GAL II - Jak znaleźć bazę Jordana

1. Wstęp

Kiedy macierz jest mała, często nie potrzebujemy żadnego algorytmu żeby znaleźć bazę Jordana. Albo na przykład jeśli mamy tylko jedną wartość własną λ i $\dim V_{(\lambda)} = 1$, czyli mamy tylko jedną klatkę Jordana i ona ma wymiar $k =$ krotność algebraiczna λ, to wtedy

$$\dim \ker(A - \lambda I)^r = r$$

dla każdego $r \leq k$, i wystarczy znaleźć jakikolwiek niezerowy

$$v \in \ker(A - \lambda I)^k \setminus \ker(A - \lambda I)^{k-1}.$$

Wtedy naszą bazą Jordana będzie

$$\{(A - \lambda I)^{k-1}v, (A - \lambda I)^{k-2}v, \ldots, (A - \lambda I)v, v\}.$$

Jeśli mamy więcej niż 1 wartość własną, ale wszystkie mają krotność geometryczną 1, to ta metoda też nam daje bazę Jordana.

Możecie udowodnić to wszystko powyżej; to też wynika z ogólnego algorytmu poniżej.

Notacja: $d_k =$ liczba klatek Jordana wymiaru k, dla jakiejś wartości własnej nie oznaczonej w notacji ale będzie jasne w kontekście.

2. Algorytm: znajdowanie bazy Jordana macierzy $A \in M_n(K)$, której wielomian charakterystyczny się rozkłada na czynniki liniowe

Wybieramy jakąś wartość własną, powiedzmy λ, i dla tej wartości własnej wykonujemy algorytm. Jak z nią skończymy, to robimy to samo ze wszystkimi innymi.

1) Znajdujemy $(A - \lambda I)^r$ do momentu, kiedy rząd się stabilizuje; innymi słowy, do momentu kiedy $\dim \ker(A - \lambda I)^k = \dim \ker(A - \lambda I)^{k-1}$. Niech k będzie najmniejszą taką liczbą; z twierdzenia Cayleya–Hamiltona wiemy, że $k \leq$ krotność algebraiczna λ.

2) Wybieramy wektory $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \ker(A - \lambda I)^k \setminus \ker(A - \lambda I)^{k-1}$ takie, że są liniowo niezależne, i $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \oplus \ker(A - \lambda I)^{k-1} = \ker(A - \lambda I)^k$.

   Każdy z tych wektorów odpowiada ostatniej kolumnie w jednej klatce Jordana wymiaru k, więc $l = d_k$.

   Bazy tych klatek: $\{(A - \lambda I)^{k-1}\alpha_i, \ldots, (A - \lambda I)\alpha_i, \alpha_i\}$ dla każdego $i = 1, \ldots, l$.

3_{k-1}) Uzupełniamy $\{(A - \lambda I)\alpha_1, \ldots, (A - \lambda I)\alpha_l\} \subset \ker(A - \lambda I)^{k-1}$ do bazy tej podprzestrzeni: niech te wektory się nazywają $\{\beta_1, \ldots, \beta_t\}$.

   Każdy z tych wektorów odpowiada ostatniej kolumnie w jednej klatce Jordana wymiaru $k - 1$, więc $t = d_{k-1}$.

   Bazy tych klatek: $\{(A - \lambda I)^{k-2}\beta_i, \ldots, (A - \lambda I)\beta_i, \beta_i\}$ dla każdego $i = 1, \ldots, t$.

3_{k-2}) Uzupełniamy $\{(A-\lambda I)^2\alpha_1, \dots, (A-\lambda I)^2\alpha_l, (A-\lambda I)\beta_1, \dots, (A-\lambda I)\beta_t\} \subset \ker(A-\lambda I)^{k-2}$ do bazy tej podprzestrzeni: niech te wektory się nazywają $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$.

Każdy z tych wektorów odpowiada ostatniej kolumnie w jednej klatce Jordana wymiaru $k-2$, więc $t = d_{k-2}$.

Bazy tych klatek: $\{(A-\lambda I)^{k-3}\lambda_i, \dots, (A-\lambda I)\gamma_i, \gamma_i\}$ dla każdego $i = 1, \dots, s$.

$\vdots$

3_1) Uzupełniamy

$$\{(A-\lambda I)^{k-1}\alpha_1, \dots, (A-\lambda I)^{k-1}\alpha_l, (A-\lambda I)^{k-2}\beta_1, \dots, (A-\lambda I)^{k-2}\beta_t, \dots\} \subset \ker(A-\lambda I)$$

do bazy tej podprzestrzeni: niech te wektory się nazywają $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\}$.

