Cálculo III

Bruno Stonek
bruno@stonek.com

28 de enero de 2014

Índice general

Prefacio 5

I Cálculo en variedades **6**

0. Diferenciabilidad **8**

1. Álgebra exterior **12**
1.1. Espacio dual 12
1.2. Formas multilineales 13
1.2.1. Producto tensorial 13
1.3. Formas multilineales alternadas 14
1.3.1. Producto exterior 17

2. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$ **22**
2.1. Definición y ejemplos 22
2.2. Producto exterior 24
2.3. Derivada exterior 25
2.4. Pull-back 26
2.5. Formas y campos en $\mathbb{R}^3$ 29
2.6. Formas cerradas y exactas 31

3. Integrales de línea **34**
3.1. Definiciones 34
3.2. Relación con formas cerradas y exactas 36

4. Variedades diferenciables **39**
4.1. Definiciones 39
4.2. Ejemplos 41
4.3. Superficies regulares 45
4.3.1. Ejemplos 45
4.3.2. Difeomorfismos entre superficies regulares 48
4.4. Espacio tangente 50
4.5. Diferencial de un mapa entre variedades 56
4.5.1. Definición 56
4.5.2. Propiedades 58
4.6. Orientación 60
4.6.1. Orientación de espacios vectoriales 61
4.6.2. Orientación de variedades 63

4.6.3. Orientación de curvas y superficies 66
4.7. Variedades con borde 70
4.7.1. Variedades con borde 70
4.7.2. Orientación de variedades con borde 74

5. Formas diferenciales en variedades 80
5.1. k-formas 80
5.2. Pull-back 80
5.3. Formas diferenciales en variedades 81
5.4. Orientación de variedades con formas diferenciales y forma de volumen 83
5.5. Derivada exterior en variedades 87

6. Integración de formas en variedades 89
6.1. Integración en $\mathbb{H}^n$ 89
6.2. Integración en un entorno coordenado 90
6.3. Integración en una variedad compacta 92
6.4. Integración de funciones en variedades 95
6.5. Volúmenes de variedades 95
6.6. Integración en superficies 97
6.7. Integración en curvas 99
6.8. Teorema de Stokes 100
6.8.1. Los teoremas clásicos 104
6.8.2. Interpretación física de los operadores clásicos 105
6.9. Homotopía 107

II Geometría diferencial de curvas y superficies 109

1. Geometría diferencial de curvas 110
1.1. Definición y ejemplos 110
1.2. Triedro de Frenet 113

2. Geometría diferencial de superficies 116
2.1. Primera forma fundamental 116
2.1.1. Primera forma fundamental en coordenadas locales 116
2.1.2. Aplicaciones 117
2.2. Mapa de Gauss y segunda forma fundamental 118
2.2.1. Curvaturas normales 119
2.2.2. Curvaturas principales 121
2.2.3. Curvatura Gaussiana 122
2.2.4. Ejemplos 123
2.2.5. Segunda forma fundamental en coordenadas locales 126
2.2.6. La curvatura en coeficientes 127
2.3. Isometrías 128
2.4. Símbolos de Christoffel y Teorema Egregio de Gauss 130

Bibliografía 138

Índice alfabético 139

Prefacio

Este libro está inspirado en el curso de Cálculo III dictado en 2009 por Miguel Paternain.

Mi meta y motivación a lo largo de su escritura fue conseguir concentrar la mayor cantidad posible de contenido, de manera coherente y con un orden lógico-formal adecuado, para un curso de un semestre. Es mi intención que el lector con los conocimientos previos necesarios (cálculo en una y varias variables y algo de álgebra lineal) pueda hacer una lectura íntegra autocontenida. Es por esto que hay escasos ejercicios: si algún resultado se precisa para avanzar en la teoría, es probado en el texto. Y si no, es una omisión de mi parte que agradecería se me hiciera saber.

Encarezco al lector me haga llegar todo tipo de sugerencia, crítica constructiva, duda o comentario en general a través de mi correo electrónico. Es mi motivación que la calidad sea la mayor posible y los errores, mínimos, pero por mucha relectura que haga, siempre se me deslizan errores. Si le pido un favor al lector, es ése: que perdone mis despistes y me los haga saber para poder ser corregidos.

Agradezco profunda y sinceramente a Miguel Paternain por introducirme con tanto entusiasmo a un curso tan bonito (y por hacer de su estudio un gusto).

Asimismo agradezco a Eusebio Gardella por la paciencia y dedicación que tuvo al evacuarme las dudas que me fueron surgiendo durante el dictado de dicho curso.

Doy las gracias también a Jónathan Acuña, Ana Cortazzo, Gonzalo Cousillas, Maximiliano Escayola, Pablo Ferrari, Cécile Mezzera, Maru Sarazola, Diego Silvera, Paula Verdugo y Andrea Viscarret por señalarme diversas erratas en el texto.

Las imágenes y gráficos fueron hechos con gnuplot, Adobe Illustrator, xfig, y/o el entorno *picture* del propio LaTeX. Excepciones: en la Parte I, las figuras 4.11 y 6.1 (dominio público); en la Parte II, la figura 2.1 (Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0, Eric Gaba, modificación: traducción de la leyenda), 2.3 y 2.7 (debidamente citadas en la bibliografía).

Un último agradecimiento a mi padre, Daniel, por ayudarme más de una y de dos veces con el Illustrator.

Parte I

Cálculo en variedades

Nos proponemos definir *formas diferenciales* en *variedades*, y de esta manera poder demostrar el *teorema de Stokes*. Es un teorema que, por un lado, vincula la topología con el análisis; y por otro, generaliza y engloba varios teoremas clásicos (teorema del gradiente, teorema de Green, teorema de Stokes clásico, teorema de la divergencia de Gauss...).

El teorema dice básicamente que:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Esta concisa expresión resume y vincula muchas ideas: variedades, variedades con borde, formas en variedades, derivada exterior de formas en variedades e integración de formas en variedades. Es por ello la culminación de esta primera parte del curso.

Para llegar a ello hay que trabajar bastante: la construcción que haremos en el capítulo primero lo pone en evidencia.

Capítulo 0

Diferenciabilidad

Definición 0.0.1. Llamaremos *espacio euclídeo* al espacio vectorial con producto interno $\mathbb{R}^n$, para algún $n \geq 1$, donde el producto interno es el producto escalar usual.

En Cálculo II definimos diferenciabilidad de esta manera: si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $p \in U$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (que llamaremos el *diferencial de f en p* y notaremos df_p) tal que:

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - T(v)}{\|v\|} = 0$$

o lo que es equivalente, escribiendo ya T como df_p,

$$f(x) - f(p) = df_p(x-p) + r(x), \qquad \forall x \in U$$

donde $r : U \to \mathbb{R}^m$ verifica:

$$\lim_{x \to p} \frac{r(x)}{\|x-p\|} = 0$$

La definición precedente es más débil que la que usaremos en este curso, sin embargo nunca está de más recordarla. Nuestras funciones serán generalmente infinitamente diferenciables:

Definición 0.0.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *infinitamente diferenciable* o *de clase C^∞* si existen todas sus derivadas parciales de todos los órdenes en todo punto de U. Denotaremos su derivada parcial según x_i indistintamente como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ o como f_{x_i}. Escribiremos como $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : U \to \mathbb{R}^n$ su gradiente y como $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ su diferencial en un punto $p \in U$. Recordamos que el diferencial es una transformación lineal y que $df_p(v) = \nabla f(p) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$, donde $\frac{\partial f}{\partial v}$ es la derivada direccional de f según v.

Observación 0.0.3. Recordar que el diferencial de una transformación lineal es la propia transformación lineal, y que el diferencial de $\mathrm{id}_U : U \to U$ es $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definición 0.0.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Definimos la derivada parcial de f según x_i como la función:

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)$$

Definición 0.0.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ una función. Decimos que f es *infinitamente diferenciable*, o *de clase* C^∞, si existen todas las derivadas parciales de todos los órdenes de f en todo punto de U. Escribiremos como $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ su diferencial en un punto $p \in U$. Recordamos que es una transformación lineal y que $df_p = (d(f_1)_p, \ldots, d(f_m)_p)$.

Esta definición vale para conjuntos abiertos, nos proponemos extenderla para conjuntos cualesquiera.

Definición 0.0.6. Sea $p \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $W \subset \mathbb{R}^n$ es un *entorno abierto de* p si W es abierto y $p \in W$.

Definición 0.0.7. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función. Decimos que f es *infinitamente diferenciable* o *de clase* C^∞ si para todo $p \in A$ existen:

- $U \subset \mathbb{R}^n$ un entorno abierto de p,
- $F : U \to \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ de modo tal que $F|_{A \cap U} = f|_{A \cap U}$ (una *extensión diferenciable*).

Las llamaremos sencillamente *funciones diferenciables*. Notaremos por $C^\infty(A)$ al conjunto:

$$C^\infty(A) \overset{\text{def.}}{=} \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es de clase } C^\infty\}$$

Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son subconjuntos, decimos que una función $f : A \to B$ es un *difeomorfismo* si es diferenciable, biyectiva, y $f^{-1} : B \to A$ es diferenciable.

Observación 0.0.8. Esta definición no es circular, si bien puede parecerlo a golpe de vista. Estamos definiendo lo que significa que una función sea diferenciable en un subconjunto *cualquiera* de $\mathbb{R}^n$, en base a la diferenciabilidad conocida en un subconjunto *abierto*. La función F de la definición es diferenciable en el sentido de Cálculo II (recordado más arriba), esto es, en un subconjunto abierto.

Observación 0.0.9. Ahora sabemos lo que es una función diferenciable en un conjunto cualquiera, pero no hemos definido el diferencial de una tal función. Si p es un punto interior del dominio A, entonces podemos tomarnos un entorno U suficientemente pequeño para que esté incluido en A, por lo que todas las extensiones de f tendrán el mismo diferencial en p, que es el de $f|_U$, y por lo tanto no habría problema en definirlo como el diferencial de alguna extensión. Sin embargo si p no es interior al dominio, no todas las extensiones tienen por qué tener igual diferencial, y ya no podríamos definirlo de esta manera:

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el eje de las abscisas, $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, 0) = 0$. f es diferenciable pues se puede extender a todo $\mathbb{R}^2$ como la función nula. También se puede extender por la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = y$. ¿Cómo haríamos entonces para definir el diferencial de f?

Ejercicio 0.0.10. Demostrar que la restricción de una función diferenciable a un subconjunto cualquiera es diferenciable, y que la composición de funciones diferenciables es diferenciable.

Definición 0.0.11. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos. Sea $f : A \to B$ una función. Decimos que f es un *difeomorfismo* si f es invertible, diferenciable y la función inversa f^{-1} es diferenciable. En este caso decimos que A y B son *difeomorfos*.

Ejercicio 0.0.12. Demostrar que la composición de difeomorfismos es un difeomorfismo, y que *ser difeomorfo* es una relación de equivalencia.

Dos cosas difeomorfas (intuitivamente: que podemos deformar una en la otra "suavemente") son *indistinguibles* para el topólogo diferencial. Para el topólogo general, dos cosas *homeomorfas* (que podemos deformar una en otra "continuamente") son indistinguibles (la rosquilla y la taza de café...).

Recordamos los siguientes resultados demostrados en Cálculo II.

Regla de la cadena. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y sean $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^l$ funciones diferenciables, con f tal que* $\operatorname{Im} f \subset V$. *Entonces la función $g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$ cumple:*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p \quad \forall p \in U$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "df_p"] \arrow[rr, bend right, "d(g\circ f)_p"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "dg_{f(p)}"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

Corolario 0.0.13. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $f : U \to V$ un difeomorfismo. Entonces $m = n$, y el diferencial $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en un punto $p \in U$ es un isomorfismo (lineal) cuya inversa es tal que:*

$$(df_p)^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}$$

Demostración. Aplicamos la regla de la cadena en las igualdades $\mathrm{id}_U = f^{-1} \circ f$ e $\mathrm{id}_V = f \circ f^{-1}$, recordamos que el diferencial de la identidad es la identidad, y obtenemos:

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = d(\mathrm{id}_U)_p = d(f^{-1} \circ f)_p = d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p$$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} = d(\mathrm{id}_V)_{f(p)} = d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = df_p \circ d(f^{-1})_{f(p)}$$

Esto implica que df_p es invertible, y su inversa es $d(f^{-1})_{f(p)}$. Tenemos entonces que $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, luego $m = n$. $\square$

Observación 0.0.14. No basta con que el diferencial en cierto punto sea un isomorfismo para garantizar que f sea un difeomorfismo. Por ejemplo, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Su diferencial en el punto 1 es $df_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df_1(x) = f'(1) \cdot x = 2x$ que es un isomorfismo, sin embargo f no es un difeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$.

Sí podemos afirmar que lo es localmente, gracias al

Teorema de la función inversa. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable y $p \in U$. Si df_p es un isomorfismo, entonces existe $X \subset U$ un entorno abierto de p tal que $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f|_X : X \to f(X)$ es un difeomorfismo.*

Léase: si una función diferenciable tiene diferencial invertible en un punto, entonces es localmente un difeomorfismo.

Observación 0.0.15. La condición *df_p es invertible* (que es lo mismo que decir que df_p es un isomorfismo) es equivalente a la condición $\det df_p \neq 0$ donde $\det df_p$ es el determinante jacobiano de f en p.

Capítulo 1

Álgebra exterior

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

1.1. Espacio dual

Hagamos un pequeño repaso sobre el *espacio dual*.

Definición 1.1.1. Definimos el *espacio dual* de V que notaremos V^* como el espacio

$$V^* = \{T : V \to \mathbb{R} : T \text{ es lineal}\}$$

Observación 1.1.2. No es difícil ver que V^* es un subespacio vectorial del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones de V en $\mathbb{R}$ con las operaciones definidas punto a punto, esto es:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (af)(x) &= a\, f(x), \quad \forall a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Definición 1.1.3. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V, entonces el conjunto $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset V^*$ que verifica:

$$\phi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

se denomina *base dual* de $\mathcal{B}$.

Notación. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces notaremos su base dual por $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$.

Observación 1.1.4. Recordamos las siguientes igualdades: para todo $v \in V$, $f \in V^*$ se cumple

$$v = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(v)\, e_i$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, \phi_i$$

Observación 1.1.5. No es difícil ver que una base dual es efectivamente una base del espacio vectorial V^*. Por lo tanto, $\dim V = \dim V^*$.

Definición 1.1.6. Si V, W son espacios vectoriales y $T : V \to W$ es una transformación lineal, la *transformación dual* de T es $T^* : W^* \to V^*$ definida mediante

$$T^*(f) = f \circ T$$

1.2. Formas multilineales

Definición 1.2.1. Una *k-forma multilineal* (o *forma k-lineal*, o *k-forma lineal*, o *k-tensor*) en V es una función $T : V^k \to \mathbb{R}$ que es lineal en cada variable, esto es:

$$T(v_1, \ldots, av_i + w_i, \ldots, v_k) = a\,T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_k, w_i \in V$ y todo $i = 1, \ldots, k$. Notaremos $\mathscr{T}^k(V^*)$ al espacio de las k-formas multilineales en V.

Observación 1.2.2. Es fácil ver que $\mathscr{T}^k(V^*)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones con dominio V^k y codominio $\mathbb{R}$, con las operaciones definidas punto a punto. Por lo tanto $\mathscr{T}^k(V^*)$ tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejemplo 1.2.3. Si tomamos $k = 1$, tenemos $\mathscr{T}^1(V^*) = V^*$. Tenemos entonces que $\mathscr{T}^k(V^*)$ es una generalización del espacio dual.

Ejemplo 1.2.4. Para $k = 2$ y $V = \mathbb{R}^n$, si tomamos $T(v, w) = v \cdot w$, el producto escalar, tenemos que T es una 2-forma multilineal en $\mathbb{R}^n$. Llamaremos a las 2-formas multilineales, formas *bilineales*.

Ejemplo 1.2.5. Si $k = n$ y $V = \mathbb{R}^n$, entonces el determinante es una n-forma multilineal.

