Empalme-factorización de sucesiones y exactitud de functores

Bruno Stonek
bruno@stonek.com

23 de febrero de 2012

Resumen

En este articulín veremos cómo "empalmar" y cómo "factorizar" sucesiones exactas. Deduciremos en particular la heurística "dar una sucesión exacta arbitraria *es lo mismo* que dar ciertas sucesiones exactas *cortas*". Luego aplicaremos esta idea para demostrar que ciertas nociones de exactitud de functores son equivalentes.

1. Empalme y factorización de sucesiones

Consideraremos ciertas equivalencias entre diversas nociones de exactitud de functores. Trabajaremos, entonces, en una categoría abeliana. Podemos pensar que estamos en $R-\mathrm{Mod}$, la categoría de módulos sobre un anillo R, y no perdemos demasiada generalidad.

Recordemos ciertas nociones:

Una sucesión $\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$ en una categoría abeliana es *exacta* si $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se define el concepto análogamente si la sucesión es finita o infinita sólo para un lado.

En una sucesión exacta, se tiene que la composición de dos flechas seguidas es nula, sencillamente pues $\operatorname{Im} f_{n+1} \subset \operatorname{Ker} f_n$. [1]

Observar que una sucesión $A \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si p es un epimorfismo, y que una sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ es exacta si y sólo si i es un monomorfismo.

Una *sucesión exacta corta* es una sucesión exacta de la forma $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$.

En el siguiente lema, *empalmamos* sucesiones exactas:

Lema de empalme. *Sean* $\cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} M$ *y* $M \xrightarrow{g_0} B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} \cdots$ *sucesiones exactas.*

1. *Si f_1 es un epimorfismo, entonces*

$$A_1 \xrightarrow{g_0 f_1} B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} \cdots$$

es una sucesión exacta.

[1] Una sucesión donde *sólo* ocurre eso en vez de la exactitud se llama un *complejo de cadenas*.

2. *Si g_0 es un monomorfismo, entonces*

$$\cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{g_0 f_1} B_1$$

es una sucesión exacta.

3. *Si f_1 es un epimorfismo y g_0 es un monomorfismo, entonces*

$$\cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{g_0 f_1} B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} \cdots$$

es una sucesión exacta.

Demostración. 1. Sólo hay que verificar exactitud en B_1:

- $\operatorname{Im} g_0 f_1 \subset \operatorname{Ker} g_1$: pues $g_1(g_0 f_1) = (g_1 g_0) f_1 = 0$.
- $\operatorname{Ker} g_1 \subset \operatorname{Im} g_0 f_1$: si $g_1(b_1) = 0$, entonces $b_1 \in \operatorname{Ker} g_1 = \operatorname{Im} g_0$, luego $b_1 = g_0(b_0)$ para algún $b_0 \in M$. Además, $b_0 = f_1(a_1)$ para algún $a_1 \in A_1$. Se tiene pues $g_0 f_1(a_1) = g_0(b_0) = b_1$.

2. Sólo hay que verificar exactitud en A_1:

- $\operatorname{Im} f_2 \subset \operatorname{Ker} g_0 f_1$: pues $(g_0 f_1) f_2 = g_0(f_1 f_2) = 0$.
- $\operatorname{Ker} g_0 f_1 \subset \operatorname{Im} f_2$: si $g_0 f_1(a_1) = 0$, entonces $f_1(a_1) \in \operatorname{Ker} g_0 = \{0\}$, luego $a_1 \in \operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Im} f_2$.

3. Consecuencia directa de los ítems anteriores. □

La gracia inicial del lema puede verse más instantáneamente en el tercer punto, ilustrándose con sucesiones exactas cortas: podemos empalmar dos sucesiones exactas cortas tales que el conúcleo de una sea el núcleo de la otra, para formar una nueva sucesión exacta.

Resulta que no sólo podemos empalmar sucesiones exactas cortas para formar sucesiones exactas en general, toda sucesión exacta surge de esta forma. Veamos esto.

