Ejercicio 13, práctico 12: *Límite superior y límite inferior*. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada, y sean $s_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$, $r_n = \inf\limits_{k\geq n} a_k$.

a) *Probar que $r_n \leq a_n \leq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que las sucesiones $(s_n)_{n\in N}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen límite.*

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, supongamos que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cierto $M \in \mathbb{R}$.

Es obvio que $r_n \leq a_n \leq s_n$. Por otro lado, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. En efecto, se toma supremo sobre un conjunto cada vez más reducido. Además $s_n \geq a_n \geq -M$: está acotada inferiormente. Por lo tanto converge.

Análogamente, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente: se toma ínfimo sobre un conjunto cada vez más reducido. Además $r_n \leq a_n \leq M$: está acotada superiormente. Por lo tanto converge.

Se definen el límite superior *y el* límite inferior *de la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *como*

$$\limsup_n a_n := \lim_n s_n \qquad \liminf_n a_n := \lim_n r_n$$

b) *Probar que* $\liminf\limits_n a_n \leq \limsup\limits_n a_n$.

Como $r_n \leq s_n$ para todo n, i.e. $\inf\limits_{k\geq n} a_k \leq \sup\limits_{k\geq n} a_k$ entonces tomando límites, por el ejercicio 5a) se tiene que $\lim\limits_n \inf\limits_{k\geq n} \leq \lim\limits_n \sup\limits_{k\geq n}$, i.e. $\liminf\limits_n a_n \leq \limsup\limits_n a_n$.

c) *Sea* $\mathrm{Ac}(a)$ *el conjunto de puntos de acumulación de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Probar que*

$$\limsup_n a_n = \max \mathrm{Ac}(a) \qquad \liminf_n a_n = \min \mathrm{Ac}(a)$$

Probemos que $\liminf\limits_n a_n = \min \mathrm{Ac}(a)$, la otra igualdad es análoga. Sea $a := \liminf\limits_n a_n$.

Probemos primero que a es *un* punto de acumulación de (a_n). Para ver esto usamos el ejercicio 9. Sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, veamos que existe $N > n_0$ tal que $|a_N - a| < \varepsilon$.

Por definición, $a = \lim\limits_n \inf\limits_{k\geq n}$, por lo tanto existe $n_1 > n_0$ tal que $|\inf\limits_{k\geq n} a_k - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_1$. En particular $|\inf\limits_{k\geq n_1} a_k - a| < \varepsilon$.

Tenemos entonces $\inf\limits_{k\geq n_1} a_k < a + \varepsilon$: por ser un ínfimo existe entonces un $N \geq n_1$ tal que $\inf\limits_{k\geq n_1} a_k \leq a_N < a + \varepsilon$. Como además $a - \varepsilon < \inf\limits_{k\geq n_1} a_k$, se deduce que $a - \varepsilon < a_N < a + \varepsilon$, i.e. $|a_N - a| < \epsilon$, donde $N \geq n_1 > n_0$, de donde este N es el que buscábamos.

Sea ahora $c < a$ y veamos que c no puede ser punto de acumulación de (a_n), probando que c es el menor punto de acumulación de (a_n).

Como $c < a = \lim\limits_n \inf\limits_{k\geq n} a_k$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c < \inf\limits_{k\geq n} a_k$ para todo $n \geq n_0$. Además $\inf\limits_{k\geq n} a_k \leq a_n$ para todo n, por lo tanto $c < \inf\limits_{k\geq n_0} a_k \leq a_n$ para todo $n \geq n_0$.

Pero entonces a partir de n_0, se tiene que $|a_n - c| \geq \inf\limits_{k\geq n_0} a_k - c > 0$, por lo tanto a partir de n_0 no encontramos términos de (a_n) que estén a menos de $\varepsilon := \inf\limits_{k\geq n_0} a_k - c$ de c, i.e. c no es punto de acumulación de (a_n).

d) *Probar que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene límite si y sólo si su límite inferior y su límite superior coinciden, y en este caso se tiene:*

$$\lim_n a_n = \liminf_n a_n = \limsup_n a_n$$

($\Rightarrow$) Si (a_n) converge, entonces tiene un único punto de acumulación que es su límite, por lo tanto $\min \mathrm{Ac}(a) = \max \mathrm{Ac}(a)$, de donde se deduce la tesis por la parte anterior.