1.2.1. Producto tensorial

Definición 1.2.6. Sea T una k-forma multilineal en V y S una r-forma multilineal en V. Definimos su *producto tensorial*, $T \otimes S \in \mathscr{T}^{k+r}(V^*)$ por:

$$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+r}) = T(v_1, \ldots, v_k)\, S(v_{k+1}, \ldots, v_{k+r})$$

Proposición 1.2.7. *El producto tensorial tiene las siguientes propiedades:*

- $(T + S) \otimes R = T \otimes R + S \otimes R$ *(propiedad distributiva)*
- $T \otimes (S + R) = T \otimes S + T \otimes R$ *(propiedad distributiva)*
- $(aT) \otimes S = T \otimes (aS) = a(T \otimes S)$ *(propiedad homogénea)*
- $T \otimes (S \otimes R) = (T \otimes S) \otimes R$ *(propiedad asociativa)*

La última propiedad nos permite escribir $T \otimes S \otimes R$. Observar que el producto tensorial no es conmutativo:

$$T \otimes S \neq S \otimes T$$

Lema 1.2.8. *Una k-forma multilineal T en V queda determinada por los valores que toma en todas las k-uplas de elementos de una base de V.*

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V, $v_1, \ldots, v_k \in V$. Escribimos:

$$v_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{i_{j_i}} e_{j_i}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T(v_1, \ldots, v_k) &= T\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1_{j_1}} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} a_{k_{j_k}} e_{j_k}\right) \\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{1_{j_1}} \ldots a_{k_{j_k}} T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \end{aligned}$$

Entonces conociendo $T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ para todo $j_i = 1, \ldots, n$ y todo $i = 1, \ldots, k$, tenemos unívocamente determinada T. □

El producto tensorial permite expresar $\mathscr{T}^k(V^*)$ por medio de $\mathscr{T}^1(V^*)$:

Proposición 1.2.9. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V y $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ su base dual. Entonces una base de $\mathscr{T}^k(V^*)$ viene dada por:*

$$\mathcal{B} = \{\phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_k} : 1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq n\}$$

Demostración. Sea T una forma k-lineal. Queremos ver que es posible escribir de manera única:

$$T = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{j_1,\ldots,j_k} \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_k}, \qquad a_{j_1,\ldots,j_k} \in \mathbb{R}$$

Por la proposición anterior, basta evaluar en todas las k-uplas de elementos de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$: sea $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ una k-upla arbitraria.

$$\begin{aligned} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) &= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{j_1,\ldots,j_k} \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \\ &= a_{i_1,\ldots,i_k} \phi_{i_1}(e_{i_1}) \ldots \phi_{i_k}(e_{i_k}) \\ &= a_{i_1,\ldots,i_k} \end{aligned}$$

Por lo tanto siempre es posible escribir T como arriba y de manera única: basta tomar $a_{j_1,\ldots,j_k} = T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$. □

Corolario 1.2.10. *El espacio vectorial $\mathscr{T}^k(V^*)$ tiene dimensión n^k.*

1.3. Formas multilineales alternadas

Definición 1.3.1. Una k-forma lineal T se dice *alternada* si para toda k-upla $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ se cumple:

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

Notaremos $\Lambda^k(V^*)$ al espacio de las k-formas multilineales alternadas y definimos $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ por conveniencia.

Observación 1.3.2. Es claro que $\Lambda^k(V^*)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{T}^k(V^*)$.

Definición 1.3.3. Denotaremos por S_p al grupo simétrico de p elementos, es decir, el grupo de las permutaciones de p elementos con la composición como producto. Recordar que una permutación σ de p elementos es una función biyectiva

$$\sigma : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, p\}$$

Recordamos que dada una permutación σ, la podemos escribir como composición de transposiciones (ciclos de orden 2). La paridad del número de transposiciones es invariante, y es lo que nos permite hacer la siguiente

Definición 1.3.4. Si σ es una permutación, definimos su *signo*, sg σ, mediante:

$$\operatorname{sg}(\sigma) \overset{\text{def.}}{=} (-1)^{\text{número de transposiciones de } \sigma}$$

Si $T \in \mathscr{T}^k(V^*)$, $\pi \in S_k$ entonces $T^\pi \in \mathscr{T}^k(V^*)$ es tal que para todo $v_1, \ldots, v_k \in V$,

$$T^\pi(v_1, \ldots, v_k) \overset{\text{def.}}{=} T(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})$$

Observación 1.3.5.

- El signo de una permutación respeta el producto, i.e. se cumple que $\operatorname{sg}(\rho \circ \tau) = \operatorname{sg}(\rho)\operatorname{sg}(\tau) \quad \forall \rho, \tau \in S_p$.
- Si ρ, τ son permutaciones, entonces $T^{\tau\rho} = (T^\rho)^\tau$. En efecto, ambas expresiones significan que al evaluar en $v_1, \ldots, v_k$ debemos aplicar primero ρ a los índices y después τ.

Proposición 1.3.6. *Una k-forma lineal T es alternada si y sólo si*

$$T^\sigma = \operatorname{sg}(\sigma)\, T, \qquad \forall \sigma \in S_k$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Hagámoslo por inducción en el número de transposiciones que aparecen en la descomposición de σ. Escribamos $\sigma = \tau \circ \rho = \tau\rho$, donde ρ es la primera que aparece y no es la identidad, y τ es la composición del resto. Para el paso inicial: si π es una transposición que no es la identidad, como T es alternada, $T^\pi = -T = \operatorname{sg}(\pi)\, T$. Por lo tanto, aplicando la hipótesis inductiva y el paso inicial a ρ,

$$T^\sigma = T^{\tau\rho} = (T^\rho)^\tau = \operatorname{sg}(\tau)\, T^\rho = \operatorname{sg}(\rho)\operatorname{sg}(\tau)\, T = \operatorname{sg}(\sigma)\, T$$

($\Leftarrow$) Basta elegir $\sigma = (i, j)$, la permutación que cambia i con j y deja el resto fijo. $\square$

Definición 1.3.7. Si T es una k-forma lineal, definimos su *alternador*, $\operatorname{Alt}(T) \in \mathscr{T}^k(V^*)$ mediante:

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sg}(\sigma)\, T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

O, con una escritura más compacta:

$$\operatorname{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sg}(\sigma)\, T^\sigma$$

Proposición 1.3.8.

- *Si* $T \in \mathscr{T}^k(V^*)$*, entonces* $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(V^*)$*.*
- *Si* $T \in \Lambda^k(V^*)$ *entonces* $\mathrm{Alt}(T) = T$*.*
- *Si* $T \in \mathscr{T}^k(V^*)$*, entonces* $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T)) = \mathrm{Alt}(T)$*.*

Demostración.

- Sea (i, j) la permutación que cambia entre sí i y j y deja los otros números fijos. Si $\sigma \in S_k$, definimos $\sigma' = \sigma \circ (i, j)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = \\
= \; & \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sg}(\sigma)\, T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(i)}, \ldots, v_{\sigma(j)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
= \; & \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sg}(\sigma)\, T(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(j)}, \ldots, v_{\sigma'(i)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) \\
= \; & \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} -\mathrm{sg}(\sigma')\, T(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(j)}, \ldots, v_{\sigma'(i)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) \\
= \; & -\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

- Si $T \in \Lambda^k(V^*)$, entonces para todo $\sigma \in S_k$ se cumple $T^\sigma = \mathrm{sg}(\sigma)\, T$. Por lo tanto:

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sg}(\sigma)\, T^\sigma = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sg}(\sigma)\, \mathrm{sg}(\sigma) T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T = T$$

  pues $\#S_k = k!$.

- Por el primer ítem, $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(V^*)$, entonces por el segundo ítem $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T)) = \mathrm{Alt}(T)$. □

El primer ítem nos dice que aplicar el alternador es una manera de obtener tensores alternados a partir de tensores cualesquiera.

Definición 1.3.9. Si $A : V \to W$ es una transformación lineal y $k \geq 0$, definimos $A^* : \Lambda^k(W^*) \to \Lambda^k(V^*)$ mediante

$$A^*(T)(v_1, \ldots, v_k) = T(A(v_1), \ldots, A(v_k))$$

para todo $T \in \Lambda^k(W^*)$, $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$. Decimos que $A^*(T)$ es el *pull-back lineal* de T por A.

Observación 1.3.10. Este mapa se puede definir también sin ningún problema de manera tal que $A^* : \mathscr{T}^k(W^*) \to \mathscr{T}^k(V^*)$, no lo haremos así pues a nuestros efectos no aporta nada. Observemos también que para $k = 1$ obtenemos la aplicación dual, por lo tanto este mapa lo generaliza (falta verificar que efectivamente A^* es lineal).

Proposición 1.3.11. *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. La aplicación* T^* *tiene las siguientes propiedades:*

- T^* *es lineal,*
- $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{\Lambda^k(V^*)}$,

- *Si $S : U \to V$ es una transformación lineal, entonces $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$,*
- *Si T es un isomorfismo lineal, entonces T^* también lo es, y verifica*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Observación 1.3.12. Las propiedades segunda y tercera se resumen en la siguiente sentencia categórica: la operación $*$ es un *functor contravariante*.

1.3.1. Producto exterior

Definición 1.3.13. Sea $T \in \Lambda^k(V^*)$, $S \in \Lambda^r(V^*)$. Definimos su *producto exterior*, o *producto cuña*, $T \wedge S \in \Lambda^{k+r}(V^*)$, mediante:

$$T \wedge S = \frac{(k+r)!}{k!\,r!} \operatorname{Alt}(T \otimes S)$$

Es claro que el producto cuña de dos tensores alternados es un tensor alternado, mientras que el producto tensorial de dos tensores alternados no tiene por qué serlo. En ese sentido, el producto cuña es cerrado para los tensores alternados: es un producto adecuado. La utilidad de los factoriales se irá mostrando progresivamente.

Proposición 1.3.14. *El producto cuña tiene las siguientes propiedades: para todo $T \in \Lambda^k(V^*)$, $S \in \Lambda^r(V^*)$, $R \in \Lambda^l(V^*)$, $a \in \mathbb{R}$:*

- $T \wedge (S + R) = T \wedge S + T \wedge R$ *(propiedad distributiva)*
- $(T + S) \wedge R = T \wedge R + S \wedge R$ *(propiedad distributiva)*
- $(aS) \wedge T = S \wedge (aT) = a(S \wedge T)$ *(propiedad homogénea)*
- $T \wedge S = (-1)^{kr}\, S \wedge T$

También vale la asociatividad, pero vamos a tener que trabajar un poco para probarla.

Observación 1.3.15. Del cuarto ítem se deduce que si $\phi, \psi \in \Lambda^1(V^*) = V^*$, entonces $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$ y $\phi \wedge \phi = 0$, de donde $\wedge$ es anticonmutativo en $\Lambda^1(V^*)$. Esta propiedad de las 1-formas es crucial. Observar que

$$\phi \wedge \psi = \frac{1}{2}\,(\phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi)$$

Lema 1.3.16. *entonces*

- *Si $T \in \mathscr{T}^k(V^*)$ y $S \in \mathscr{T}^r(V^*)$, y T es tal que $\operatorname{Alt}(T) = 0$,*

$$\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0 = \operatorname{Alt}(S \otimes T)$$

- *Si $T \in \Lambda^k(V^*)$, $S \in \Lambda^r(V^*)$, $R \in \Lambda^l(V^*)$, entonces*

$$\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(T \otimes S) \otimes R) = \operatorname{Alt}(T \otimes S \otimes R) = \operatorname{Alt}(T \otimes \operatorname{Alt}(S \otimes R))$$

Demostración.

- Por definición, tenemos que

$$\text{Alt }(T \otimes S) = \frac{1}{(k+r)!} \sum_{\pi \in S_{k+r}} \text{sg}(\pi)(T \otimes S)^{\pi}$$

Sea $G \subset S_{k+r}$ el subgrupo que deja fijos los últimos $k+1, \ldots, k+r$ números. G es una copia de S_k en S_{k+r}, luego si $\pi \in G$ le asociamos $\pi' \in S_k$ de manera natural. Es claro que $(T \otimes S)^{\pi} = T^{\pi'} \otimes S$, luego:

$$\sum_{\pi \in G} \text{sg}(\pi)(T \otimes S)^{\pi} = \left(\sum_{\pi' \in S_k} \text{sg}(\pi')\, T^{\pi'} \right) \otimes S = 0$$

pues por hipótesis, $\text{Alt}(T) = 0$. Resta ver que es 0 para aquellos $\pi \notin G$. Pero G descompone S_{k+r} en unión disjunta de coclases a la izquierda,

$$\sigma \circ G = \{\sigma \circ \pi : \pi \in G\}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi \in S_{k+r}} \text{sg}(\pi)(T \otimes S)^{\pi} &= \sum_i \sum_{\pi \in G} \text{sg}(\sigma_i \circ \pi)(T \otimes S)^{\sigma_i \circ \pi} \\
&= \sum_i \text{sg}(\sigma_i) \sum_{\pi \in G} \text{sg}(\pi)(T \otimes S)^{\sigma_i \circ \pi} \\
&= \sum_i \text{sg}(\sigma_i) \left(\sum_{\pi \in G} \text{sg}(\pi)(T \otimes S)^{\pi} \right)^{\sigma_i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

pues recién probamos que $\sum_{\pi \in G} \text{sg}(\pi)(T \otimes S)^{\pi} = 0$.

- Tenemos que

$$\text{Alt}(\text{Alt}(S \otimes R) - S \otimes R) = \text{Alt}(S \otimes R) - \text{Alt}(S \otimes R) = 0$$

por lo tanto utilizando el ítem anterior para $\text{Alt}(S \otimes R) - S \otimes R$ tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \text{Alt}(T \otimes [\text{Alt}(S \otimes R) - S \otimes R]) \\
&= \text{Alt}(T \otimes \text{Alt}(S \otimes R)) - \text{Alt}(T \otimes (S \otimes R))
\end{aligned}$$

de donde por la asociatividad de $\otimes$,

$$\text{Alt}(T \otimes S \otimes R) = \text{Alt}(T \otimes \text{Alt}(S \otimes R))$$

y la otra igualdad se deduce de manera análoga. □

Teorema 1.3.17. *El producto exterior $\wedge$ es asociativo, es decir, si $T \in \Lambda^k(V^*)$, $S \in \Lambda^r(V^*)$ y $R \in \Lambda^l(V^*)$, vale*

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R) = \frac{(k+r+l)!}{k!\, r!\, l!} \text{Alt }(T \otimes S \otimes R)$$

y por tanto escribiremos simplemente $T \wedge S \wedge R$.

Demostración. En virtud del segundo ítem del lema anterior,

$$\begin{aligned}
(T \wedge S) \wedge R &= \frac{((k+r)+l)!}{(k+r)!\,l!} \operatorname{Alt}((T \wedge S) \otimes R) \\
&= \frac{(k+r+l)!}{(k+r)!\,l!} \operatorname{Alt}\left(\frac{(k+r)!}{k!\,r!} \operatorname{Alt}(T \otimes S) \otimes R \right) \\
&= \frac{(k+r+l)!}{(k+r)!\,l!} \frac{(k+r)!}{k!\,r!} \operatorname{Alt}(T \otimes S \otimes R) \\
&= \frac{(k+r+l)!}{k!\,r!\,l!} \operatorname{Alt}(T \otimes S \otimes R)
\end{aligned}$$

La otra igualdad es análoga. □

Ejercicio 1.3.18. Sea $A : V \to W$ es una transformación lineal y $T \in \Lambda^k(V^*), S \in \Lambda^r(V^*)$. Entonces

$$A^*(T \wedge S) = A^*(T) \wedge A^*(S)$$

Ahora que sabemos que el producto cuña es asociativo, podemos dar fácilmente una base de $\Lambda^k(V^*)$.

Teorema 1.3.19. *Si $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es una base de V^*, entonces*

$$\mathcal{B} = \{\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\Lambda^k(V^*)$.

Demostración. Sea $T \in \Lambda^k(V^*)$, en particular $T \in \mathscr{T}^k(V^*)$, por lo tanto podemos escribir

$$T = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{j_1,\ldots,j_k} \phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_k}, \qquad a_{j_1,\ldots,j_k} \in \mathbb{R}$$

Como T es alternada, entonces $\operatorname{Alt}(T) = T$, por lo tanto:

$$T = \operatorname{Alt}(T) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{j_1,\ldots,j_k} \operatorname{Alt}\left(\phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_k}\right)$$

Esto es igual a

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{j_1,\ldots,j_k} \left(\phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{j_k}\right)$$

a menos de los factoriales, por lo tanto todos los $\{\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} : i_1, \ldots i_k = 1, \ldots, n\}$ generan $\Lambda^k(V^*)$, pero no son linealmente independientes: por la anticonmutatividad de $\wedge$ en 1-formas, tenemos $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$, y $\phi \wedge \phi = 0$. Eliminando redundancias nos quedamos con $\{\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ □

Corolario 1.3.20. $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} \overset{\text{def.}}{=} \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Ejemplo 1.3.21. Sea $V = \mathbb{R}^n$ y consideramos $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ como base de $(\mathbb{R}^n)^*$. Entonces si $T \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$, la podemos escribir de manera única como

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \qquad a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.3.22. Por el teorema anterior, ya sabemos $\Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$ tiene dimensión 1. Sabemos que $\det \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$, por lo tanto si $T \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$, entonces $T = \lambda \det$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

El ejemplo que sigue es muy importante.