Observar primero que a raíz de un morfismo $f : A \to B$, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \hookrightarrow A \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0 \tag{1}$$

Esto implica que una sucesión exacta se puede *factorizar* en sucesiones exactas cortas, como se ve en el siguiente diagrama conmutativo, donde $K_n = \operatorname{Ker} f_n$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr, "f_{n+2}"] & & A_{n+1} \arrow[rr, "f_{n+1}"] \arrow[dr] & & A_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr] & & A_{n-1} \arrow[rr, "f_{n-1}"] \arrow[dr] & & A_{n-1} \arrow[rr] & & \cdots \\
& K_{n+1} \arrow[ur, hook] & & K_n \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & K_{n-1} \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & K_{n-2} \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Es posible que no quede claro *cómo se leen ahí* las sucesiones exactas cortas. Dejemos sólo dos (dos triángulos en forma de "$\wedge$"):

$$\begin{tikzcd}
 & & A_n \arrow[dr] & & A_{n-1} \arrow[dr] & & \\
 & K_n \arrow[ur, hook] & & K_{n-1} \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & K_{n-2} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0
\end{tikzcd}$$

Observar que estas son de la forma (1) gracias a la exactitud de la sucesión original.

Si empalmamos todas estas sucesiones exactas cortas factorizadas, obtenemos la sucesión original, gracias al lema de empalme. Así que *sólo con sucesiones exactas cortas ya tenemos toda la información de una sucesión exacta arbitraria*.

Conclusión: *dar una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

"es lo mismo" que dar sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow A_{n+1} \longrightarrow K_n \longrightarrow 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Esta es una buena explicación (entre otras tantas posibles) de por qué las sucesiones exactas *cortas* son interesantes.

Usaremos este principio de "factorizar-empalmar" para demostrar el teorema de la sección siguiente.

Pasemos ahora a los functores.

2. Functores exactos

Definición. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor covariante entre categorías abelianas. Decimos que es *aditivo* si $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{F}(\mathrm{A}), \mathrm{F}(\mathrm{B}))$ es un morfismo de grupos abelianos, para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$. En una palabra, si

$$F(f+g) = F(f) + F(g)$$

para todo par de flechas $f, g : A \to B$.

Observar que, en particular, $F(0) = 0$ (donde 0 denota el morfismo nulo), y por lo tanto $F(\{0\}) = \{0\}$. Esto se deduce de que $0 = \mathrm{id}_{\{0\}}$, y por lo tanto $0 = F(0) = F(\mathrm{id}_{\{0\}}) = \mathrm{id}_{F(\{0\})}$, y si la identidad es el morfismo nulo, el objeto debe ser nulo.

Es esta última propiedad la que va a saltar en nuestras próximas consideraciones, y no vamos a explicitar que la estamos usando a cada vez que la usemos.

Ahora, una definición que no es estándar, pero me parece útil para enunciar sucintamente nuestro teorema:

Definición.

- $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ exacta es una sucesión *exacta a derecha*,
- $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ exacta es una sucesión *exacta a izquierda*,
- $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ exacta es una sucesión *mitad exacta.*[2]

Observación trivial. Una sucesión exacta corta es: exacta a derecha (si borramos el cero de la izquierda), exacta a izquierda (si borramos el cero de la derecha), y está formada por tres sucesiones mitad exactas ($0 \to A \to B$, $A \to B \to C$, $B \to C \to 0$).

Definición. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor aditivo covariante entre categorías abelianas. Decimos que es:

- *exacto* si lleva sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas,
- *exacto a derecha* si lleva sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas a derecha,
- *exacto a izquierda* si lleva sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas a izquierda,
- *mitad exacto* si lleva sucesiones exactas cortas en sucesiones mitad exactas.

Ilustremos lo que queremos decir con "lleva": por ejemplo, un functor aditivo F es exacto si para toda sucesión exacta corta de $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

se tiene que la siguiente sucesión es exacta en $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C) \longrightarrow 0$$

Ejemplo. 1) Si $A \in \mathrm{Mod} - R$, el functor $A \otimes_R - : R - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}$ es exacto a derecha. Si A es plano, entonces $A \otimes_R -$ es exacto.

