GAL II - Kąty (nie)zorientowane

Jeśli $(V, \langle -, - \rangle)$ jest przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym, to mamy pojęcie kąta między wektorami. Mianowicie: jeśli $u, v \in V$, można udowodnić, że $\frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \|v\|} \in [-1, 1]$, więc skoro $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ jest bijekcją, istnieje jedyny $\theta \in [0, \pi]$ taki, że

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}. \tag{0.1}$$

Nazywamy θ *kątem między u a v*. Zauważmy, że te kąty są dodatnie, i że kąt między u a v to też kąt między v a u. Nazywamy więc ten kąt *kątem niezorientowanym*.

Dla ustalenia uwagi wyobraźmy sobie, że jesteśmy w $\mathbb{R}^2$. Mamy wektory u i v. Powyższa definicja kąta bierze jako kąt ten mniejszy, ale równie dobrze moglibyśmy brać ten większy, czyli $2\pi - \theta$, albo przeciwny, czyli $-\theta$. Innymy słowy, wtedy wybralibyśmy bijekcję $\cos : [\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$ w definicji kąta, albo bijekcję $\cos : [-\pi, 0] \to [-1, 1]$.

Zamiast wykonać taki przypadkowy wybór (najmniejszy θ w $[0, 2\pi]$ zamiast największy; dodatni zamiast ujemny) możemy zrobić coś innego. Jeśli mamy orientację, np. w $\mathbb{R}^2$ standardową, która mówi, że baza $\{u, v\}$ jest dodatnia jeśli mamy najpierw u a potem v idąc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, wtedy nie musimy wykonywać takiego wyboru. Bo możemy robić taką definicję:

Jeśli $u, v \in \mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne i baza $\{u, v\}$ jest dodatnia,

$$\text{zorientowany kąt } (u, v) := \text{ niezorientowany kąt między } u \text{ a } v.$$

Jeśli baza $\{u, v\}$ jest ujemna,

$$\text{zorientowany kąt } (u, v) := - \text{ niezorientowany kąt między } u \text{ a } v.$$

Jeśli $v = \lambda u$, to

$$\text{zorientowany kąt}(u, v) := \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \pi & \text{jeśli } \lambda \in \mathbb{R}_{<0} \end{cases}.$$

Zorientowany kąt (u, v) to więc nie to samo, co zorientowany kąt (v, u). One są przeciwne (chyba, że $v = \lambda u$, $\lambda < 0$: wtedy oba równą się π). Zauważmy też, że kąty niezorientowane należą do $[0, \pi]$ a kąty zorientowane do $[-\pi, \pi]$.

Taka definicja jest przydatna np. kiedy chcemy mówić o obrotach, bo wtedy interesuje nas w którą stronę idziemy. Nie chcemy, żeby obrót o θ byłoby to samo, co obrót o $-\theta$. Więc w definicji obrotu musimy myśleć, że θ jest zorientowanym kątem.

W praktyce to wygląda tak: *obrót w $\mathbb{R}^2$ o kąt $\theta \in \mathbb{R}$* to przekształcenie liniowe takie, że w bazie ortonormalnej *dodatniej* macierz przekształcenia wygląda jak

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Jeśli nie ustalamy, że baza ma być dodatnia, to wtedy nie możemy odróżnić obrotu o θ zgodnie z ruchem wskazówek zegara od obrotu o θ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, i tego byśmy nie chcieli. Na przykład, jeśli $\theta = \frac{\pi}{2}$, to w bazie standardowej $\{e_1, e_2\}$, która jest dodatnia, macierz obrotu o $+\frac{\pi}{2}$ wygląda tak:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a w bazie ujemnej $\{e_2, e_1\}$ macierz obrotu o $-\frac{\pi}{2}$ wygląda tak samo...