Ejemplo 1.3.23. Sean $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*) = (\mathbb{R}^n)^*$. Entonces $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$. Sean $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)(v_1, \ldots, v_k) &= k!\,\mathrm{Alt}(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k) \\
&= \frac{k!}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sg}(\sigma)\,(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sg}(\sigma)\,\phi_1(v_{\sigma(1)}) \ldots \phi_k(v_{\sigma(k)}) \\
&= \begin{vmatrix} \phi_1(v_1) & \ldots & \phi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_k(v_1) & \ldots & \phi_k(v_k) \end{vmatrix} \\
&= \det(\phi_i(v_j))
\end{aligned}$$

En particular, si $\phi_i = dx_i$ para todo i:

- si $k = n$, entonces

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \det \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$$

- si $k < n$, obtenemos el determinante de alguna submatriz. Por ejemplo, si $k = 2$, $n = 3$, y $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ entonces:

$$\begin{aligned}
dy \wedge dz(v, w) &= \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\
dz \wedge dx(v, w) &= \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix} \\
dx \wedge dy(v, w) &= \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

  Observar que esos tres determinantes son las coordenadas del producto vectorial $v \times w$, recordando que

$$v \times w \text{ “=” } \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

  En conclusión,

$$v \times w = (dy \wedge dz(v, w), dz \wedge dx(v, w), dx \wedge dy(v, w))$$

  El producto cuña de formas multilineales efectivamente generaliza el producto vectorial.

Observación 1.3.24. Vemos aquí la utilidad de los factoriales que normalizan la definición de producto cuña. Si no estuvieran, no nos habría quedado el determinante sino $\frac{1}{k!}$ veces el determinante, hecho bastante molesto y contraintuitivo que distanciaría el producto cuña de ser una generalización del producto vectorial usual por tan sólo un factor multiplicativo.

Proposición 1.3.25. *Sea $A : V \to V$ una transformación lineal. Consideremos $A^* : \Lambda^n(V^*) \to \Lambda^n(V^*)$. Entonces $A^*(T) = (\det A)\ T$.*

Explícitamente, para todo $v_1, \ldots, v_n \in V$ se tiene que

$$T(Av_1, \ldots, Av_n) = (\det A)T(v_1, \ldots, v_n)$$

En particular, si $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$ entonces

$$A^*(\phi_1) \wedge \cdots \wedge A^*(\phi_n) = (\det A)\ \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$$

Demostración. Como $\Lambda^n(V^*)$ tiene dimensión uno, entonces $A^*(T) = \lambda T$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos que $\lambda = \det A$.

Sea $B : V \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Consideremos $B^* : \Lambda^n(V^*) \to \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$. Sea $T = B^*(\det)$. Entonces $A^*B^*(\det) = \lambda B^*(\det)$, y por lo tanto

$$(B^*)^{-1}A^*B^*(\det) = \lambda(B^*)^{-1}B^*(\det) = \lambda(BB^{-1})^* = \lambda \det$$

de donde $(BAB^{-1})^*(\det) = \lambda \det$. Evaluando en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, obtenemos que $\lambda = \det(BAB^{-1}) = \det(A)$, terminando la demostración. $\square$

Capítulo 2

Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

En una palabra, las formas diferenciales son integrandos: objetos creados para ser integrados con facilidad. Para $\mathbb{R}^n$ no estaremos consiguiendo nada muy nuevo, pero sólo con las formas diferenciales podremos integrar de manera razonable en *variedades*. Necesitamos pasar primero por este caso más sencillo, no sólo por motivos didácticos sino porque la construcción posterior hace uso de ésta.

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $k \geq 0$, definimos una *k-forma diferencial* en U como una función $\omega : U \to \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ que depende diferenciablemente del punto. Notaremos por $\Omega^k(U)$ al conjunto de las k-formas diferenciales en U.

Más explícitamente, una k-forma diferencial $\omega \in \Omega^k(U)$ se puede escribir de manera única como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{2.1}$$

donde $a_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Seamos más rigurosos y veamos esto con cuidado. Para todo $p \in U$, $\omega(p) \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$. Entonces como $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ es base de $\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$, para todo $p \in U$ podemos escribir

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha^p_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

donde $\alpha^p_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{R}$ (p es un superíndice) son únicos. De esta manera, definimos $a_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$ mediante $a_{i_1,\ldots,i_k}(p) = \alpha^p_{i_1,\ldots,i_k} \quad \forall p \in U$, y pedimos que sean diferenciables.

Seamos aún más rigurosos. ¿Qué significa la ecuación (2.1)? Hay productos de funciones $U \to \mathbb{R}$ por k-formas multilineales y sumas de estos productos. Esto a priori no tiene sentido. Ahora, si consideramos $\delta x_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$, $i_j \in \{1,\ldots,n\} \ \forall j = 1,\ldots,k$ ciertas funciones *constantes* tales que $\delta x_{i_1,\ldots,i_k}(p) = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*) \quad \forall p \in U$, entonces

la siguiente expresión

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}\, \delta x_{i_1,\ldots,i_k}$$

sí tiene sentido: estos son productos y sumas punto a punto de funciones $U \to \mathbb{R}$ por funciones $U \to \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$. En efecto, para cada p tenemos bien definido $(a_{i_1,\ldots,i_k}\, \delta x_{i_1,\ldots,i_k})(p) = a_{i_1,\ldots,i_k}(p)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ siendo éste el producto por escalar del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$.

Distinguir $\delta x_{i_1,\ldots,i_k}$ de $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ no nos aporta demasiado pues la primera es constante de valor la segunda, por lo tanto hacemos un pequeño abuso de notación al notar la k-forma diferencial que en cada punto de U vale la k-forma multilineal *no constante* $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ también mediante $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.

Observación 2.1.2.

- En el caso $k = 0$, como $\Lambda^0((\mathbb{R}^n)^*) = \mathbb{R}$, una 0-forma diferencial es una función diferenciable $U \to \mathbb{R}$. En otras palabras, $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.
- Observar también que $\Omega^k(U) = \{0\}$, para todo $k > n$, pues $\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*) = \{0\}$ para todo $k > n$.
- $\Omega^k(U)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones definidas punto a punto.

De ahora en más y si no hay riesgo de confusión, si decimos una *forma* o una *k-forma* nos estaremos refiriendo a una forma diferencial.

Ejemplo 2.1.3. Una 1-forma diferencial en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

$$\omega = a\, dx + b\, dy + c\, dz$$

donde $a, b, c : U \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Si evaluamos en un punto $p \in U$, tenemos

$$\omega(p) = a(p)\, dx + b(p)\, dy + c(p)\, dz : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

una funcional lineal. Ahora evaluamos en un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$\omega(p)(v) = a(p)\, dx(v) + b(p)\, dy(v) + c(p)\, dz(v)$$

donde $dx(v)$, $dy(v)$, $dz(v)$ son la primera, segunda y tercera coordenadas de v respectivamente.

Ejemplo 2.1.4. Hagamos lo mismo para una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Una 2-forma se puede escribir como

$$\omega = a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy$$

donde $a, b, c : U \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Si evaluamos en $p \in U$ tenemos:

$$\omega(p) = a(p)\, dy \wedge dz + b(p)\, dz \wedge dx + c(p)\, dx \wedge dy : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Evaluando en dos vectores $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega(p)(v, w) &= a(p)\, dy \wedge dz(v, w) + b(p)\, dz \wedge dx(v, w) + c(p)\, dx \wedge dy(v, w) \\ &= a(p) \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + b(p) \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix} + c(p) \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Escribiendo $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X = (a, b, c)$ la fórmula anterior queda:

$$\omega(p)(v, w) = X(p) \cdot v \times w$$

Ejemplo 2.1.5. Si $\omega \in \Omega^3(U)$, entonces se escribe de manera única como

$$\omega = a\, dx \wedge dy \wedge dz$$

donde $a : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

Terminamos con un ejercicio (más bien una observación en un lenguaje apropiado) para el lector con conocimientos básicos de teoría de módulos:

Ejercicio 2.1.6. Verificar que $\Omega^k(U)$ es un $C^\infty(U)$-módulo libre de rango $\binom{n}{k}$.

2.2. Producto exterior

En esta sección aprenderemos a *acuñar* formas diferenciales. Ya sabemos que podemos sumar formas y multiplicarlas por escalares, ahora definiremos su producto, llamado *producto cuña* o producto exterior, igual que con las formas multilineales.

Definición 2.2.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^r(U)$, con $k, r \geq 1$. Definimos $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+r}(U)$ punto a punto, es decir:

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p) \in \Lambda^{k+r}((\mathbb{R}^n)^*)$$

Observar que el producto cuña de la derecha es el producto cuña de formas multilineales ya definido.

Si $k = 0$, $f \in \Omega^0(U)$, definimos $f \wedge \omega = \omega \wedge f = f\omega$.

Ejemplo 2.2.2. Hagamos el producto cuña de una 1-forma en $\mathbb{R}^3$ con una 2-forma en $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(xyz\, dx) \wedge (y\, dz \wedge dx + z\, dy \wedge dz) &= xy^2 z\, dx \wedge dz \wedge dx + xyz^2\, dx \wedge dy \wedge dz \\ &= xyz^2\, dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

recordando que $dx \wedge dx = 0$.

La siguiente proposición se deduce inmediatamente de su análoga para formas multilineales.

Proposición 2.2.3. *El producto cuña tiene las siguientes propiedades: para todo $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^r(U)$, $\theta \in \Omega^l(U)$, $a \in \mathbb{R}$:*

- $\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta$ *(propiedad asociativa)*
- $(\omega + \eta) \wedge \theta = \omega \wedge \theta + \eta \wedge \theta$ *(propiedad distributiva)*
- $\omega \wedge (\eta + \theta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta$ *(propiedad distributiva)*
- $(a\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (a\eta) = a(\omega \wedge \eta)$ *(propiedad homogénea)*
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kr}\, \eta \wedge \omega$

2.3. Derivada exterior

Definición 2.3.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $f \in \Omega^0(U)$, es decir, si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, definimos su *derivada exterior* $df \in \Omega^1(U)$ como

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Observación 2.3.2. Esto no es nada más que el diferencial de f, es decir, $df(p) = df_p$ para todo $p \in U$. Hagamos la prueba para $n = 3$ para ahorrar índices. Sea $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Por un lado, el diferencial es:

$$df_p(v) = \nabla f(p) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\, v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\, v_3$$

Por otro lado, la derivada exterior es:

$$\begin{aligned} df(p)(v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)\, dx(v) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\, dy(v) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\, dz(v) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\, v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\, v_3 \end{aligned}$$

y por lo tanto $df(p)(v) = df_p(v)$.

Definición 2.3.3. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\omega \in \Omega^k(U)$. Podemos escribir de forma única

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

con $a_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Definimos la *derivada exterior* de ω como $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ tal que:

$$\begin{aligned} d\omega &\overset{\text{def.}}{=} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} da_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{j} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

De esta forma, para todo $k \ge 0$ está definido $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$.

Observación 2.3.4. Si $\omega \in \Omega^n(U)$, entonces $d\omega = 0$, pues $d\omega \in \Omega^{n+1}(U) = \{0\}$.

Teorema 2.3.5. *Sean $r, k \ge 0$. El operador d tiene las siguientes propiedades:*

- $d(a\omega + \eta) = a\, d\omega + d\eta$, *para todo* $\omega, \eta \in \Omega^r(U), a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$-linealidad),
- $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^r\, \omega \wedge d\eta$ *para todo* $\omega \in \Omega^r(U), \eta \in \Omega^k(U)$,
- $d^2 = d \circ d = 0$.

Demostración. Verifiquemos el tercer ítem. Sea

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{I} a_I\, dx_I$$

El subíndice I del término de la derecha es un *multi-índice*. Escribimos $I = (i_1, \ldots, i_k)$ para cada secuencia estrictamente creciente de índices.

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left(\sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_I$$

Por lo tanto

$$d(d\omega) = \sum_I \left(\sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i \right) \wedge dx_I$$

Pero usando que:

$$\frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i} \qquad dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$$

los términos se anulan uno a uno, de donde $d(d\omega) = 0$. □

Observación 2.3.6. Si $\omega \in \Omega^0(U)$, es decir, $\omega = f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, entonces aplicando la segunda propiedad:

$$d(f\eta) = d(f \wedge \eta) = df \wedge \eta + f d\eta$$

para todo $\eta \in \Omega^k(U)$.

2.4. Pull-back

Definición 2.4.1. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos del espacio euclídeo y $f : U \to V$ un mapa diferenciable. Definimos la aplicación f^*: lleva k-formas diferenciales en V en k-formas (diferenciales[1]) en U tal que, si $\omega \in \Omega^k(V)$, $p \in U$ y $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$f^*(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k))$$

Para $k = 0$ definimos $f^*(g) = g \circ f$.

Decimos que $f^*(\omega)$ es el *pull-back* de ω por f.

Observación 2.4.2. Esto no es nada más que el pull-back lineal de $\omega(f(p)) \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ por $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es decir:

$$f^*(\omega)(p) = df_p^*(\omega(f(p)))$$

El nombre *pull-back* se justifica de la definición: este mapa "tira para atrás" k-formas en V hacia k-formas en U.

Proposición 2.4.3. *Sean $f : U \to V$, $g : V \to W$ mapas diferenciables entre abiertos del espacio euclídeo. La aplicación f^* tiene las siguientes propiedades: para todo $\omega \in \Omega^k(V)$, $\eta \in \Omega^r(V)$:*

[1] A priori no sabemos que el mapa así como está definido efectivamente tenga $\Omega^k(U)$ como codominio: no sabemos que produzca k-formas *diferenciales*, sólo que produce k-formas en U. Sin embargo esto es cierto a posteriori, lo demostraremos en el corolario 2.4.8: esto justifica el paréntesis.

- *f^* es lineal,*
- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$,
- $(\mathrm{id}_U)^* = \mathrm{id}_{\Omega^k(U)}$,
- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,
- *Si f es un difeomorfismo entonces f^* es un isomorfismo lineal, y verifica*

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Las propiedades tercera y cuarta nos dicen que la operación $*$ es un *functor contravariante.*

Observación 2.4.4. Aplicando la segunda propiedad a una 0-forma, obtenemos:

$$f^*(g\omega) = f^*(g \wedge \omega) = f^*(g) \wedge f^*(\omega) = (g \circ f) \wedge f^*(\omega) = (g \circ f) f^*(\omega)$$

Lema 2.4.5. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to V$ mapa diferenciable. Notemos $x_1, \ldots, x_n$ las coordenadas en $\mathbb{R}^n$, $y_1, \ldots, y_m$ las coordenadas en $\mathbb{R}^m$. Entonces:*

$$f^*(dy_i) = d(f_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j, \qquad \forall i = 1, \ldots, m$$

Demostración. Sea $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $f^*(dy_i)(p)(v) = d(f_i)(p)(v)$. Por un lado tenemos:

$$d(f_i)(p)(v) = d(f_i)_p(v)$$

y por el otro:

$$\begin{aligned} f^*(dy_i)(p)(v) = (dy_i)(f(p))(df_p(v)) &= dy_i(df_p(v)) \\ &= dy_i(d(f_1)_p(v), \ldots, d(f_m)_p(v)) \\ &= d(f_i)_p(v) \end{aligned}$$

□

Observación 2.4.6. Usamos en la demostración el hecho que dy_i es *constante* como forma diferencial pues al evaluarla en cualquier punto, obtenemos la forma multilineal dy_i.