2) Si $A \in \mathrm{Mod} - R$, el functor $\mathrm{Hom_R(A, -)} : \mathrm{Mod - R} \to \mathrm{Ab}$ es exacto a izquierda. Si A es proyectivo, entonces $\mathrm{Hom_R(A, -)}$ es exacto.

3) Un functor mitad exacto es el de la homología: $H_n : \mathrm{Comp}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana y Comp denota su categoría de complejos de cadenas.

Ahora veamos que las definiciones de exactitud lateral se pueden "relajar", tomando como reflexión de partida la *observación trivial*. Veamos que ver cómo un functor transforma las sucesiones exactas *cortas* puede ser innecesariamente fuerte. Para demostrarlo, aplicaremos el principio de "factorización-empalme":

Teorema. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor aditivo covariante entre categorías abelianas. Entonces:*

- *F es* exacto a derecha *si y sólo si lleva sucesiones exactas a derecha en sucesiones exactas a derecha,*
- *F es* exacto a izquierda *si y sólo si lleva sucesiones exactas a izquierda en sucesiones exactas a izquierda,*

[2] Jocosamente podríamos entonces decir que los primeros dos ítems son sucesiones *tres cuartos exactas*.

- F *es* exacto *si y sólo si lleva sucesiones mitad exactas en sucesiones mitad exactas.*

Demostración. Primero que nada, observar que la implicación inversa es evidente en los tres casos, gracias a la *observación trivial*.

- ($\Rightarrow$) Supongamos pues que F lleva sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas a derecha. Sea

  $$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

  una sucesión exacta a derecha en $\mathcal{A}$, y veamos que $F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C) \longrightarrow 0$ es exacta a derecha.

  Lo que queremos hacer es transformar nuestra sucesión exacta a derecha en sucesiones exactas cortas, que podemos manejar. Para esto, la *factorizamos* como hiciéramos antes. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo cuya fila es exacta y donde se distinguen dos sucesiones exactas cortas:

  $$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} i \arrow[r, hook] & A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] & & B \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0 \\
& & & \operatorname{Ker} p \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

  Entonces, por hipótesis, tenemos las siguientes dos sucesiones exactas cortas:

  $$F(\operatorname{Ker} i) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(\operatorname{Ker} p) \longrightarrow 0$$

  $$F(\operatorname{Ker} p) \longrightarrow F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C) \longrightarrow 0$$

  Estamos en las condiciones del primer ítem del lema de empalme. Observar también que aplicarle F al triangulito conmutativo de (2) da otro triangulito conmutativo (por ser F un functor); conseguimos entonces que:

  $$F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C) \longrightarrow 0$$

  es una sucesión exacta, que es lo que queríamos demostrar.

- ($\Rightarrow$) Se demuestra de manera análoga, aplicando el segundo ítem del lema de empalme.

- ($\Rightarrow$) Supongamos que F lleva sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas. Sea

  $$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

  una sucesión mitad exacta en $\mathcal{A}$; veamos que $F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C)$ es exacta. De nuevo, lo que hacemos es factorizar nuestra sucesión dada en sucesiones exactas cortas. Lo hacemos, consiguiendo el siguiente diagrama conmutativo cuya fila es exacta y donde se distinguen tres sucesiones exactas cortas (π es la proyección canónica):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} i \arrow[r] & A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] & & B \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & C \arrow[r, "\pi"] & C/\operatorname{Im} p \arrow[r] & 0 \\
& & & \operatorname{Ker} p \arrow[ur] \arrow[dr] & & \operatorname{Ker} \pi \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Aplicándole F a las sucesiones exactas cortas, obtenemos las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow F(\operatorname{Ker} i) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(\operatorname{Ker} p) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow F(\operatorname{Ker} p) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(\operatorname{Ker} \pi) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow F(\operatorname{Ker} \pi) \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(C/\operatorname{Im} p) \longrightarrow 0$$

Las empalmamos (con el tercer ítem del lema de empalme) y, como antes, por conmutatividad de los triangulitos obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow F(\operatorname{Ker} i) \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C) \longrightarrow F(C/\operatorname{Im} p) \longrightarrow 0$$

y en particular, $F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(p)} F(C)$ es exacta. $\square$