Kombinacje afiniczne

0.1. **Wstęp.** Weźmy H_1 i H_2 proste w $\mathbb{R}^3$, i rozważmy podzbiór $H_3 \subset \mathbb{R}^3$ złożony z kombinacji afinicznych jednego punktu w H_1 i jednego w H_2:

$$H_3 = \{tp_1 + (1-t)p_2 : p_1 \in H_1, p_2 \in H_2, t \in \mathbb{R}\}.$$

Innymy słowy, skoro $\{tp_1 + (1-t)p_2 : t \in \mathbb{R}\}$ to prosta przechodząca przez punkty p_1, p_2, to H_3 się składa ze wszystkich prostych rozpiętych przez wszystkie pary punktów $p_1 \in H_1, p_2 \in H_2$.

Jeśli H_1 i H_2 są równoległe, wtedy H_3 jest płaszczyzną, jedyną zawierającą H_1 i H_2. To samo się dzieje jeśli H_1 i H_2 się przecinają. To jest geometrycznie oczywiste (zob. obrazki na ostatniej stronie).

Ale co się dzieje jeśli H_1 i H_2 nie dotykają się i nie są równoległe? Wtedy H_3 jest czymś dziwniejszym.

Możemy dać bardzo konkrety przykład: $H_1 = (0,0,1) + \mathrm{lin}((1,0,0))$ i $H_2 = (1,0,0) + \mathrm{lin}((0,1,0))$. Wtedy można znaleźć punkty $p_0, p_1, q_0, q_1 \in H_3$ które są afinicznie niezależne, więc jakby H_3 była afiniczna, to ona by była cały $\mathbb{R}^3$, co nie jest prawdą, bo na przykład $(0,0,0) \notin H_3$. Na ostatniej stronie są obrazki opisujące wszystkie trzy przypadki.

Jak to się stało? Przecież H_3 jest złożony z kombinacji afinicznych par punktów w H_1 i H_2, pewnie musi on być afinicznie domknięty?

Otóż nie. To rozumowanie pochodzi z intuicji z algebry liniowej która tu nie działa. Wróćmy przez chwilę do liniowego świata.

0.2. **Liniowo.** Jeśli V jest przestrzenią liniową i $A \subset V$ to podzbiór, mogę zdefiniować $\mathrm{lin}(A)$ jako najmniejszą podprzestrzenią liniową V zawierającą A. Intuicyjnie, żeby opisać $\mathrm{lin}(A)$ muszę wziąć wszystkie kombinacje liniowe punktów w A, i rzeczywiście to tak działa:

$$\mathrm{lin}(A) = \left\{ \sum_i \lambda_i w_i : \lambda_i \in K, w_i \in A \right\}. \tag{0.1}$$

Teraz rozpatrzmy przykład, kiedy $A = W_1 \cup W_2$, i $W_1, W_2 \subset V$ to podprzestrzenie liniowe. Wiemy, że A to nie podprzestrzeń liniowa, więc rozpatrywanie najmniejszej podprzestrzeni liniowej zawierającej A brzmi sensownie. W tym przypadku można uprościć sumy powyżej. Owszem, jeśli w pewnej sumie mamy na przykład $\lambda_1 w_1 + \lambda_1' w_1'$, $w_1, w_1' \in W_1$, to skoro W_1 jest liniowo domknięte, to jest po prostu inny element $w_1'' \in W_1$. Więc mamy, że

$$\mathrm{lin}(W_1 \cup W_2) = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} = W_1 + W_2. \tag{0.2}$$

Zauważ, że mamy też taki mniej uproszczony opis

$$\mathrm{lin}(W_1 \cup W_2) = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \lambda_1, \lambda_2 \in K\} \tag{0.3}$$

który mówi, że najmniejsza przestrzeń linowa zawierająca W_1 i W_2 składa się z kombinacji liniowych par punktów w W_1 i w W_2.

0.3. **Afinicznie.** Ale afiniczna wersja tego ostatniego zdania jest nieprawdziwa! Zauważyliśmy wcześniej, że H_3, składający się z kombinacji afinicznych par punktów w H_1 i w H_2 nie jest przestrzenią afiniczną, więc $H_3 \neq \mathrm{af}(H_1 \cup H_2)$...

To, co tu nie działa, to jest to uproszczenie z liniowego świata. Więc musimy wrócić do podstaw, jak w (0.1). Dla podzbioru przestrzeni afinicznej $A \subset H$ zdefiniujemy $\mathrm{af}(A)$ jako najmniejszą podprzestrzenią afiniczną H zawierającą A, i wtedy dla podprzestrzeni afinicznych $H_1, H_2 \subset H$, dostajemy

$$\mathrm{af}(H_1 \cup H_2) = \left\{ \sum_i \lambda_i p_i : \lambda_i \in K, p_i \in H_1 \cup H_2, \sum_i \lambda_i = 1 \right\} \tag{0.4}$$

Ale nie możemy tego uprościć do czegoś podobnego do (0.3). Innymi słowy, jeden punkt może być kombinacją afiniczną wielu punktów w H_1 i H_2, ale nie możemy tego redukować do kombinacji afinicznej tylko 2 punktów.