Proposición 2.4.7. *Sea $\omega \in \Omega^k(V)$ tal que*

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1, \ldots, i_k}\, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$

entonces su pull-back por f es tal que

$$f^*(\omega) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} (a_{i_1, \ldots, i_k} \circ f)\, d(f_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f_{i_k})$$

Demostración. Basta combinar el lema anterior con la linealidad de f^*, la regla $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$ y el hecho que $f^*(g\omega) = (g \circ f) f^*(\omega)$. □

Corolario 2.4.8. *Si $\omega \in \Omega^k(V)$, entonces $f^*(\omega) \in \Omega^k(U)$, por lo tanto restringiendo el pull-back a las k-formas* diferenciales *en V, diremos que $f^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$.*

Demostración. Basta observar la proposición anterior, que f es diferenciable y sus derivadas parciales son diferenciables, y que $a_{i_1,\dots,i_k} \circ f$ son funciones diferenciables. □

Ejemplo 2.4.9. Consideremos el difeomorfismo de las coordenadas polares:

$$U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\} \qquad V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

y $f = (f_1, f_2) : U \to V$ definida por $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Tenemos que:

$$f^*(dx)(r, \theta) = d(f_1)(r, \theta) = \cos\theta\, dr - r\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$f^*(dy)(r, \theta) = d(f_2)(r, \theta) = \operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

Entonces si $\omega \in \Omega^1(V)$ es tal que $\omega = a\, dx + b\, dy$:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= (a \circ f)\, d(f_1) + (b \circ f)\, d(f_2) \\ &= a(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta\, dr - r\operatorname{sen}\theta\, d\theta) + b(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \end{aligned}$$

Para hacer el cálculo de pull-backs esto es muy cómodo, pues basta componer a y b con f y realizar en ω la sustitución:

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta \quad &\Rightarrow \quad dx = \cos\theta\, dr - r\operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \quad &\Rightarrow \quad dy = \operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Proposición 2.4.10. *Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to V$ un mapa diferenciable. Sea $\omega \in \Omega^n(V)$. Entonces $f^*(\omega)(p) = (\det df_p)\ \omega(f(p))$.*

Explícitamente, si $a : V \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces

$$f^*(a\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (a \circ f)\ \det(df)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Demostración. Basta combinar la proposición 1.3.25 con la observación 2.4.2. □

Observación 2.4.11. Esta proposición nos dice explícitamente cómo luce el pull-back de una n-forma por una función diferenciable entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. El lector atento quizás haya reconocido la forma del teorema de *cambio de variable* para integrales múltiples y difeomorfismos... Exploraremos esta conexión más tarde.

Teorema 2.4.12. *La derivada exterior y el pull-back conmutan. Esto es, si $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos, y $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to V$ es un mapa diferenciable, entonces $d \circ f^* = f^* \circ d$, es decir:*

$$d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega^k(V)$$

Demostración. Lo haremos en tres pasos. Primero lo probaremos para 0-formas, luego para $\omega = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$, y luego aplicaremos la linealidad de d y de f^* para deducirlo en el caso general.

- Caso $k = 0$. Sea $a \in \Omega^0(V) = C^\infty(V)$.

$$\begin{aligned} f^*(da) &= f^*\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial a}{\partial y_j}\, dy_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f\right) f^*(dy_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f\right) d(f_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f\right) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f\right) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) dx_i \overset{\text{r.c.}}{=} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial (a \circ f)}{\partial x_i}\right) dx_i \\ &= d(a \circ f) = d(f^*(a)) \end{aligned}$$

- Caso $\omega = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$, con $1 \leq k \leq m$, $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$.

$$\begin{aligned} d(f^*(\omega)) &= d(f^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k})) = d\left(f^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dy_{i_k})\right) \\ &= d(d(f_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f_{i_k})) = 0 \end{aligned}$$

  La última igualdad se deduce aplicando iteradamente la regla $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k\, \omega \wedge d\eta$ y la relación $d^2 = 0$.

  Por otro lado $d\omega = 0$, luego $f^*(d\omega) = 0$.

- Si $\omega \in \Omega^k(V)$, entonces

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} a_{i_1, \ldots, i_k}\, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$

  Por la linealidad de f^* y de d, basta probarlo para $\omega = a\eta = a \wedge \eta$ con $\eta = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$. Como $d\eta = 0$ y $f^*(d\eta) = d(f^*(\eta)) = 0$:

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) &= f^*(d(a \wedge \eta)) = f^*(da \wedge \eta + a \wedge d\eta) \\ &= f^*(da) \wedge f^*(\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f^*(\omega)) &= d(f^*(a \wedge \eta)) = d(f^*(a) \wedge f^*(\eta)) \\ &= d(f^*(a)) \wedge f^*(\eta) + f^*(a) \wedge d(f^*(\eta)) \\ &= d(f^*(a)) \wedge f^*(\eta) \end{aligned}$$

  Pero ya probamos que $f^*(da) = d(f^*(a))$, de donde $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$. $\square$

2.5. Formas y campos en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 2.5.1. Verificar las siguientes fórmulas (es un cálculo directo partiendo de la definición):

$$d(a\, dx + b\, dy + c\, dz) = \left(\tfrac{\partial c}{\partial y} - \tfrac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\tfrac{\partial a}{\partial z} - \tfrac{\partial c}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\tfrac{\partial b}{\partial x} - \tfrac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$d(a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy) = \left(\tfrac{\partial a}{\partial x} + \tfrac{\partial b}{\partial y} + \tfrac{\partial c}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Definición 2.5.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Un *campo vectorial* es una función diferenciable $F : U \to \mathbb{R}^3$. Un *campo escalar* es una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$.

Notación. Notaremos $C^\infty(U)$ al conjunto de los campos escalares en U, y $\chi(U)$ al conjunto de los campos vectoriales en U.

Vamos a ver que hay una correspondencia biunívoca entre formas y campos en $\mathbb{R}^3$, y entre la derivada exterior y ciertos operadores clásicos (como el *gradiente*).

Si $\omega \in \Omega^0(U)$, entonces ω es un campo escalar.

Si $\omega \in \Omega^1(U)$, entonces $\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$, donde $a, b, c : U \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Le podemos asociar el campo vectorial $X = (a, b, c)$.

Si $\omega \in \Omega^2(U)$, entonces $\omega = a\,dy \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$, con $a, b, c : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Le podemos asociar el campo vectorial $X = (a, b, c)$.

Si $\omega \in \Omega^3(U)$, entonces $\omega = a\,dx \wedge dy \wedge dz$, con $a : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Le podemos asociar el campo escalar a.

Recíprocamente, si $f \in C^\infty(U)$ entonces $f \in \Omega^0(U)$.

Si $F = (F_1, F_2, F_3) \in \chi(U)$, le asociamos $\omega_F^1 \in \Omega^1(U)$

$$\omega_F^1 = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

Si $F = (F_1, F_2, F_3) \in \chi(U)$, le asociamos $\omega_F^2 \in \Omega^2(U)$:

$$\omega_F^2 = F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy$$

Si $f \in C^\infty(U)$, le asociamos $\omega_f^3 \in \Omega^3(U)$:

$$\omega_f^3 = f\,dx \wedge dy \wedge dz$$

Claramente esta correspondencia es biunívoca.

Definición 2.5.3. Sea $f \in C^\infty(U)$, $F \in \chi(U)$. Los *operadores clásicos* son:

- El *gradiente*, $\nabla f \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \in \chi(U)$,
- El *rotacional*, $\operatorname{rot} F \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \in \chi(U)$,
- La *divergencia*, $\operatorname{div} F \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \in C^\infty(U)$.
- El *laplaciano*, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \in C^\infty(U)$.

Si escribimos simbólicamente $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, entonces obtenemos las igualdades simbólicas:

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F \qquad \operatorname{div} F = \nabla \cdot F \qquad \Delta f = \nabla \cdot \nabla f$$

Observar que la última igualdad es equivalente con $\Delta = \operatorname{div} \circ \nabla$. A veces se emplea también la notación ∇^2 para el laplaciano.

Observación 2.5.4. La derivada exterior se relaciona con el gradiente, el rotacional y la divergencia mediante las fórmulas

$$df = \omega^1_{\nabla f} \qquad d(\omega^1_F) = \omega^2_{\text{rot } F} \qquad d(\omega^2_F) = \omega^3_{\text{div } F}$$

La primera está clara de la definición, y las otras dos se deducen del ejercicio al comienzo de la sección.

Resumimos esta correspondencia de campos y formas, y de derivada exterior con gradiente, rotacional y divergencia mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(U) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\simeq"', "\mathrm{id}"] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\simeq"', "\omega^1_{(\,)}"] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\simeq"', "\omega^2_{(\,)}"] & C^\infty(U) \arrow[d, "\simeq"', "\omega^3_{(\,)}"] \\
\Omega^0(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^3(U)
\end{tikzcd}$$

Corolario 2.5.5. *Sea $f \in C^\infty(U)$, $F \in \mathfrak{X}(U)$. Como $d^2 = 0$, deducimos:*

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = 0 \qquad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\ F) = 0$$

2.6. Formas cerradas y exactas

Definición 2.6.1. Sea $\omega \in \Omega^k(U)$. Decimos que es *cerrada* si $d\omega = 0$; que es *exacta* si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $d\eta = \omega$, en cuyo caso η es un *potencial* de ω.

Como $d^2 = 0$, toda forma exacta es cerrada. El recíproco no es en general válido. El estudio de "por cuánto" una forma cerrada no es exacta es objeto de estudio de la *cohomología de De Rham*.

Ejemplo 2.6.2. Sea $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y definimos $\omega \in \Omega^1(U)$ mediante

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

ω es cerrada:

$$\begin{aligned}
d\omega &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) dx \wedge dy \\
&= \frac{x^2+y^2-x(2x)+x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pero no es exacta. Podríamos demostrarlo directamente pero lo haremos en el ejemplo 3.2.4, usando integrales de línea.

Éste es un ejemplo clásico que vale la pena recordar. A veces ω se dice *forma de ángulo* y se escribe $\omega = d\theta$, en virtud del siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.6.3. Sea $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, $f : U \to V$ el cambio a coordenadas polares, es decir

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Como f es un difeomorfismo, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ define $r, \theta : V \to \mathbb{R}$ como funciones de x e y. Probar que $d\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, justificando el nombre *forma de ángulo*.

Observación 2.6.4. Si definimos $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, entonces definiendo $\omega \in \Omega^1(V)$ como antes, resulta ser exacta. Tenemos que $\omega = d\eta$ definiendo $\eta = f : V \to \mathbb{R}$ como $f(x,y) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Concluimos entonces que el dominio de una forma tiene una importancia suprema en su "exactitud". Enunciaremos ahora un criterio importante para decidir si una forma es exacta.

Definición 2.6.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Dos curvas cerradas $\alpha, \gamma : S^1 \to U$ son *homotópicas* si existe un mapa $F : S^1 \times [0,1] \to U$ diferenciable tal que:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= \alpha(x) \quad \forall x \in S^1 \\ F(x,1) &= \gamma(x) \quad \forall x \in S^1 \end{aligned}$$

Podemos pensar el segundo parámetro como el *tiempo*, por lo tanto dos curvas son homotópicas si es posible deformar diferenciablemente la una en la otra sin salirse de U.

Definición 2.6.6. Una curva diferenciable $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se dice *cerrada* si $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definición 2.6.7. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice *simplemente conexo* si es conexo y toda curva cerrada es homotópica a una curva constante (i.e. $\gamma : S^1 \to U$ es constante si existe $p \in U$ tal que $\gamma(x) = p$ para todo $x \in S^1$).

Un conjunto es simplemente conexo si toda curva cerrada se puede contraer a un punto diferenciablemente. Intuitivamente, en $\mathbb{R}^2$ simplemente conexo significa *que no tiene agujeros*. Observar que esto no es cierto en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ *es* simplemente conexo, pero "tiene un agujero".

Definición 2.6.8. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice *contráctil* si existe un mapa diferenciable $F : U \times [0,1] \to U$ tal que:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= x \quad \forall x \in U \\ F(x,1) &= p \quad \forall x \in U \end{aligned}$$

para algún $p \in U$ fijo. (Decimos que la identidad es *null-homotópica*, esto es, que la identidad es *homotópica a un punto*, llegando a una definición más general de homotopía que la dada antes).

Ejercicio 2.6.9. Verificar que los conjuntos *con forma de estrella* son contráctiles. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella si existe $p_0 \in U$ (el "centro") tal que para todo $p \in U$ se cumple que el segmento que une p con p_0 está en U, es decir si

$$\{tp + (1-t)p_0 : t \in [0,1]\} \subset U$$

Intuitivamente, un espacio es contráctil si puede ser diferenciablemente *contraído a un punto*. Siguiendo con el ejemplo anterior, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ sería simplemente conexo pero no contráctil. La recíproca siempre vale: si un espacio es contráctil entonces es simplemente conexo. Esta condición más fuerte nos permite enunciar el siguiente

Lema de Poincaré. *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto contráctil, entonces toda k-forma cerrada $\omega \in \Omega^k(U)$ es exacta, para todo $k > 0$.*

Corolario 2.6.10. *Toda forma cerrada $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ es exacta, para todo $n > 0$, $k > 0$.*

Lo hemos enunciado en su máxima generalidad: observemos qué ocurre en dimensión dos. Lo que pasa es que no precisamos la contractibilidad, en este caso basta con la conexión simple. Obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.6.11. *Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto simplemente conexo, entonces toda 1-forma cerrada $\omega \in \Omega^1(U)$ es exacta.*

Lo reenunciaremos en el teorema 6.9.7, donde lo demostraremos con todo rigor (lo cual no haremos con el Lema de Poincaré general: ver [GP], por ejemplo).

Ejemplo 2.6.12. Si definimos $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ y $\omega \in \Omega^1(V)$ es la forma del ejemplo 2.6.2, entonces por el lema de Poincaré es exacta (resta ver que V es un abierto simplemente conexo, pero esto está geométricamente claro).

Capítulo 3

Integrales de línea

3.1. Definiciones

Definición 3.1.1.

- Una *curva (parametrizada) diferenciable* es una función diferenciable $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.
- Si $\alpha(a) = \alpha(b)$, decimos que α es *cerrada*.
- Decimos que $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es *diferenciable a trozos* si es continua y además existen $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$ de modo tal que $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sea diferenciable para todo $i = 0, \ldots, n-1$.
- Sean $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\beta : [b, c] \to \mathbb{R}^3$ diferenciables a trozos tales que $\alpha(b) = \beta(b)$. Definimos su *concatenación*, $\alpha\beta : [a, c] \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \beta(t) & \text{si } t \in [b, c] \end{cases}$$

- Sean $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ diferenciables. Decimos que β es *reparametrizada* de α si existe $\sigma : [a, b] \to [c, d]$ biyectiva tal que $\beta \circ \sigma = \alpha$ y $\sigma'(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Decimos que σ es una *reparametrización*.
- Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ diferenciable. Definimos $-\alpha : [-b, -a] \to \mathbb{R}^3$ tal que $-\alpha(t) = \alpha(-t)$.

Ejercicio 3.1.2. Probar que la relación *ser reparametrizada de* es de equivalencia.

Observación 3.1.3. En el caso de una reparametrización: al ser σ biyectiva, resulta que α y β tienen la misma traza, C, tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & C & \\ {[a,b]} \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\sigma"'] & & {[c,d]} \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Observación 3.1.4. La curva $-\alpha$ tiene la misma traza que α, pero la recorre en sentido contrario.

Definición 3.1.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $\omega \in \Omega^1(U)$, $\alpha : [a,b] \to U$ una curva diferenciable. Si $\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$, $a, b, c : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables; y $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definimos la *integral de línea* de ω a través de α como:

$$\int_\alpha \omega \overset{\text{def.}}{=} \int_a^b \big(a(\alpha(t))\,x'(t) + b(\alpha(t))\,y'(t) + c(\alpha(t))\,z'(t)\big)\,dt$$

Observación 3.1.6. Si definimos el campo $F = (a, b, c)$ la anterior definición nos queda en:

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt$$

lo cual motiva la siguiente

Definición 3.1.7. Sea $F = (a, b, c) : U \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, definimos la *integral de línea* de F a través de α, también llamada la *circulación de* F a lo largo de α, como:

$$\int_\alpha F = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt$$

Observación 3.1.8. Por la observación anterior, tenemos $\int_\alpha F = \int_\alpha \omega_F^1$.

Proposición 3.1.9. *Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $\alpha : [a,b] \to U$, $\beta : [c,d] \to U$ diferenciables, β reparametrizada de α, $\omega \in \Omega^1(U)$. Entonces*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

En otras palabras, la integral de 1-formas en curvas no depende de cómo se parametriza la curva.

Demostración. Sea F el campo asociado a ω, $\sigma : [a,b] \to [c,d]$ la reparametrización de α.

$$\begin{aligned}\int_\beta \omega = \int_\beta F &= \int_c^d F(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\,dt \\ &\overset{\text{c.v}}{=} \int_a^b F(\beta(\sigma(t))) \cdot (\beta'(\sigma(t))\,\sigma'(t))\,dt \\ &\overset{\text{r.c.}}{=} \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt = \int_\alpha \omega\end{aligned}$$

□

Corolario 3.1.10. *No perdemos generalidad si suponemos que una curva α está parametrizada de modo tal que $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.*

Generalizamos la definición de integral de línea a curvas diferenciables a trozos.