($\Leftarrow$) Sea $a := \lim_n \inf_{k\geq n} a_k = \lim_n \sup_{k\geq n} a_k$. Como además $(\inf_{k\geq n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $(\sup_{k\geq n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < \inf_{k\geq n} a_k \leq a \leq \sup_{k\geq n} a_k < a + \varepsilon$$

Además $\inf_{k\geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\geq n} a_k$ para todo n, por lo tanto para todo $n \geq n_0$ se tiene $a - \varepsilon < a_n < a + \epsilon$, de donde (a_n) converge y $\lim_n a_n = a$.

e) *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son sucesiones acotadas, probar que:*

a) $\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n, \qquad \liminf_n (a_n + b_n) \geq \liminf_n a_n + \liminf_n b_n$

b) $\limsup_n (-a_n) = -\liminf_n a_n, \qquad \liminf_n (-a_n) = -\limsup_n a_n$

c) $\limsup_n (a_n b_n) \leq (\limsup_n a_n)(\limsup_n b_n), \qquad \liminf_n (a_n b_n) \geq (\liminf_n a_n)(\liminf_n b_n)$

donde en 3) suponemos $a_n, b_n \geq 0$ *para todo* n.

Para ver la primera desigualdad de a), observemos que fijado n, para todo $r \geq n$ se tiene $a_r \leq \sup_{k\geq n} a_k$ y $b_r \leq \sup_{k\geq n} b_k$. Sumando estas desigualdades obtenemos:

$$a_r + b_r \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k \quad \forall r \geq n$$

Por lo tanto tomando supremo, obtenemos $\sup_{r\geq n}(a_r + b_r) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$. Esto vale para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto tomando límite en n y usando los ejercicios 5a) y 3a) se deduce la tesis.

La parte b) se deduce de que $\sup(-A) = -\inf(A)$ (ejercicio 6a) del práctico 1). Ahora deducimos fácilmente la segunda desigualdad de a):

$$\liminf_n (a_n + b_n) = -\limsup_n (-a_n - b_n) \geq -\limsup_n (-a_n) - \limsup_n (-b_n) = \liminf_n a_n + \liminf_n b_n$$

La parte c) se demuestra análogamente a la parte a).

f) *Hallar* $\liminf_n a_n$ *y* $\limsup_n a_n$ *en los siguientes casos:*

a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ b) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ c) $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$

(A cargo del lector)

g) *Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, además de ser acotada es de números positivos. Probar que*

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

En particular, si existe $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ entonces existe también $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ y ambos límites son iguales.

La desigualdad del medio es la parte b). Probemos la tercera desigualdad: la primera es análoga. Sea $a := \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Si $a = +\infty$ no hay nada que probar. Si $a < +\infty$, sea $b > a$. Existe entonces un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b$ para todo $n \geq N$.

En particular, para todo $k > 0$,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq b\, a_N \\ a_{N+2} &\leq b\, a_{N+1} \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq b\, a_{N+k-1} \end{aligned}$$

Si multiplicamos las k desigualdades obtenemos $a_{N+1}a_{N+2}\ldots a_{N+k} \leq b^k a_N a_{N+1}\ldots a_{N+k-1}$: cancelando, $a_{N+k} \leq b^k a_N$. Como $k > 0$ es arbitrario, poniendo $n = N + k$ obtenemos, para todo $n \geq N$:

$$a_n \leq b^n b^{-N} a_N$$

Tomando raíz n-ésima se obtiene

$$\sqrt[n]{a_n} \leq b\sqrt[n]{b^{-N}a_N} \tag{1}$$

Como $b^{-N}a_N > 0$, por el ejercicio 8d) se tiene que $\lim_n \sqrt[n]{b^{-N}a_N} = 1$. Tomando límite superior en (1), conseguimos entonces:

$$\limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq b \quad \forall b > a$$

de donde $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq a$ que es lo que queríamos probar.

h) *Deducir los siguientes límites:* $\lim_n \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ *y* $\lim_n \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

Sea $a_n := \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. Tenemos que $a_n = \sqrt[n]{b_n}$, donde $b_n := \frac{1}{n!}$. Por la parte anterior, si existe el límite de $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, entonces existe el límite de la raíz n-ésima y son iguales. Entonces:

$$\lim_n \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_n \frac{1}{(n+1)!}\cdot n! = \lim_n \frac{1}{(n+1)n!}\cdot n! = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$$

Entonces $0 = \lim_n \sqrt[n]{b_n} = \lim_n a_n$.

Para ver el otro límite, sea $a_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Tenemos que $a_n = \sqrt[n]{b_n}$, donde $b_n := \frac{n^n}{n!}$. Por la parte anterior, si existe el límite de $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, entonces existe el límite de la raíz n-ésima y son iguales. Entonces:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

por el ejercicio 6d). Entonces $e = \lim_n \sqrt[n]{b_n} = \lim_n a_n$.