrow{\operatorname{coim} f} \operatorname{Coim} f \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Im} f \xrightarrow{\operatorname{im} f} B \xrightarrow{\operatorname{coker} f} \operatorname{Coker} f \longrightarrow \mathbf{0}$$

En **R-Mód**, por ejemplo, se traducen en las siguientes sucesiones exactas cortas con las inclusiones y proyecciones canónicas:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow A \longrightarrow \frac{A}{\operatorname{Ker} f} \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow B \longrightarrow \frac{B}{\operatorname{Im} f} \longrightarrow \mathbf{0}$$

Estamos ahora en la arcada del álgebra homológica. En el contexto de categorías abelianas se pueden probar teoremas como el lema de los cinco, el lema de los nueve, el lema de la serpiente... Para dar un ejemplo fundamental, problemos el llamado *splitting lemma*:

Lema 43 (de escisión)**.** *Sea* $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ *una sucesión exacta corta en una categoría abeliana* $\mathcal{C}$*. Son equivalentes:*

1. *existe una* sección *de* g*, i.e. un morfismo* $s : C \to B$ *tal que* $gs = \mathrm{id}_C$*,*
2. *existe una* retracción *de* f*, i.e. un morfismo* $r : B \to A$ *tal que* $rf = \mathrm{id}_A$*,*
3. *existen* $s : C \to B$ *y* $r : B \to A$ *tales que* (B, r, g, f, s) *es un biproducto de* A *y* C*.*

Si se cumplen las condiciones anteriores decimos que la sucesión exacta corta se escinde*.*

Demostración. El enunciado 2) es el enunciado 1) en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ que también es abeliana. Por lo tanto basta ver que 1) $\Leftrightarrow$ 3), pues entonces 2) $\Leftrightarrow$ 3) pasando a la categoría opuesta.

Que 3) implica 1) es obvio. Veamos que 1) implica 3).

Ya tenemos una $s : C \to B$ tal que $gs = \mathrm{id}_C$. Tenemos que construir una $r : B \to A$ que cumpla $rf = \mathrm{id}_A$ y tal que $fr + sg = \mathrm{id}_B$, i.e. tal que $fr = \mathrm{id}_B - sg$. Pero $\mathrm{id}_B - sg$ es tal que

$$g(\mathrm{id}_B - sg) = g\mathrm{id}_B - \overbrace{gs}^{\mathrm{id}_C}g = g - g = 0$$

por lo tanto existe una única $r : B \to A$ que hace conmutar el siguiente diagrama de núcleo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f=\ker g"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "0"'] & C \\
B \arrow[u, dotted, "r"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_B - sg"'] & &
\end{tikzcd}$$

Tenemos entonces $r : B \to A$ tal que $fr = \mathrm{id}_B - sg \Rightarrow fr + sg = \mathrm{id}_B$. Falta verificar que $rf = \mathrm{id}_A$:

$$frf = (\mathrm{id}_B - sg)f = f - sgf = f - s\overbrace{g\ker g}^{0} = f = f\mathrm{id}_A$$

Como f es mono, esto implica $rf = \mathrm{id}_A$. $\square$

Observación 44. **Grp** no es abeliana, pero al tener núcleos y conúcleos tenemos una noción de sucesión exacta. Pero no se cumple la equivalencia de la proposición anterior: el enunciado 1) es equivalente a que $B \simeq A \times C$ de manera natural, pero el enunciado 2) es equivalente a que $B \simeq A \rtimes C$ (producto semidirecto) de manera natural.

En **R-Mód** estos teoremas homológicos se pueden probar sencillamente cazando diagramas. En una categoría abeliana abstracta, como no tenemos elementos, a priori no tiene sentido cazar diagramas. Se le puede dar un sentido: esto es lo que hace Mac Lane en [7], p.200, y Borceux en [1], p.34, y probar los teoremas en este contexto general. O si no, podemos usar un teorema conocido como *teorema de Freyd-Mitchell*. Vamos a enunciarlo.

Definición. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor entre categorías abelianas. Decimos que es *exacto* si es aditivo y preserva sucesiones exactas cortas. Es decir, si es aditivo y para toda sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

se tiene que

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \mathbf{0}$$

es una sucesión exacta corta. [5]

Teorema 45 (Freyd-Mitchell, 1964)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana pequeña. Entonces existe un anillo R y un functor fiel, pleno y exacto $F : \mathcal{C} \to$ **R-Mód**. De hecho, se puede tomar $R = \mathbb{Z}$, i.e. **R-Mód** $=$ **Ab**.*

Demostración. Ver [9], p.151, [4], p.140, o [1], p.71. $\square$

De esta manera recuperamos los teoremas "categóricos" de **R-Mód** en $\mathcal{C}$. La afirmación de "pequeña" no es problema, porque un diagrama por definición es pequeño, por lo tanto basta restringirse a la subcategoría abeliana que incumbe al teorema dado.

Más formalmente, una afirmación acerca de un diagrama en una categoría abeliana se dice *categórica* si afirma que:

- ciertas partes del diagrama son o no conmutativas,
- ciertas sucesiones en el diagrama son o no exactas,
- ciertas partes del diagrama son o no límites o colímites.

Metateorema. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana (no necesariamente pequeña) y **R-Mód** como en el teorema de Freyd-Mitchell. Entonces:*

I. *Sea una afirmación de la forma $p \Rightarrow q$, con p y q afirmaciones categóricas sobre un diagrama. Si la afirmación es cierta para el diagrama en **R-Mód**, entonces es cierta para el diagrama en $\mathcal{C}$.*

[5] En general, se define functor exacto entre categorías arbitrarias como un functor que preserva (co)límites finitos.

II. *Sea una afirmación de la forma $p \Rightarrow q$, con p afirmación categórica sobre un diagrama y q afirmación sobre la existencia de morfismos adicionales entre ciertos objetos del diagrama, y sobre la verdad de cierta afirmación categórica del diagrama extendido.*

*Si esta afirmación puede ser probada en **R-Mód** construyendo los morfismos adicionales cazando el diagrama, entonces $p \Rightarrow q$ es verdadera en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Ver [9], p.97, o [4], capítulo 4. $\square$

Bibliografía

[1] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures*.

[2] D.A. Buchsbaum, *Exact categories and duality*

[3] I. Bucur, A. Deleanu, *Introduction to the Theory of Categories and Functors*.

[4] P. Freyd, *Abelian categories*.

[5] A. Grothendieck, *Introduction au langage fonctoriel*.

[6] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*.

[7] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*

[8] *n*Lab, `http://ncatlab.org/`.

[9] B. Mitchell, *Theory of Categories*.

[10] B. Pareigis, *Categories and Functors*.

[11] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*.