Definición 3.1.11. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $\omega \in \Omega^1(U)$, α diferenciable a trozos tal que $\alpha : [a,b] \to U$ con $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$ de modo tal que $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sea diferenciable para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Entonces:

$$\int_\alpha \omega \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}} \omega$$

Ejercicio 3.1.12. Probar que

- $\int_{-\alpha} \omega = -\int_\alpha \omega$
- $\int_{\alpha\beta} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$

3.2. Relación con formas cerradas y exactas

Teorema 3.2.1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $\omega \in \Omega^1(U)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\int_\alpha \omega$ sólo depende de los extremos de α, para toda $\alpha : [a,b] \to U$ curva diferenciable a trozos.*
2. *$\int_\alpha \omega = 0$ para toda curva cerrada $\alpha : [a,b] \to U$ diferenciable a trozos.*
3. *ω es exacta.*

Demostración. Haremos la demostración para curvas diferenciables (no a trozos). ($1 \Rightarrow 2$) Sea $\alpha : [a,b] \to U$ una curva cerrada diferenciable. Definimos $\gamma : [a,b] \to U$ mediante $\gamma(t) = \alpha(a) = \alpha(b)$, para todo $t \in [a,b]$ y sea F el campo asociado a ω. Como α y γ tienen los mismos extremos, entonces

$$\int_\alpha \omega = \int_\gamma \omega = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = 0$$

pues $\gamma'(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

($2 \Rightarrow 1$) Sean $\alpha : [a,b] \to U$ y $\beta : [\bar{a}, \bar{b}] \to U$ curvas diferenciables tales que $\alpha(a) = \beta(\bar{a})$, $\alpha(b) = \beta(\bar{b})$ (i.e. α y β tienen los mismos extremos). Queremos ver que $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$.

Sea $\bar{\beta}$ reparametrizada de β tal que $\bar{\beta} : [-c, -b] \to U$ para un cierto c. Entonces $-\bar{\beta} : [b, c] \to U$ y $(-\bar{\beta})(b) = \bar{\beta}(-c) = \beta(\bar{b}) = \alpha(b)$. Podemos entonces considerar $\alpha(-\bar{\beta})$ que es una curva cerrada en U. Tenemos pues:

$$0 = \int_{\alpha(-\bar{\beta})} \omega = \int_\alpha \omega + \int_{-\bar{\beta}} \omega = \int_\alpha \omega - \int_{\bar{\beta}} \omega = \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega$$

($3 \Rightarrow 1$) Sea $\alpha : [a,b] \to U$. Como ω es exacta, existe $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$. Sabemos que $df = \omega^1_{\nabla f}$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_\alpha \omega &= \int_\alpha df = \int_\alpha \omega^1_{\nabla f} = \int_\alpha \nabla f = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt \\ &\overset{\text{r.c.}}{=} \int_a^b (f \circ \alpha)'(t)\, dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_\alpha \omega$ depende sólo de los extremos de α.

($1 \Rightarrow 3$) Sea $p_0 \in U$ fijo. Definimos $f : U \to \mathbb{R}$ como $f(p) = \int_\alpha \omega$, donde α es una curva diferenciable en U que une p_0 con p. Esto está bien definido porque $\int_\alpha \omega$ es independiente del camino, por hipótesis; en otras palabras, $f(p)$ no depende de qué α utilicemos para unir p_0 con p. Queremos ver que $df = \omega$, es decir, si $\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$, tenemos que probar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

Probaremos que $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = P(p)$ para todo $p \in U$, las otras son análogas. Si fijamos $p \in U$, por definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te_1) - f(p)}{t}$$

Calculemos $f(p + te_1)$. Definimos $\gamma_t : [0, t] \to U$ mediante $\gamma_t(\tau) = p + \tau e_1$. Sea α una curva que une p_0 con p, y podemos suponer que está parametrizada de tal forma que $\alpha\gamma_t$ está definida. Tenemos entonces:

$$f(p + te_1) = \int_{\alpha\gamma_t} \omega = \int_\alpha \omega + \int_{\gamma_t} \omega$$

Sea $F = (P, Q, R)$ el campo asociado a ω. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{f(p + te_1) - f(p)}{t} &= \frac{1}{t} \int_{\gamma_t} \omega = \frac{1}{t} \int_{\gamma_t} F = \frac{1}{t} \int_0^t F(\gamma_t(\tau)) \cdot \gamma_t'(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t F(\gamma_t(\tau)) \cdot e_1\, d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t P(\gamma_t(\tau))\, d\tau \\
&= \frac{1}{t}\, t\, P(\gamma_t(\bar{\tau})) = P(\gamma_t(\bar{\tau})) \\
&= P(p + \bar{\tau}\, e_1) \overset{t \to 0}{\to} P(p)
\end{aligned}$$

habiendo aplicado el teorema del valor medio para integrales con $\bar{\tau} \in [0, t]$. Tenemos entonces que $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = P(p)$, para todo $p \in U$. Hacemos lo mismo con las otras derivadas y probamos que $\nabla f = F$, o equivalentemente, $df = \omega$. □

Definición 3.2.2. Si un campo F verifica el teorema anterior, entonces decimos que es *de gradientes* o *conservativo*.

Observación 3.2.3. Decir que un campo es de gradientes es equivalente a decir que su 1-forma asociada es exacta. La palabra *conservativo* viene de la física, donde el campo F es una fuerza.

Ejemplo 3.2.4. Sea $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y definimos $\omega \in \Omega^1(U)$ mediante

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

Ya sabemos que ω es cerrada (ejemplo 2.6.2), y estamos ahora en condiciones de demostrar que no es exacta. Sea $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ el campo asociado a ω, y $\alpha : [0, 2\pi] \to U$, $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \omega &= \int_\alpha F = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Entonces por el teorema anterior ω no es exacta.

Observación 3.2.5. Al final de esta Parte I veremos como aplicación de un resultado más general que la integral de la forma de ángulo en cualquier curva cerrada que rodea al origen y recorrida una vez debe dar también 2π.

Esta forma nos permite probar lo siguiente con facilidad:

Ejemplo 3.2.6. $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no son difeomorfos. Supongamos que existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ difeomorfismo. Sea $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ la forma de ángulo del ejercicio anterior. Acabamos de ver que no es exacta. Sin embargo, $f^*(\omega) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ es exacta por el lema de Poincaré. Esto es absurdo: $f^*(\omega)$ exacta implicaría ω exacta, pues f es un difeomorfismo. Esto hay que probarlo, no es difícil: el pull-back por una función diferenciable lleva formas exactas en exactas, pues la derivada exterior y el pull-back conmutan. Si además f es un difeomorfismo, aplicamos este razonamiento a f^{-1} y deducimos que si $f^*(\omega)$ es exacta, entonces ω es exacta.

Capítulo 4

Variedades diferenciables

Nos proponemos definir *variedad diferenciable*. Para ir teniendo una idea, queremos que las superficies en $\mathbb{R}^3$, y las curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ caigan dentro de la definición de variedad, bajo ciertas hipótesis de regularidad.

Queremos que una variedad sea "localmente euclídea", es decir que en el entorno de cada punto "se parezca" a un espacio euclídeo fijo (por ejemplo, para una superficie, éste será $\mathbb{R}^2$; y para una curva, $\mathbb{R}$). Empecemos con algunas definiciones.

4.1. Definiciones

Definición 4.1.1. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$. Decimos que M es una *variedad diferenciable de dimensión n* o una *n-variedad* (en inglés: *n-manifold*) si para todo $p \in M$ existe un difeomorfismo $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to W \cap M$, donde $W \subset \mathbb{R}^k$ es un entorno abierto de p y $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto (ver figura 4.1).

Definición 4.1.2. Sea M una variedad diferenciable. Dado $V \subset M$, decimos que V es un *abierto relativo en M* (con la topología relativa de $\mathbb{R}^k$) si existe $W \subset \mathbb{R}^k$ abierto tal que $V = W \cap M$. Decimos entonces que V es un *entorno abierto relativo de p en M* si además $p \in V$.

Observación 4.1.3. Con la definición anterior, la definición de variedad queda así: Decimos que M es una *variedad diferenciable de dimensión n* si para todo $p \in M$ existe un difeomorfismo $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset M$, donde V es un entorno abierto relativo de p en M.

Observación 4.1.4. En el resto del texto diremos simplemente *variedad* para referirnos a *variedad diferenciable*. El nombre completo es justificado por la existencia de variedades más generales, las variedades *topológicas*. Una n-variedad topológica es un espacio de Hausdorff X con base numerable tal que todo punto $x \in X$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ (ésta es la definición de [Mu2], sin embargo otros autores como [ST] omiten pedir que el espacio tenga base numerable). Lo importante de la diferenciabilidad (es decir, que usemos difeomorfismos y no homeomorfismos para caracterizar la semajanza local con un espacio euclídeo) es que nos permite hacer cálculo, lo cual nos es de gran interés.

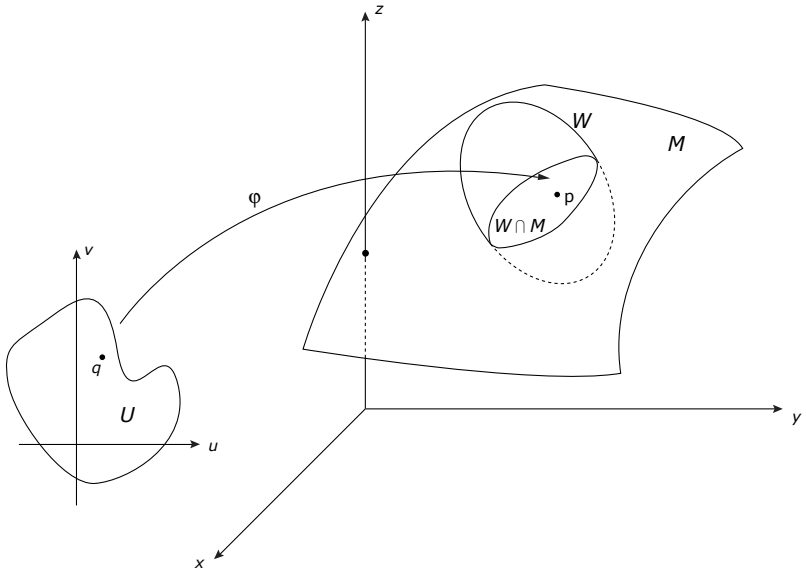


Figura 4.1: Variedad de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$

Definición 4.1.5. Sean $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad de dimensión n, $p \in M$, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset M$ un difeomorfismo como en la definición de variedad. Entonces:

- El mapa φ se llama *parametrización de* V o *carta local*.
- El mapa $\varphi^{-1} : V \subset M \to U \subset \mathbb{R}^n$ se llama *sistema de coordenadas en* V.
- El entorno $\varphi(U)$ se llama *entorno coordenado de* φ.
- Un *atlas* $\mathcal{A}$ es un conjunto de parametrizaciones que cubren la variedad, es decir, un conjunto de parametrizaciones tales que la unión de sus entornos coordenados da M: $M = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \mathrm{Im}(\varphi)$.
- Si tenemos $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \subset M$, $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset M$ dos parametrizaciones tales que $\varphi(U) = \psi(V)$, entonces el mapa $f = \psi^{-1} \circ \varphi : U \to V$ se llama *cambio de coordenadas*.
- Decimos que la variedad M tiene *codimensión* $k - n$.

Observación 4.1.6. El cambio de coordenadas es un difeomorfismo por ser compuesta de difeomorfismos.

Definición 4.1.7. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie regular* (o sencillamente *superficie*) si es una variedad de dimensión 2.

Pedimos $S \subset \mathbb{R}^3$ para que la definición vaya de la mano con la intuición geométrica. Podemos tener variedades de dimensión 2 en $\mathbb{R}^2$ (abiertos de $\mathbb{R}^2$, como ya veremos), o variedades de dimensión 2 que *no podemos* tener en $\mathbb{R}^3$. Intuitivamente podríamos pensar que las variedades de dimensión 2 se pueden tener siempre en $\mathbb{R}^3$, pero eso es falso. Por ejemplo, la botella de Klein (ver figura

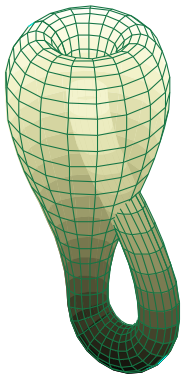


Figura 4.2: Botella de Klein inmersa en $\mathbb{R}^3$

4.2) es una variedad de dimensión 2 que no puede ser inmersa en $\mathbb{R}^3$, recién en $\mathbb{R}^4$ (si no, hay autointersecciones). El teorema de inmersión de Whitney nos dice que podemos "sumergir" en algún sentido cualquier m-variedad en $\mathbb{R}^{2m+1}$ (para más información, ver [GP], capítulo 1, §8). Por ello uno puede estudiar las propiedades abstractas, intrínsecas de las variedades, sin pensarlas inmersas en ningún espacio euclídeo.

Observación 4.1.8. Nos gustaría definir *curva regular* como un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^k$, $k = 2, 3$ que es una variedad de dimensión 1. Sin embargo **no** lo haremos, porque en la geometría de las curvas se usa esa nomenclatura para una curva con hipótesis diferentes. Una variedad de dimensión 1 es en particular una curva que no se autointersecta, mientras que las curvas regulares podrán autointersectarse.

Una última definición que nos será útil en el futuro es la de *conexión*:

Definición 4.1.9. Una variedad M es *conexa* si no existen $A, B \subset M$ abiertos relativos disjuntos no vacíos tales que $M = A \cup B$ (es decir, si es conexa como espacio topológico con la topología relativa del espacio euclídeo en donde está inmersa).

Geométricamente, una variedad es conexa si está formada por un sólo trozo.

Definición 4.1.10. Una variedad M es *conexa por caminos* si para todo $p, q \in M$ existe una curva continua $\alpha : [a, b] \to M$ tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

Observación 4.1.11. Inciso topológico: se puede probar que una variedad siempre es localmente conexa por caminos. Esto implica que *una variedad es conexa si y sólo si es conexa por caminos*. Gracias a ello, en las demostraciones que involucren conexión usaremos indistintamente ambas caracterizaciones.

4.2. Ejemplos

Uno podría demostrar fácilmente que, por ejemplo, la esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ (ver figura 4.3) es una superficie regular, a partir de la definición. De la manera más directa, esto nos requeriría tomarnos seis parametrizaciones (hay una imagen en la sección 2.2 de [dC] que es bien explicativa), lo cual es innecesariamente tedioso pues en poco tiempo podremos demostrarlo simple y elegantemente.

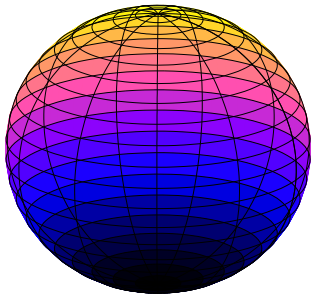


Figura 4.3: La esfera unitaria, S^2

Ejemplo 4.2.1. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, entonces es una variedad de dimensión n. Basta tomar $M = U$, $W = U$ y $\varphi = \mathrm{id}_U$ en la definición. En particular, $\mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión n.

Proposición 4.2.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces el gráfico de f, $M = \operatorname{gráf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad de dimensión n que se cubre con una sola parametrización.*

Demostración. Sea $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in U\} = U \times \mathbb{R}$, es abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ (es producto de abiertos). Basta ver que $W \cap M = M$ es difeomorfo a U, es decir hallar $\varphi : U \to M$ diferenciable, invertible, con inversa diferenciable. Definimos la φ más lógica: $\varphi(x) = (x, f(x))$. Es diferenciable pues f es diferenciable. Su inversa es la proyección sobre $\mathbb{R}^n$: si definimos $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por $\pi(x, y) = x$, es lineal, luego diferenciable. Por definición, $\pi|_M$ es diferenciable en M, y además $\varphi^{-1} = \pi|_M$, lo cual concluye la demostración. □

Observación 4.2.3. Estamos identificando $\mathbb{R}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Ésta es una práctica que adoptaremos siempre que sea necesario.

Veamos algunos ejemplos de esta proposición:

Ejemplo 4.2.4. El paraboloide: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ (ver figura 4.4) es una superficie regular, pues definiendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $f(x, y) = x^2 + y^2$ está claro que $S = \operatorname{gráf}(f)$, que es una función diferenciable. Aquí cubrimos todo el paraboloide con un solo entorno coordenado de la parametrización $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S$ dada por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, es decir este atlas está formado sólo por φ.

