GAL II - Wzór na odległość punktu od hiperpowierzchni afinicznej

Jeśli M jest hiperpowierzchnią w $\mathbb{R}^n$, czyli jest $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią afiniczną $\mathbb{R}^n$, to wiemy, że istnieją $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ takie, że

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b\}. \tag{0.1}$$

Innymi słowy, możemy opisać M jednym równaniem afinicznym w $\mathbb{R}^n$. Z tego wynika następujący wzór na odległość jakiegoś punktu $p = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ do M:

$$\rho(p, M) = \frac{|a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} = \frac{|\langle a, p\rangle - b|}{\|a\|} \tag{0.2}$$

gdzie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\langle -, - \rangle$ to standardowy iloczyn skalarny. Zauważcie, że $a \perp M$. Ten wzór może być użyteczny ale zawsze możemy obliczyć tę odległość jako odległość od punktu do dowolnej podprzestrzeni afinicznej, niekoniecznie wymiaru $n-1$. Czyli jako normę wektora łączącego p ze swoim rzutem prostopadłem na M. I tak właśnie można robić dowód wzoru, korzystając z (0.1).

Czy możemy uogólnić ten wzór, i zamiast mieć $M \subset \mathbb{R}^n$ wymiaru $n-1$, mieć $M \subset H$ wymiaru $n-1$, gdzie $(H, \langle -, - \rangle_1)$ to dowolna przestrzeń euklidesowa afiniczna? Tak. Zróbmy to.

Niech $(H, \langle -, - \rangle_1)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną, niech $M \subset H$ będzie podprzestrzenią afiniczną wymiaru $n-1$, niech $p_0 \in H$ i niech $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset T(H)$ będzie bazą ortonormalną. Będziemy pracować w układzie bazowym $\{p_0; \mathcal{B}\}$. Najpierw uogólnimy (0.1). Wiemy, że $T(M)^\perp \subset T(H)$ jest podprzestrzenią liniową wymiaru 1, więc $T(M)^\perp = \mathrm{lin}(a)$ dla jakiegoś $a \in T(H)$. Z tego wynika, że

$$T(M) = \{v \in T(H) : \langle a, v \rangle_1 = 0\}.$$

Przypomnijmy sobie teraz, że w bazie ortonormalnej dowolny iloczyn skalarny wygląda jak iloczyn skalarny standardowy w $\mathbb{R}^n$: $\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \rangle_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, więc jeśli (a_i) to współrzędne a w bazie $\mathcal{B}$, czyli $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, wtedy

$$T(M) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i \in T(H) : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\},$$

więc jeśli $p_1 \in M$, to

$$\begin{aligned} M = p_1 + T(M) &= \left\{ p_1 + \sum_{i=1}^n x_i e_i \in H : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\} \\ &= \left\{ p_0 + p_1 - p_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i \in H : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

Ale jeśli $p_1 - p_0 = \overrightarrow{p_0p_1} = \sum_{i=1}^n c_ie_i \in T(H)$, to

$$
\begin{aligned}
M &= \left\{ p_0 + \sum_{i=1}^n (c_i + x_i)e_i \in H : \sum_{i=1}^n a_ix_i = 0 \right\} \\
&= \left\{ p_0 + \sum_{i=1}^n z_ie_i \in H : \sum_{i=1}^n a_iz_i = b \right\} \qquad (0.3)
\end{aligned}
$$

gdzie $b = \sum_{i=1}^n a_ic_i$. To jest nasz opis M podobny do (0.1).

Teraz znajdujemy współrzędne punktu $p \in W$ w układzie bazowym $\{p_0; \mathcal{B}\}$, czyli $p = p_0 + \sum_{i=1}^n y_ie_i$, i to nam daje te y_i które są potrzebne we wzorze (0.2), który działa w tym kontekście z podobnym dowodem. To jest naszym żądanym uogólnieniem.