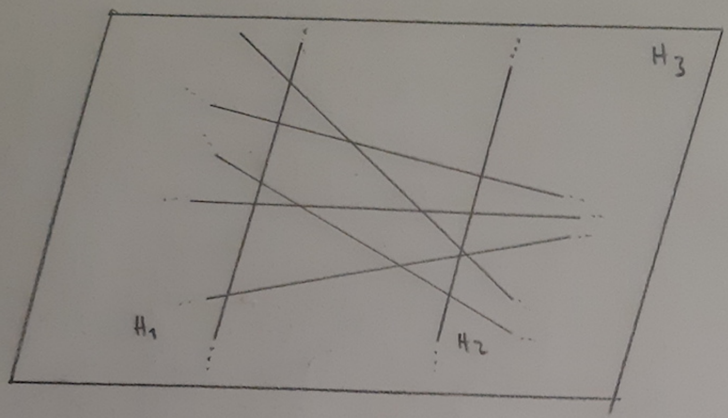
Przykład tego jest we wstępie. Tam mamy, że $(0, 0, 0)$ jest kombinacją afiniczną punktów p_0, p_1, q_0, q_1 ale nie jest kombinacją afiniczną kombinacji afinicznych p_0, p_1 i q_0, q_1 odpowiednio. Co by nigdy się nie wydarzyło w świecie liniowym, gdzie można patrzeć na kombinację liniową

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

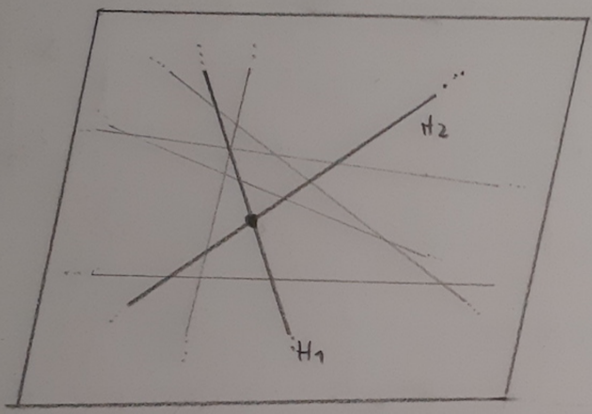
albo jako kombinację liniową $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, albo jako kombinację liniową (nawet sumę) kombinacji liniowych v_1, v_2 i v_3, v_4 odpowiednio. Cały problem w świecie afinicznym stanowi warunek, że współczynniki muszą się sumować do 1: jeśli $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ są takie, że $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$, to nie jest prawdą, że $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (chyba, że akurat $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, ale tego nie zakładamy), więc ogólnie nie możemy rozdzielić kombinacji afinicznej $\lambda_1 p_0 + \lambda_2 p_1 + \lambda_3 q_0 + \lambda_4 q_1$ na sumę dwóch kombinacji afinicznych p_0, p_1 i q_0, q_1 odpowiednio.

Na końcu zauważmy, że możnaby nazwać $\mathrm{af}(H_1 \cup H_2)$ sumą i użyć do tego notacji $H_1 + H_2$. Ale należy wtedy pamiętać, że odpowiednik (0.2) w świecie afinicznym nie działa, więc ta "suma" nie jest taka oczywista. Możnaby raczej nazwać $\mathrm{af}(H_1 \cup H_2)$ *otoczką afiniczną* przestrzeni afinicznych H_1 i H_2.

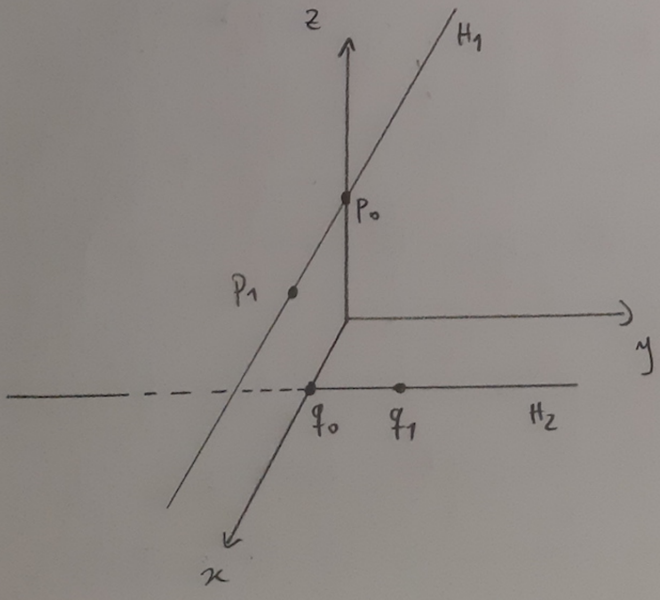
Zobacz Uzupełnienie wykładu 8 notatek kursu, gdzie ten temat jest rozwinięty.



$H_1 \parallel H_2$



$H_1 \cap H_2 \neq \emptyset,\ H_1 \neq H_2$



$H_1 \cap H_2 = \emptyset,\ H_1 \nparallel H_2$