Ejemplo 4.2.5. La parábola $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$, análogamente, es una variedad de dimensión 1.

Ejemplo 4.2.6. El hemisferio superior de la esfera unitaria,

$$S^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

es una superficie regular. Definamos $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $f : U \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Entonces f es diferenciable, luego $S^2_+ = \operatorname{gráf}(f)$ es una superficie regular.

No toda variedad es el gráfico de una función:

Contraejemplo 4.2.7. Una bola $B \subset \mathbb{R}^2$ es una variedad de dimensión 2 (pues es abierta) que no es el gráfico de ninguna función.

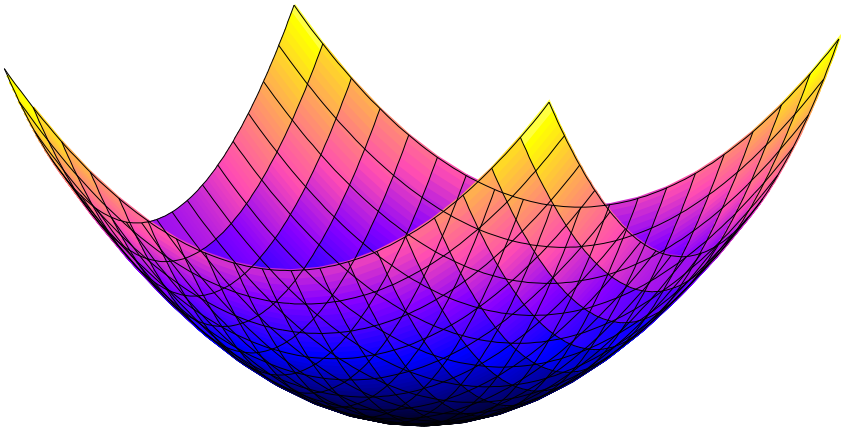


Figura 4.4: Paraboloide

Pero tenemos una suerte de recíproco local para superficies: toda superficie es *localmente* el gráfico de una función diferenciable. Esto lo demostraremos más adelante, en la proposición 4.4.11.

Veamos ahora una manera más potente de conseguir variedades: veremos que *la preimagen de un valor regular es una variedad.*

Definición 4.2.8. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable.

Decimos que $p \in U$ es un *punto regular* de f si df_p es sobreyectivo. Si p no es regular decimos que es un *punto crítico* de f.

Sea $y \in \mathbb{R}^m$. Decimos que y es un *valor regular* de f si el conjunto $f^{-1}(\{y\}) \subset U$ no contiene puntos críticos.

Generalmente trabajaremos con el caso $m = 1$, es decir $f : U \to \mathbb{R}$ y $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Observación 4.2.9. En el caso $m = 1$, la matriz asociada a df_p (la jacobiana) resulta ser el vector $\nabla f(p)$, es decir $df_p(v) = \nabla f(p) \cdot v$. En este caso df_p es sobreyectivo si y sólo si dim Im $(df_p) = 1$, o sea si $\nabla f(p) \neq 0$. Es decir p es un punto crítico si y sólo si $\nabla f(p) = 0$. Encontramos aquí la definición de punto crítico dada en Cálculo II.

Teorema de la preimagen de valor regular. *Sea $n \geq m$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable y $v \in \mathbb{R}^m$ un valor regular de f. Entonces $M = f^{-1}(\{v\})$ es una variedad de dimensión $n - m$.*

Demostración. Sea $p \in M$, queremos encontrar una parametrización de M alrededor de p. Como $p \in f^{-1}(\{v\})$, entonces p es un punto regular, luego $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es sobreyectivo: tiene rango m. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que son las primeras m columnas de df_p que son linealmente independientes y las últimas $n - m$ que conforman el núcleo.

Sea A la matriz formada por las primeras m columnas de df_p. Esto es, si escribimos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m-n}$, A es la matriz asociada a $d(f|_{\mathbb{R}^m})_p$. Es cuadrada e invertible.

Definimos $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Esta función es diferenciable. Calculemos su diferencial en p. Tenemos que $\tilde{f} = (f, \mathrm{id})$, y $df_p = \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$d\tilde{f}_p = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Es invertible ya que A e I (la identidad) lo son. Luego, por el teorema de la función inversa, existen entornos abiertos de p y $\tilde{f}(p)$, llamémosles U y V respectivamente, tales que $\tilde{f} : U \to V$ es un difeomorfismo. Entonces restringiendo a $M = f^{-1}(\{v\})$ tenemos $\tilde{f} : M \cap U \to V \cap (\{v\} \times \mathbb{R}^{n-m})$ que es un difeomorfismo entre un abierto de M y un abierto de $\mathbb{R}^{n-m}$, identificando $\{v\} \times \mathbb{R}^{n-m}$ con $\mathbb{R}^{n-m}$.

Por lo tanto el mapa $\tilde{f}^{-1}|_{V \cap \{v\} \times \mathbb{R}^{n-m}}$ es la parametrización de M alrededor de p buscada. □

Observación 4.2.10. En realidad esta nueva manera de obtener variedades contiene a la anterior; es decir, si una variedad es el gráfico de una función diferenciable, entonces es preimagen de valor regular. Supongamos $n = 2$ por comodidad:

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y consideremos $S = \text{gráf}\,(f)$. Si definimos $F : \text{gráf}\, f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, entonces $S = F^{-1}(\{0\})$. Pero además, 0 es valor regular de F, pues:

$$\nabla F(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (f_x(x, y), f_y(x, y), -1) = (0, 0, 0) \text{ absurdo}$$

Ejemplo 4.2.11. Veamos finalmente que $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una variedad de dimensión 2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$. Entonces $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ y el único punto crítico es $(0, 0, 0)$. 0 es valor regular porque $f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = S^2$ y $(0, 0, 0) \notin f^{-1}(\{0\})$. Por lo tanto S^2 es una variedad de dimensión 2.

Cuidado: la preimagen de un valor regular es una variedad, pero esto **no** significa que dada una función diferenciable, sólo serán variedades las preimágenes de los valores regulares:

Contraejemplo 4.2.12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z^2$. Entonces 0 no es valor regular, porque $f(0, 0, 0) = 0$ y el gradiente de f se anula en $(0, 0, 0)$, por lo tanto $(0, 0, 0)$ es un punto crítico. Sin embargo $f^{-1}(\{0\})$ es una variedad: es el plano $z = 0$.

Contraejemplo 4.2.13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$. Entonces $\nabla f(x, y, z) = (2x + 2y + 2z - 2, 2x + 2y + 2z - 2, 2x + 2y + 2z - 2) = (0, 0, 0) \iff x + y + z = 1$. Si $x + y + z = 1$ entonces $f(x, y, z) = 0$ por tanto los valores regulares son todos salvo el 0. Veamos que $f^{-1}(\{0\})$ también es una variedad:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z - 1)^2 = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x - y\} \\ &= \text{gráf}\,(F) \end{aligned}$$

definiendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = 1 - x - y$, F es diferenciable. Luego $f^{-1}(\{0\})$ es una variedad, aunque 0 no sea un valor regular.

En la próxima sección nos detendremos un poco en las variedades de dimensión 2, dando ejemplos y difeomorfismos. Recordemos que para el *topólogo diferencial* dos cosas difeomorfas son indistinguibles. Esto lleva a preguntarse cuántas variedades "diferentes" de dimensión 1, 2, etc. existen. Llegamos al teorema de clasificación de superficies: enunciaremos el resultado pero no entraremos en mayor detalle. Antes de entrar en las superficies, enunciamos el siguiente resultado, que se encuentra demostrado por ejemplo en el apéndice de [Mil]. Observar que utilizamos la palabra "curva" en un sentido informal.

Teorema de clasificación de curvas. *Toda variedad diferenciable y conexa de dimensión 1 es difeomorfa o a la circunferencia S^1 o algún intervalo de números reales.*

La imagen de la página 3 de [GP] es bastante ilustrativa.

4.3. Superficies regulares

4.3.1. Ejemplos

Ya sabemos que el paraboloide y S^2 son superficies regulares. Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 4.3.1. El hiperboloide de una hoja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (ver figura 4.5) es una superficie regular, ya que si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ entonces $S = f^{-1}(\{0\})$. 0 es valor regular pues: $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z) = (0, 0, 0) \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$ pero $(0, 0, 0) \notin f^{-1}(\{0\})$.

Ejemplo 4.3.2. El paraboloide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = z\}$ (ver figura 4.6), también conocido como LA SILLA DE MONTAR, es una superficie regular al ser el gráfico de una función diferenciable.

Ejemplo 4.3.3. El cono sin el vértice, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ es una variedad pues es el gráfico de $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejemplo 4.3.4. El cono con el vértice, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$ no es una variedad. Basta suponer que lo es, entonces en un entorno de $p = (0, 0, 0)$ la superficie es el gráfico de una función diferenciable, y esto es absurdo (dejamos los detalles como un ejercicio para el lector).

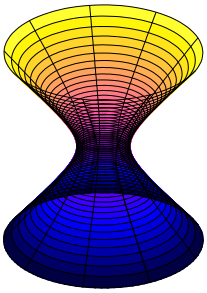


Figura 4.5: Hiperboloide de una hoja

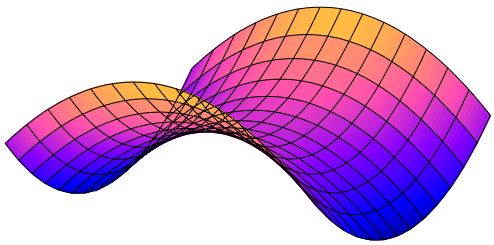


Figura 4.6: Paraboloide hiperbólico

Ejemplo 4.3.5. Demos ahora una parametrización explícita de S^2, las *coordenadas esféricas* o geográficas. Sea $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}$ y sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\varphi(u,v) = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u)$$

Claramente $\varphi(U) \subset S^2$. Observar que φ es un caso particular del *cambio a coordenadas esféricas* visto en Cálculo II, en el que el radio es variable y no fijo. Entonces φ es un difeomorfismo (Ver sección 2.2 de [dC] para una explicación un poco más satisfactoria). ¿Qué parte de S^2 cubre esta parametrización? *Casi* todo S^2. El semicírculo $C = \{(x,y,z) \in S^2 : x \geq 0, y = 0\}$ no es cubierto. Esto es consecuencia de no tomar U como $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$, cosa que no podemos hacer pues U debe ser abierto. Como adelanto, digamos que esto no nos va a molestar para integrar, pues la diferencia entre U y ese conjunto tiene medida nula.

Ahora veremos que esta parametrización contempla a S^2 como *superficie de revolución*.

Ejemplo 4.3.6. **Superficies de revolución**. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto que se obtiene al rotar una variedad de dimensión 1 plana C (i.e. contenida en un plano) alrededor de un eje en el plano de la curva, no incidente con ésta. Tomaremos el plano xz como el plano de la curva y el eje z como eje de rotación (ver figura 4.7). Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ con $f(t) > 0$, una parametrización de la curva. Sea $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi,\ a < v < b\}$, definimos $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ por

$$\varphi(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\operatorname{sen} u, g(v))$$

Observar que φ es una parametrización de S (es directo). Fijado u, consigo un meridiano. Fijado v, consigo un paralelo. Si la curva es un arco de circunferencia obtenemos la parametrización de S^2 del ejemplo anterior. La curva C se llama *curva generatriz* de S, y el eje z es el *eje de rotación* de S.

Otros ejemplos de superficies de revolución además de la esfera incluyen al cilindro, el cono, el paraboloide, etc.

Es interesante observar también que φ es el resultado de aplicar la matriz de rotación de eje z a la curva α. En efecto:

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v) \\ 0 \\ g(v) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.3.7. El **toro** T^2 es la superficie de revolución obtenida al girar la circunferencia $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + z^2 = r^2,\ 0 < r < a,\ y = 0\}$ contenida en el plano xz alrededor del eje z. Geométricamente, una rosquilla o *donut* (ver figura 4.8). Parametrizando C con $\alpha : (0, 2\pi) \to C$, definida por:

$$\alpha(t) = (a + r\cos t, 0, r\operatorname{sen} t)$$

tenemos la parametrización $\varphi : U \to T^2$ con $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u, v \in (0, 2\pi)\}$ definida por:

$$\varphi(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u)$$

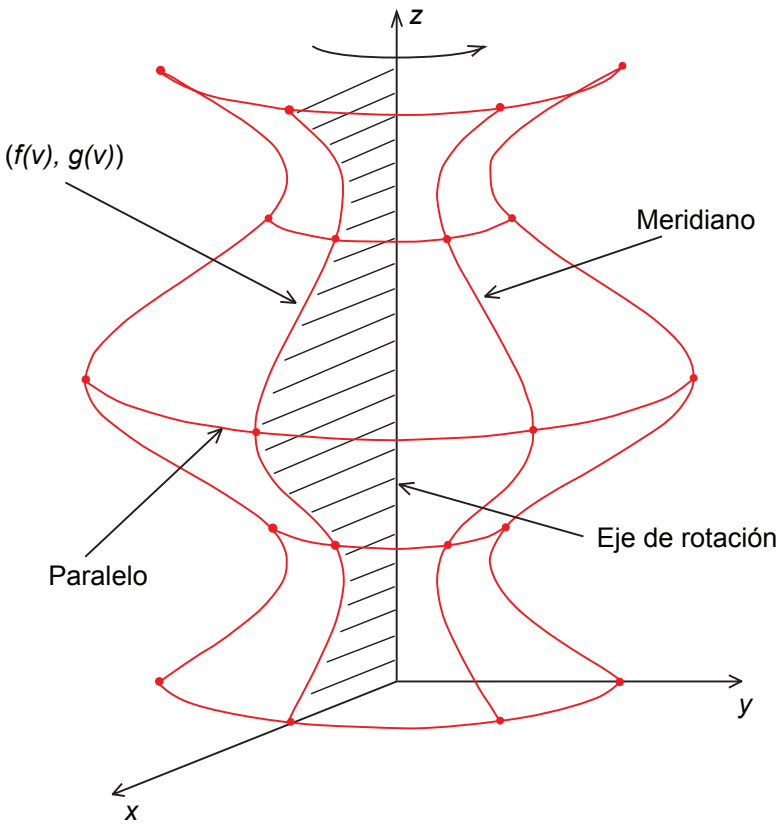


Figura 4.7: Ejemplo de superficie de revolución con $f(v) = 2 + \cos(v)$, $g(v) = v$

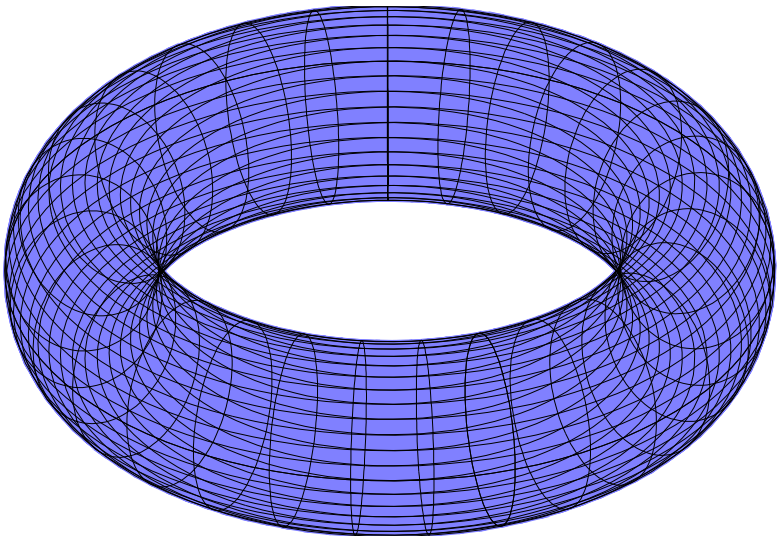


Figura 4.8: Toro

Ejemplo 4.3.8. Sigamos con el toro. Veámoslo como preimagen de valor regular. Viéndolo aún como superficie de revolución, y usando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\} = F^{-1}(\{r^2\})$$

donde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está definida por $F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$. Resta ver que r^2 es valor regular de F. Es fácil observar que $\nabla F(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$. $F(0, 0, 0) = a^2 \neq r^2$ pues $r < a$, luego r^2 es valor regular de F.