Każdy z tych wektorów odpowiada jednej jednowymiarowej klatce Jordana, więc $q = d_1$.

Bazy tych klatek: $\{\varepsilon_i\}$ dla każdego $i = 1, \dots, q$.

Jak już wykonaliśmy ten algorytm dla wszystkich wartości własnych, to nasza baza Jordana to konkatenacja baz z punktów 2), 3_{k-1}), ..., 3_1), dla wszystkich wartości własnych.

3. Rysunek

Warto to wszystko zorganizować w rysunku: zapamiętując zasady stworzenia takiego rysunku, zapamiętujemy jak idzie algorytm. Dla każdego λ mamy jeden taki rysnuek. Na ostatniej stronie znajdziecie bardzo profesjonalny przykład.

3.1. **Jak czytać rysunek.**

Każda kropka oznacza wektor; różne kropki dają wektory liniowo niezależne. Wszystkie kropki razem dają ten kawałek bazy Jordana który odpowiada wartości własnej λ.

Każda strzałka do góry oznacza przekształcenie $A - \lambda I$. Kropki w jednym sznurka to baza jednej klatki Jordana, więc ilość sznurków to liczba klatek Jordana. Ilość strzałek w sznurku to wymiar klatki.

Każdy prostokąt oznacza podprzestrzeń liniową

$$K_i := \ker(A-\lambda I)^i,$$

$i = 0, \dots, k$. Zawieranie prostokątów odpowiada zawieraniu podprzestrzeni.

Na poziomie dokładnie i mamy te kropki, które są w prostokącie K_i ale nie w mniejszym prostokącie K_{i-i}, więc liczba tych kropek to $\dim K_i - \dim K_{i-1}$, czyli liczba klatek Jordana wymiaru $\geq i$, w skrypcie nazywana q_i.

Liczba „nowych kropek" w poziomie i to liczba klatki Jordana wymiaru i, czyli d_i. Kropka jest *nowa* jeśli nie jest przeciwdziedziną jakiejś strzałki od dołu.

3.2. **Jak stworzyć rysunek.**

1) Znajdujemy liczbę k, czyli najmniejszą liczbę od której $\dim K_i$ jest stabilny, oraz bazy wszystkich K_i. Możemy rysować $k+1$ prostokątów ($+1$ bo też rysujemy $\{0\}$ jako prostokąt).

2) Zaczynamy od dolnego lewego kąta. Znajdujemy najwięcej wektorów niezależnych w K_i takich, że razem z bazą K_{i-1} tworzą bazę K_i. To są nasze α_i w K_i a nie w K_{i-1} i już możemy zrobić rysunek ich sznurków do góry. One nam dają bazy największych klatek.

3_{k-1}) Teraz liczymy $(A - \lambda I)\alpha_i$ dla wszystkich i (czyli kropeczki na poziomie $k-1$ w naszych już narysowanych sznurkach), i uzupełniamy je na bazie K_{k-1}. To są nasze β_i. Możemy narysować ich sznurki do góry. One nam dają bazy klatek wymiaru $k-1$.

$\vdots$

3_1) Uzupełniamy nasze kropki już narysowane na poziomie 1 do bazy $K_1 = V_{(\lambda)}$. To są nasze ε_i. Możemy narysować ich sznurki: one idą prosto do zera. Dają nam bazy klatek wymiaru 1.

Żeby wypisać bazę Jordana, to idziemy sznurek po sznurku, od góry do dołu, żeby mieć jedynki powyżej przekątnej. Czyli: od pierwszego najdłuższego sznurka

