

GAL II - Kąty (nie)zorientowane

Jeśli $(V, \langle -, - \rangle)$ jest przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym, to mamy pojęcie kąta między wektorami. Mianowicie: jeśli $u, v \in V$, można udowodnić, że $\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \in [-1, 1]$, więc skoro $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ jest bijekcją, istnieje jedyny $\theta \in [0, \pi]$ taki, że

$$(0.1) \quad \cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Nazywamy θ *kątem między u a v* . Zauważmy, że te kąty są dodatnie, i że kąt między u a v to też kąt między v a u . Nazywamy więc ten kąt *kątem niezorientowanym*.

Dla ustalenia uwagi wyobraźmy sobie, że jesteśmy w \mathbb{R}^2 . Mamy wektory u i v . Powyższa definicja kąta bierze jako kąt ten mniejszy, ale równie dobrze moglibyśmy brać ten większy, czyli $2\pi - \theta$, albo przeciwny, czyli $-\theta$. Innymi słowy, wtedy wybralibyśmy bijekcję $\cos : [\pi, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ w definicji kąta, albo bijekcję $\cos : [-\pi, 0] \rightarrow [-1, 1]$.

Zamiast wykonać taki przypadkowy wybór (najmniejszy θ w $[0, 2\pi]$ zamiast największy; dodatni zamiast ujemny) możemy zrobić coś innego. Jeśli mamy orientację, np. w \mathbb{R}^2 standardową, która mówi, że baza $\{u, v\}$ jest dodatnia jeśli mamy najpierw u a potem v idąc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, wtedy nie musimy wykonywać takiego wyboru. Bo możemy robić taką definicję:

Jeśli $u, v \in \mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne i baza $\{u, v\}$ jest dodatnia,

zorientowany kąt $(u, v) :=$ niezorientowany kąt między u a v .

Jeśli baza $\{u, v\}$ jest ujemna,

zorientowany kąt $(u, v) := -$ niezorientowany kąt między u a v .

Jeśli $v = \lambda u$, to

$$\text{zorientowany kąt}(u, v) := \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \pi & \text{jeśli } \lambda \in \mathbb{R}_{< 0} \end{cases}.$$

Zorientowany kąt (u, v) to więc nie to samo, co zorientowany kąt (v, u) . One są przeciwne (chyba, że $v = \lambda u$, $\lambda < 0$: wtedy oba równą się π). Zauważmy też, że kąty niezorientowane należą do $[0, \pi]$ a kąty zorientowane do $[-\pi, \pi]$.

Taka definicja jest przydatna np. kiedy chcemy mówić o obrotach, bo wtedy interesuje nas w którą stronę idziemy. Nie chcemy, żeby obrót o θ byłoby to samo, co obrót o $-\theta$. Więc w definicji obrotu musimy myśleć, że θ jest zorientowanym kątem.

W praktyce to wygląda tak: *obróć w \mathbb{R}^2 o kąt $\theta \in \mathbb{R}$* to przekształcenie liniowe takie, że w bazie ortonormalnej *dodatniej* macierz przekształcenia wygląda jak

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

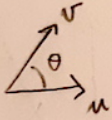
Jeśli nie ustalimy, że baza ma być dodatnia, to wtedy nie możemy odróżnić obrotu o θ zgodnie z ruchem wskazówek zegara od obrotu o θ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, i tego byśmy nie chcieli. Na przykład, jeśli $\theta = \frac{\pi}{2}$, to w bazie standardowej $\{e_1, e_2\}$, która jest dodatnia,

macierz obrotu o $+\frac{\pi}{2}$ wygląda tak:

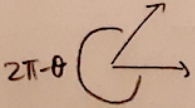
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a w bazie ujemnej $\{e_2, e_1\}$ macierz obrotu o $-\frac{\pi}{2}$ wygląda tak samo...

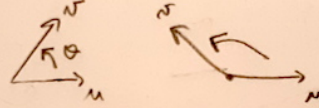
Kąt mierzony: θ



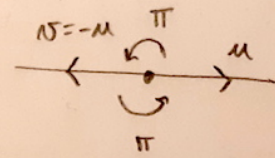
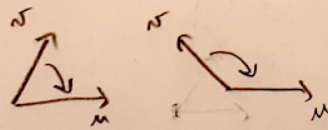
Czyli nie $2\pi - \theta$?



kąt zorientowany $(u, v) = \theta$



kąt zorientowany $(v, u) = -\theta$



jedyny przypadek, kiedy

kąt zor. $(u, v) = \text{kąt zor. } (v, u)$

to kiedy $v = \lambda u$, $\lambda < 0$, $u \neq 0$