Ejemplo 4.3.9. **Superficies regladas**. Intuitivamente, una superficie reglada es aquélla que dado cualquier punto de la superficie, hay una recta que pasa por el punto que está contenida en la superficie. Más formalmente: sean $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $w : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ dos curvas diferenciables. Entonces la superficie regular parametrizada por $\varphi : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, con

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + v\, w(t)$$

se llama *superficie reglada*. La curva α se denomina *directriz*, y las rectas L_t obtenidas fijando $t \in (a, b)$ se llaman *generatrices*. Con un ejemplo se verá más claro: consideremos la superficie determinada por la parametrización $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi(t, v) = (\cos t - v \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + v \cos t, v)$$

(ver figura 4.9). Es fácil verificar que ésta es otra parametrización del hiperboloide de una hoja (verificar que $x^2 + y^2 - z^2 = 1$). Pero además, si $\alpha : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ está dada por $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, entonces:

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + v(\alpha'(t) + e_3)$$

Entonces con $w : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dado por $w(t) = \alpha'(t) + e_3$, vemos que el hiperboloide es una superficie reglada. ¿Qué es lo que está sucediendo? Pongamos $v = 0$ y "movamos" t. Obtenemos la traza de α, S^1, la directriz. Ahora, fijemos t. Tenemos un punto en la traza de α y el vector $\alpha'(t) + e_3$ que nos marca la dirección de la recta que obtenemos al mover v (ver figura 4.9). Como último comentario, observar que la superficie reglada determinada por el mismo α pero con $w(t) = -\alpha'(t) + e_3$ obtenemos de nuevo el hiperboloide: tiene dos familias de generatrices (por un punto cualquiera de la superficie, pasan *dos* rectas contenidas en la superficie).

4.3.2. Difeomorfismos entre superficies regulares

Ejercicio 4.3.10. Sea $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < r\}$, con $r > 0$. Mostrar que la función $f : B_r \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x) = \frac{rx}{\sqrt{r^2 - \|x\|^2}}$$

es un difeomorfismo. (Pista: la inversa es $g : \mathbb{R}^2 \to B_r$, dada por $g(x) = \frac{rx}{\sqrt{r^2 + \|x\|^2}}$).

Si S es una superficie de $\mathbb{R}^3$, deducir que todo punto de S tiene un entorno difeomorfo a todo $\mathbb{R}^2$ y que, en consecuencia, las parametrizaciones pueden ser elegidas con dominio en todo $\mathbb{R}^2$.

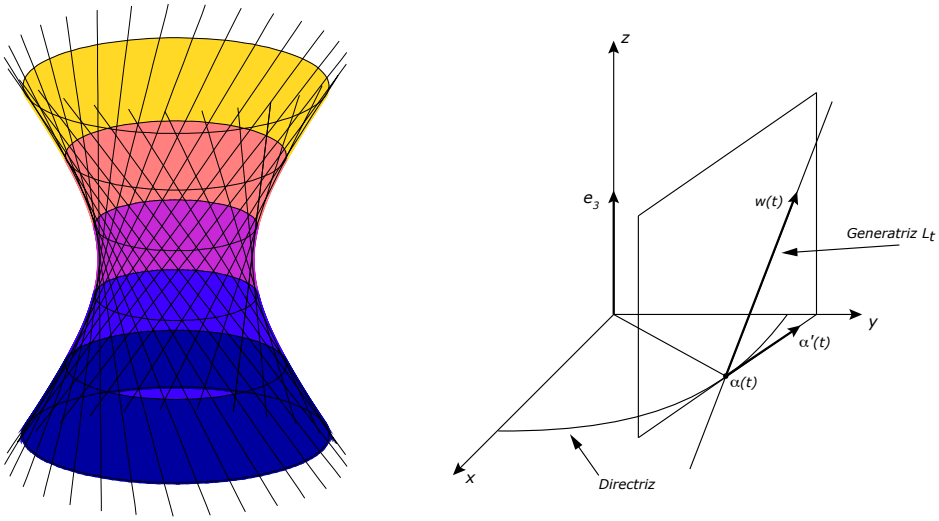


Figura 4.9: El hiperboloide como superficie reglada

Ejemplo 4.3.11. **Proyección estereográfica**. Veamos que la esfera unitaria menos un punto es difeomorfa al plano.
Sea $N = (0, 0, 1)$ el *polo norte*. Identificamos $\mathbb{R}^2$ con el plano $xy \subset \mathbb{R}^3$. El mapa $\pi_N : S^2 \setminus \{N\}$ que lleva cada punto P de S^2 en la intersección de la recta $[NP]$ con el plano xy se llama *proyección estereográfica*. Es un ejercicio probar que su inversa es una parametrización de la esfera menos el polo norte: deducimos que S^2 se puede cubrir con dos entornos coordenados (usando la proyección estereográfica desde el polo sur). En el capítulo 1 de [Mil], el autor usa esta proyección para demostrar el teorema fundamental del álgebra. La demostración es muy interesante.

Ejercicio 4.3.12. El cilindro, el cono menos el vértice, y el plano menos el origen son difeomorfos. (Pista: del cono al plano es fácil. Del cilindro al plano, pensar en la función exponencial. Del cono al cilindro, componer.)

Hemos probado positivamente que dos superficies son difeomorfas. ¿Pero cómo probar que dos superficies *no* son difeomorfas? Para ser difeomorfas, primero tienen que ser homeomorfas. Debemos pensar en los invariantes topológicos, es decir, aquellas propiedades que no varían a través de homeomorfismos. La compacidad es una de ellas (cf. curso de Topología). Podemos usar esto para demostrar que:

Ejemplo 4.3.13. S^2 y $\mathbb{R}^2$ no son difeomorfos. Si lo fueran, deberían ser homeomorfos, es decir, debería haber un homeomorfismo $\psi : S^2 \to \mathbb{R}^2$. Esto implicaría que $\psi(S^2) = \mathbb{R}^2$ fuera compacto, pues S^2 es compacta. Esto es absurdo.

Observar que no podemos usar este método para demostrar que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no son difeomorfos (lo cual ya hemos hecho en el ejemplo 3.2.6 utilizando formas diferenciales).

El siguiente resultado se encuentra demostrado por ejemplo en [Yan] y en el capítulo 12 de [Mu2]. Para comprenderlo por completo hace falta la noción de orientabilidad; releerlo una vez asimilada la sección 4.6.2.

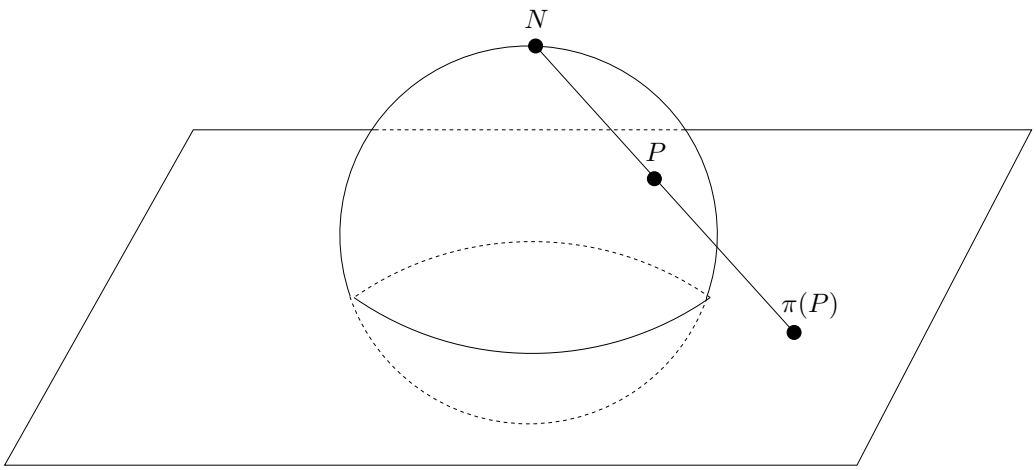


Figura 4.10: Proyección estereográfica

Teorema de clasificación de superficies. *Toda variedad compacta, conexa y orientable de dimensión 2 es difeomorfa o a la esfera S^2 o a una esfera con n asas (ver figura 4.11).*

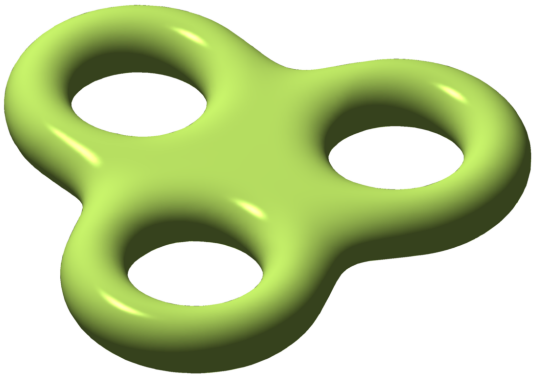


Figura 4.11: Una esfera con tres asas

4.4. Espacio tangente

Queremos definir el espacio tangente a una variedad de dimensión n en un punto de ella. Gráficamente, en una curva queremos tener la recta tangente, y en una superficie el plano tangente, a raíz de una sola definición para variedades.

Vamos a intentar construirlo. ¿Qué sabemos? Sabemos de Cálculo II que dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U abierto y $p \in U$, entonces $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es su mejor aproximación lineal (como mapa) alrededor de p. Es lo que vamos a usar para encontrar el mejor subespacio lineal (i.e. vectorial) que aproxima una variedad $M \subset \mathbb{R}^k$ de dimensión n. Tomemos una parametrización $\varphi : U \to M$ alrededor de p. Por lo tanto si $\varphi(q) = p$, entonces el mapa lineal que mejor aproxima a φ alrededor de q es $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Si miramos la imagen de este mapa, tenemos el

espacio lineal que mejor aproxima a M alrededor de p. La siguiente definición es entonces natural:

Definición 4.4.1. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad de dimensión n y $p \in M$. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi : U \to M$ una parametrización alrededor de p. Si $p = \varphi(q)$ con $q \in U$, definimos el *espacio tangente a M en p* que denotamos T_pM como

$$T_pM \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{Im} d\varphi_q$$

Observación 4.4.2. El diferencial $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es una transformación lineal, luego $\operatorname{Im} d\varphi_q = T_pM$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^k$ (esta observación es trivial, en realidad, porque la motivación de la definición de T_pM es que *sea* un subespacio lineal). Lo que es de más interés destacar, es que, geométricamente, si queremos ver al T_pM como hiperplano que mejor aproxima a la variedad alrededor de p, tenemos que trasladarlo por p, es decir, debemos considerar el subespacio afín $T_pM + p$.

Pero una pregunta que está latente desde la motivación es: ¿cómo sabemos que más allá de cómo parametricemos M alrededor de p, siempre conseguiremos el mismo subespacio? Hace unas líneas dijimos: "si miramos la imagen del mapa $d\varphi_q$, tenemos la mejor aproximación lineal de M alrededor de p". En realidad, tenemos la mejor aproximación lineal alrededor de p *de* $\varphi(U)$, ¡no de M! Es de imaginar que si tomamos otra parametrización $\psi : V \to M$ alrededor de p, la mejor aproximación lineal de $\psi(V)$ coincida con la de $\varphi(U)$. Probémoslo:

Proposición 4.4.3. *El espacio tangente está bien definido. Es decir, T_pM no depende de la parametrización elegida.*

Demostración. Sea $\psi : V \to M$ otra parametrización alrededor de p, y sea $r \in V$ tal que $\psi(r) = p$.

$$\begin{tikzcd} & M & \\ U \arrow[ur, "\varphi"] & & V \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Queremos probar que $\operatorname{Im} d\varphi_q = \operatorname{Im} d\psi_r$. Definamos:

$$\hat{U} = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$$
$$\hat{V} = \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$$

y sean $\hat{\varphi} = \varphi|_{\hat{U}}$, $\hat{\psi} = \psi|_{\hat{V}}$ (ver figura 4.12). Como φ y ψ son difeomorfismos, $\hat{U}$ y $\hat{V}$ son abiertos. Sea el cambio de coordenadas $f : \hat{U} \to \hat{V}$ definido por $f = \hat{\psi}^{-1} \circ \hat{\varphi}$.

$$\begin{tikzcd} & \varphi(U) \cap \psi(V) & \\ \hat{U} \arrow[ur, "\hat{\varphi}"] \arrow[rr, "f"'] & & \hat{V} \arrow[ul, "\hat{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

Apliquemos la regla de la cadena a $\hat{\psi} \circ f = \hat{\varphi}$:

$$d\hat{\psi}_r \circ df_q = d\hat{\varphi}_q$$

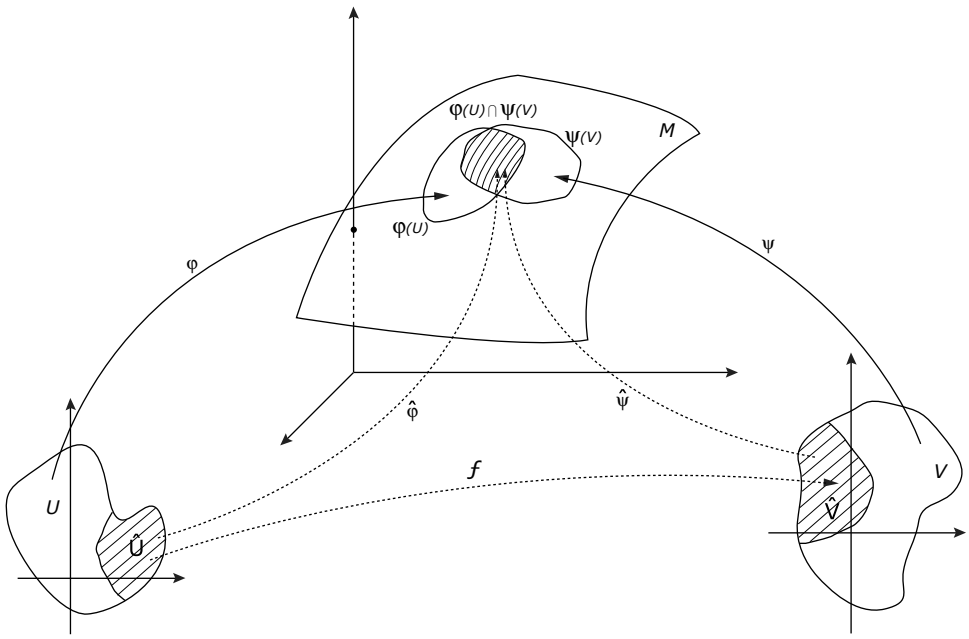


Figura 4.12: Las parametrizaciones φ y ψ inducen parametrizaciones $\hat{\varphi}$ y $\hat{\psi}$ con mismo codominio, y un cambio de coordenadas f

observando que $f(q) = \hat{\psi}^{-1}(\hat{\varphi}(q)) = \hat{\psi}^{-1}(p) = r$.

Observemos que $d\hat{\varphi}_q = d\varphi_q$ (el diferencial son derivadas parciales que dependen de un entorno de q) y $d\hat{\psi}_r = d\psi_r$ (por el mismo razonamiento). Entonces

$$\text{Im } d\varphi_q = \text{Im } (d\psi_r \circ df_q)$$

Pero como f es un difeomorfismo, entonces $df_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal, luego Im $df_q = \mathbb{R}^n$. Por lo tanto Im $(d\psi_r \circ df_q) =$ Im $d\psi_r$ y:

$$\text{Im } d\varphi_q = \text{Im } d\psi_r$$

que es lo que queríamos probar. □

El razonamiento anterior (intersectar los entornos coordenados y "tirar para atrás") es un razonamiento que repetiremos. A menudo nos lo ahorraremos suponiendo que $\varphi(U) = \psi(V)$.

Observación 4.4.4. Si consideramos como variedad de dimensión n un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces $T_pU = \mathbb{R}^n$ para todo $p \in U$. En efecto, una parametrización de U es $\text{id}_U : U \to U$, entonces $T_pU = \text{Im } d(\text{id}_U)_p = \text{Im id}_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ para todo $p \in U$.

Dado que el espacio tangente es un subespacio vectorial, le podemos calcular la dimensión:

Proposición 4.4.5. *La dimensión del espacio tangente es la dimensión de la variedad. Es decir, si $M \subset \mathbb{R}^k$ es una variedad de dimensión n y $p \in M$, entonces dim $T_pM = n$.*

Demostración. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $p \in M$ tales que $\varphi : U \to \varphi(U) \subset M$ es una parametrización alrededor de p tal que $\varphi(q) = p$. El problema es que no sabemos calcular el diferencial de φ^{-1} (no está definida en un espacio euclídeo), entonces la extendemos a un abierto.