$$\{(A - \lambda I)^{k-1}\alpha_1, \dots, (A - \lambda I)\alpha_1, \alpha_1\},$$

do ostatniego najdłuższego

$$\{(A - \lambda I)^{k-1}\alpha_l, \dots, (A - \lambda I)\alpha_l, \alpha_l\},$$

a potem to samo ze sznurkami długości $k-1$, aż do ostatnich samotnych

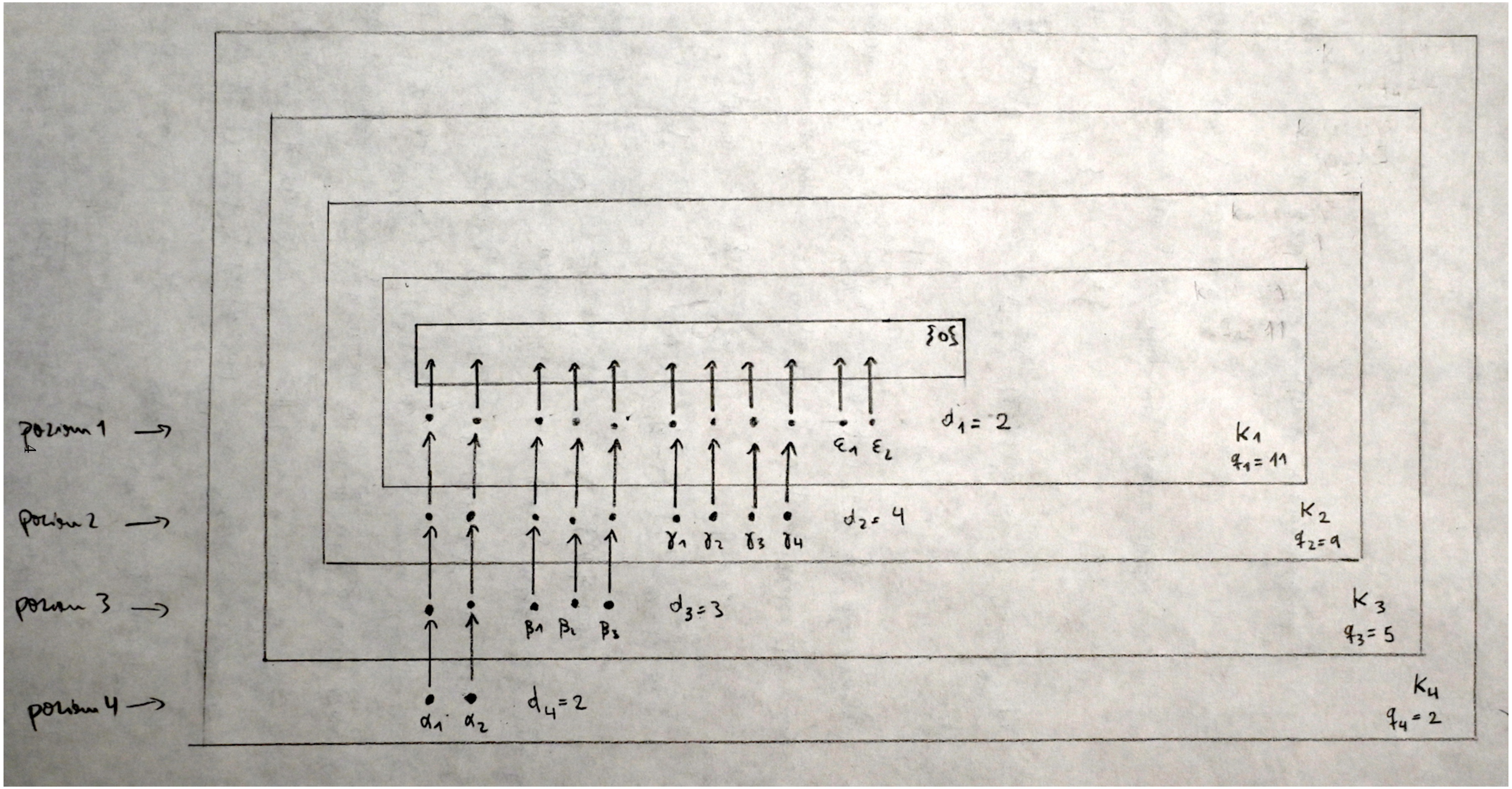
$$\{\varepsilon_1\}, \dots, \{\varepsilon_q\}.$$

Na ostatniej stronie znajdziecie przykład, gdzie $k = 4$ i jest 27 kropek, czyli baza Jordana składa się z 27 elementów.

Generalnie zajmiemy się małymi przykładami, ale dla zabawy możecie próbować z tą macierzą:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -3 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_7(\mathbb{C})$$

Jej wielomian charakterystyczny to $w_A(\lambda) = (2-\lambda)^5(-1-\lambda)^2$. Ten przykład pochodzi z `https://www.mimuw.edu.pl/~olekz/gal121/jordan.pdf` gdzie jest on rozwiązany. Tam też znajdziecie inną prezentację tego samego, co w tym dokumencie; stamtąd pomysł, żeby wykonać takie ładne rysunki.


poziom 1
poziom 2
poziom 3
poziom 4
{0}
ε_1 ε_2
$d_1 = 2$
γ_1 γ_2 γ_3 γ_4
$d_2 = 4$
β_1 β_2 β_3
$d_3 = 3$
α_1 α_2
$d_4 = 2$
K_1
$q_1 = 11$
K_2
$q_2 = 9$
K_3
$q_3 = 5$
K_4
$q_4 = 2$