Podsumowując, jeśli $(H, \langle -, - \rangle_1)$ jest przestrzenią afiniczną euklidesową wymiaru n, $M \subset W$ jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru $n-1$ i $p \in H$, to żeby znaleźć $\rho(p, M)$ możemy postępować tak:

(1) Znaleźć wektor $a \in T(H)$ taki, że $\langle a, v \rangle_1 = 0$ dla wszystkich $v \in T(M)$. Możemy to zrobić za pomocą bazy $T(M)$.
(2) Znaleźć bazę ortonormalną $T(H)$, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
(3) Znaleźć współrzędne a w bazie $\mathcal{B}$: $a = \sum_{i=1}^n a_ie_i$, to po prostu $a_i = \langle a_i, e_i \rangle_1$.
(4) Wziąć punkty $p_0 \in H$, $p_1 \in M$, znaleźć współrzędne p_1 w układzie bazowym $\{p_0; \mathcal{B}\}$: $\overrightarrow{p_0p_1} = \sum_{i=1}^n c_ie_i$, i znaleźć b podstawiając te współrzędne w równaniu, czyli $b = \sum_{i=1}^n a_ic_i$.
(5) Znaleźć współrzędne punktu p w układzie bazowym $\{p_0; \mathcal{B}\}$: $\overrightarrow{p_0p} = \sum_{i=1}^n y_ie_i$, więc $y_i = \langle \overrightarrow{p_0p}, e_i \rangle_1$.
(6) Możemy używać wzoru (0.2), bo mamy już $a_1, \ldots, a_n, b, y_1, \ldots, y_n$. Czyli

$$
\rho(p, M) = \frac{|a_1y_1 + \cdots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} = \frac{|\langle a, \overrightarrow{p_0p} \rangle_1 - b|}{\|a\|_1}. \qquad (0.4)
$$

Możemy ułatwić sobie życie wybierając $p_0 \in M \subset H$ zamiast ogólny $p_0 \in H$, wtedy czwarty punkt powyższego przepisu się upraszcza:

(4) Wziąć punkt $p_0 \in M$ (i $p_1 = p_0$), wtedy $b = 0$.

Innymi słowy: jeśli mamy M jak w (0.3), to $b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_0 \in M$.

Weźmy przykład w $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym $\langle u, v \rangle_1 = \frac{1}{2}\langle u, v \rangle_{\mathrm{st}}$. Czyli ten iloczyn skalarny ma te same kąty co standardowy (więc to samo pojęcie prostopadłości), ale ma długości takie, że np. wektory $(1,1)$ i $(1,-1)$ mają normę 1. Niech

$$
M = (0,1) + \mathrm{lin}((1,1)),
$$

$e_1 = (1,1)$, $e_2 = (1,-1)$, $p_0 = (1,0)$, $p_1 = (0,1)$ (zob. rysunek na ostatniej stronie). Wtedy

$$
\begin{aligned}
M &= \{p_1 + x_1e_1 + x_2e_2 : x_2 = 0\} \\
&= \{p_0 + x_1e_1 + x_2e_2 : x_2 = -1\}.
\end{aligned}
$$

czyli $a_1 = 0, a_2 = 1$: mamy więc $a = e_2$. Mamy też $b = -1$. Jeśli $p = (0,0)$, to żeby znaleźć $\rho(p, M)$ najpierw znajdujemy współrzędne p w układzie bazowym ortonormalnym

$\{p_0; e_1, e_2\}$: $p = p_0 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$, czyli $y_1 = y_2 = -\frac{1}{2}$. Zatem

$$\rho(p, M) = \frac{|a_1 y_1 + a_2 y_2 - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{1}{2}$$

Zauważcie, że też możemy korzystać z drugiej części wzoru (0.4):

$$\rho(p, M) = \frac{|\langle(1, -1), (-1, 0)\rangle_1 + 1|}{1} = \left|-\frac{1}{2} + 1\right| = \frac{1}{2}.$$