φ^{-1} es diferenciable, entonces existe $W \subset \mathbb{R}^k$ entorno abierto de p, $F : W \to \mathbb{R}^n$ diferenciable de modo tal que:

$$F|_{W \cap \varphi(U)} = \varphi^{-1}|_{W \cap \varphi(U)}$$

Sea $\hat{U} = \varphi^{-1}(W \cap \varphi(U))$. Por construcción, $F \circ \varphi|_{\hat{U}} = \mathrm{id}_{\hat{U}}$, aplico la regla de la cadena:

$$d(F \circ \varphi|_{\hat{U}})_q = dF_p \circ d\varphi_q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Entonces $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ admite inversa por izquierda, entonces es inyectiva, luego es un isomorfismo lineal sobre su imagen. Por lo tanto $T_pM = \mathrm{Im}\ d\varphi_q$ tiene dimensión n. □

Observación 4.4.6. Acabamos de ver en esta demostración que $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es inyectiva. Por lo tanto, si restringimos el codominio a la imagen: $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}\ d\varphi_q = T_pM$, es un isomorfismo lineal.

Y entonces ahora podemos encontrar explícitamente una base del espacio tangente.

Proposición 4.4.7. *Si $M \subset \mathbb{R}^k$ es una variedad de dimensión n, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi : U \to M$ es una parametrización de M alrededor de $p \in M$ con $p = \varphi(q)$, entonces una base de T_pM es $\{\varphi_{u_1}(q), \ldots, \varphi_{u_n}(q)\}$.*

Demostración. El mapa $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to T_pM$ es un isomorfismo lineal, entonces lleva bases en bases. Si transformamos la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ entonces $\{d\varphi_q(e_1), \ldots, d\varphi_q(e_n)\}$ es una base de T_pM. Pero $d\varphi_q(e_i) = \varphi_{u_i}(q)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, pues

$$d\varphi_q = \begin{pmatrix} (\varphi_1)_{u_1}(q) & \ldots & (\varphi_1)_{u_n}(q) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi_k)_{u_1}(q) & \ldots & (\varphi_k)_{u_n}(q) \end{pmatrix} = (\varphi_{u_1}(q), \ldots, \varphi_{u_n}(q)) \qquad \square$$

Definición 4.4.8. A una base como en la proposición anterior le llamaremos *base inducida por la parametrización φ.*

Observación 4.4.9. Bajémoslo a dimensión 2. Si tenemos una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con una parametrización alrededor de $(x_0, y_0, z_0) \in S$ dada por $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, con $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ entonces una base de T_pM es $\{\varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0)\}$.

Ejemplo 4.4.10. Consideremos el paraboloide $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$. Recordemos que tenemos la parametrización $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S$ definida por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Veamos cuál es el espacio tangente al punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ tal que $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Resulta:

$$\varphi_u(u_0, v_0) = (1, 0, 2u_0)$$
$$\varphi_v(u_0, v_0) = (0, 1, 2v_0)$$

entonces T_pS es el subespacio vectorial generado por $\{(1,0,2u_0),(0,1,2v_0)\}$. Por ejemplo, el punto $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ se corresponde por φ con $(1,1,2) \in S$. El espacio tangente en ese punto está generado por $\{(1,0,2),(0,1,2)\}$, de donde $T_pS = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y-z=0\}$. Recordar que éste es el plano tangente **trasladado al origen**, si queremos conseguir el plano tangente geométrico tenemos que considerar el subespacio afín:

$$\begin{aligned} T_pS + (1,1,2) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y-z=2\} \end{aligned}$$

Podemos probar ahora que toda superficie es localmente un gráfico:

Proposición 4.4.11. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Entonces para todo $p \in S$ existe una parametrización alrededor de p tal que su entorno coordenado es el gráfico de una función diferenciable.*

Demostración. Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \varphi(U) \subset S$ con U abierto, una parametrización alrededor de $p = \varphi(q)$. Queremos conseguir una parametrización con entorno coordenado lo suficientemente chico para que sea el gráfico de una función diferenciable. Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ entonces:

$$d\varphi_q = \begin{pmatrix} (\varphi_1)_u(q) & (\varphi_1)_v(q) \\ (\varphi_2)_u(q) & (\varphi_2)_v(q) \\ (\varphi_3)_u(q) & (\varphi_3)_v(q) \end{pmatrix}$$

Tenemos la transformación lineal $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \to d\varphi_q(\mathbb{R}^2)$ que es un isomorfismo (observación 4.4.6), de donde esta matriz tiene rango 2. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que:

$$\det \begin{pmatrix} (\varphi_1)_u(q) & (\varphi_1)_v(q) \\ (\varphi_2)_u(q) & (\varphi_2)_v(q) \end{pmatrix} \neq 0$$

Definimos ahora $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ por $\phi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) = (\bar{u}, \bar{v})$. Entonces $d\phi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene determinante no nulo, luego es un isomorfismo lineal. Ahora estamos en las hipótesis del teorema de la función inversa: podemos tomar un U más pequeño si es necesario de modo que ϕ sea un difeomorfismo. Definimos $\psi : \phi(U) \to \varphi(U)$ como $\psi = \varphi \circ \phi^{-1}$. Es una parametrización de S pues es compuesta de difeomorfismos:

$$\begin{tikzcd} & \varphi(U) & \\ U \arrow[ur, "\varphi"] & & \phi(U) \arrow[ul, dotted, "\psi"'] \arrow[ll, "\phi^{-1}"] \\ (u,v) & & (\bar{u},\bar{v}) \end{tikzcd}$$

Luego:

$$\psi(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \varphi_3 \circ \phi^{-1}(\bar{u},\bar{v}))$$

Definiendo $f : \phi(U) \to \mathbb{R}$ como $f = \varphi_3 \circ \phi^{-1}$, tenemos que:

$$\psi(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, f(\bar{u},\bar{v}))$$

Es decir, el entorno coordenado de p, $\psi(\phi(U))$ es el gráfico de f, una función diferenciable. $\square$

Observación 4.4.12. La proposición vale para variedades en general. La demostración es análoga.

Antes de pasar al diferencial entre variedades, vamos a dar un par de caracterizaciones muy útiles del espacio tangente.

Definición 4.4.13. Si M es una variedad de dimensión n, un *vector velocidad* de $p \in M$ es $\alpha'(0)$, si $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con $\epsilon > 0$ es una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$.

Teorema 4.4.14. *Sea M una variedad de dimensión n, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi : U \to M$, una parametrización de M entorno a $p \in M$ tal que $\varphi(q) = p$. Entonces $T_pM = \{$vectores velocidad de p en $M\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $w \in T_pM$, entonces existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $w = d\varphi_q(v)$. Ahora, $v = \gamma'(t)$, con $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ dada por $\gamma(t) = tv + q$. Sea $\alpha = \varphi \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, entonces tenemos que $\alpha(0) = \varphi(q) = p$, y:

$$\alpha'(0) = d(\varphi \circ \gamma)_0(1) = (d\varphi_{\gamma(0)} \circ d\gamma_0)(1) = d\varphi_q(\gamma'(0)) = d\varphi_q(v) = w$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] & M \\ (-\epsilon, \epsilon) \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, dotted, "\varphi\circ\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Sea w un vector velocidad de p, es decir: existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $w = \alpha'(0)$. La curva $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ es diferenciable, y:

$$\beta'(0) = d\beta_0(1) = d(\varphi^{-1} \circ \alpha)_0(1) = d\varphi^{-1}{}_{\alpha(0)} \circ d\alpha_0(1) = d\varphi^{-1}{}_p(\alpha'(0)) = d\varphi^{-1}{}_p(w)$$

Entonces $d\varphi_q(\beta'(0)) = d\varphi_q(d\varphi_p^{-1}(w)) = w \Rightarrow w \in \operatorname{Im} d\varphi_q \Rightarrow w \in T_pM$.

$$\begin{tikzcd} (-\epsilon, \epsilon) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dotted, "\beta"'] & M \arrow[dl, "\varphi^{-1}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

□

Proposición 4.4.15. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}^m$ tal que $M = f^{-1}(\{a\})$ es una variedad. Entonces si $p \in M$:*

$$T_pM = \operatorname{Ker} df_p$$

En particular, si $m = 1$, se deduce $\{\nabla f(p)\}^\perp = T_pM$.

Demostración. ($\supset$) Sea $v \in T_pM$, entonces $v = \alpha'(0)$ con $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$. Entonces $f(\alpha(t)) = a$, en particular $f(\alpha(0)) = a$. Aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad df_{\alpha(0)} \circ d\alpha_0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad df_p(\alpha'(0)) = 0 \Rightarrow \alpha'(0) = v \in \operatorname{Ker} df_p, \text{ y si } m = 1: \\ &\Rightarrow \quad \nabla f(p) \cdot \alpha'(0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha'(0) = v \in \{\nabla f(p)\}^\perp \end{aligned}$$

($\subset$) Tenemos una inclusión entre subespacios vectoriales de dimensión $n - 1$, entonces son iguales. □

Ejemplo 4.4.16. Como aplicación de este teorema, vamos a encontrar explícitamente la ecuación del espacio tangente en p de una superficie regular $S = f^{-1}(\{a\})$, con $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y a valor regular de f.

Sabemos que si $(x, y, z) \in T_pM$ entonces $\nabla f(p) \cdot (x, y, z) = 0$, es decir:

$$f_x(p)\, x + f_y(p)\, y + f_z(p)\, z = 0$$

Por lo tanto $T_pS = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_x(p)\, x + f_y(p)\, y + f_z(p)\, z = 0\}$. Si queremos tener la ecuación del "plano tangente", o sea, el espacio tangente trasladado por p, entonces nos queda, si $p = (x_0, y_0, z_0)$:

$$f_x(p)\,(x - x_0) + f_y(p)\,(y - y_0) + f_z(p)\,(z - z_0) = 0$$

Hallemos la ecuación explícita del espacio tangente para una superficie que es un gráfico. Usamos el mismo truco que ya utilizamos para demostrar que si una superficie es un gráfico, entonces es preimagen de valor regular: si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, consideremos $S = \text{gráf}\,(f)$. Definiendo $F : \text{gráf}\,(f) \to \mathbb{R}$ por $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, entonces $S = F^{-1}(\{0\})$, con 0 valor regular de F (ver observación 4.2.10). La ecuación de T_pS con $p = (x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0) \in S$ está por lo tanto dada por:

$$\begin{aligned} & F_x(p)\, x + F_y(p)\, y + F_z(p)\, z = 0 \\ \iff \quad & f_x(x_0, y_0)\, x + f_y(x_0, y_0)\, y + (-z) = 0 \\ \iff \quad & f_x(x_0, y_0)\, x + f_y(x_0, y_0)\, y = z \end{aligned}$$

Por lo tanto $T_pS = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_x(x_0, y_0)\, x + f_y(x_0, y_0)\, y = z\}$. De nuevo, la ecuación del plano tangente nos queda:

$$\begin{aligned} & f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) - (z - z_0) && = 0 \\ \iff \quad & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) && = z \end{aligned}$$

4.5. Diferencial de un mapa entre variedades

4.5.1. Definición

Dado un mapa diferenciable $f : M \to N$ entre variedades, queremos construir su *mejor aproximación lineal*. Si la mejor manera de aproximar linealmente M en un punto p es tomar T_pM, y la mejor manera de aproximar linealmente N en $f(p)$ es tomar $T_{f(p)}N$, entonces resulta natural querer que el diferencial de f en p vaya de T_pM en $T_{f(p)}N$. Usaremos lo que ya sabemos, que es aproximar un mapa entre abiertos del espacio euclídeo.

Definición 4.5.1. Sean $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^l$ variedades, $f : M \to N$ un mapa diferenciable. Entonces si $p \in M$, el diferencial de f en p es:

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

definido como $df_p \overset{\text{def.}}{=} dF_p|_{T_pM}$, donde F es una extensión de f en un entorno abierto de p; es decir, $F : W \to \mathbb{R}^l$ es una función diferenciable tal que $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$, donde $W \subset \mathbb{R}^k$ es cierto entorno abierto de p

Para que esto tenga sentido tenemos que verificar que el mapa df_p así definido efectivamente produce vectores en $T_{f(p)}N$; y que cualquier extensión F que tomemos, conseguiremos efectivamente el mismo mapa df_p.

Proposición 4.5.2. *En las hipótesis anteriores,* $\operatorname{Im} df_p \subset T_{f(p)}N$*, y el diferencial* df_p *no depende de la extensión* F *elegida.*

Demostración. Sean:

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \subset M$$

$$\psi : V \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset N$$

parametrizaciones alrededor de $p \in M$ y alrededor de $f(p) \in N$, donde U es tal que $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$. Esto lo podemos hacer por la continuidad de f (dado cualquier $\psi(V)$, entorno de $f(p)$, podemos hallar un entorno Ξ de p en M tal que $f(\Xi) \subset \psi(V)$. Elegimos U suficientemente chico para que $\varphi(U) \subset \Xi$).

Gracias a esta elección, si definimos $\hat{f} : U \to V$ como $\hat{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\varphi(U) \arrow[r, "f"] & \psi(V) \\
U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dotted, "\hat{f}"'] & V \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Sea $F : W \to \mathbb{R}^l$ una extensión diferenciable de f tal que $\varphi(U) \subset W$ (quizás sea necesario hacer aún más chico U). Entonces $F \circ \varphi = f \circ \varphi$ (podemos hacer la composición $F \circ \varphi$ por cómo nos tomamos W) y el siguiente diagrama conmuta (por la conmutatividad del anterior):

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^l \\
U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\hat{f}"'] & V \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Entonces $\psi \circ \hat{f} = F \circ \varphi$. Si $\varphi(q) = p$ y $\psi(r) = f(p)$, aplicamos la regla de la cadena a esa igualdad y tenemos otro diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^k \arrow[r, "dF_p"] & \mathbb{R}^l \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, "d\varphi_q"] \arrow[r, "d\hat{f}_q"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "d\psi_r"']
\end{tikzcd}$$

Pero como $T_pM = \operatorname{Im} d\varphi_q$, entonces $dF_p|_{T_pM} = dF_p \circ d\varphi_q = d\psi_r \circ d\hat{f}_q$, por lo tanto df_p no depende de la elección de F y además cae efectivamente en $\operatorname{Im} d\psi_r = T_{f(p)}N$. $\square$

4.5.2. Propiedades

Observación 4.5.3. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, y sea $p \in U$. Consideremos el mapa diferenciable $f : U \to V$ como mapa entre variedades y calculémosle el diferencial: $df_p : T_pU = \mathbb{R}^n \to T_{f(p)}V = \mathbb{R}^m$. Observemos que el propio U es un entorno abierto de p, entonces podemos tomar como extensión F la propia f.

$$df_p \overset{\text{def.}}{=} dF_p|_{T_pM} = dF_p|_{\mathbb{R}^n} = dF_p = df_p$$

(a la izquierda, el "diferencial entre variedades"; a la derecha, el "diferencial usual"). Obtenemos el diferencial usual que es lo que uno esperaba, y lo que nos permite decir que este nuevo diferencial *generaliza* al anterior.

Observación 4.5.4. Si $M \subset \mathbb{R}^k$ es una variedad y consideramos el mapa entre variedades $\mathrm{id}_M : M \to M$, entonces una extensión de id_M es $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Hallémosle el diferencial a id_M en un punto $p \in M$. $d(\mathrm{id}_M)_p : T_pM \to T_pM$ es tal que $d(\mathrm{id}_M)_p = (d(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^k})_p)|_{T_pM} = \mathrm{id}_{T_pM}$, usando al final que el diferencial usual de la identidad es la identidad. Obtenemos que el diferencial de la identidad en una variedad es la identidad en el espacio tangente, que es también lo que uno esperaba.

Regla de la cadena. *Sean $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m, Z \subset \mathbb{R}^p$ variedades, $f : M \to N$, $g : N \to Z$ mapas diferenciables, y $p \in M$. Entonces vale la regla de la cadena:*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p : T_pM \to T_{g(f(p))}Z$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "df_p"] \arrow[rr, bend right, "d(g\circ f)_p"'] & T_{f(p)}N \arrow[r, "dg_{f(p)}"] & T_{g(f(p))}Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Sean F y G extensiones diferenciables de f y g alrededor de p y de $f(p)$, respectivamente. Como F es continua, podemos suponer que la imagen de F está contenida en el dominio de G. Entonces $G \circ F$ es una extensión de $g \circ f$ en p y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G\circ F"'] & V \arrow[r, "G"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

donde U es el dominio de F y V es el dominio de G (recién nos tomamos $F(U) \subset V$). Le aplicamos la regla de la cadena:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "dF_p"] \arrow[rr, bend right, "d(G\circ F)_p"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "dG_{F(p)}"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Como $dF_p(T_pM) \subset T_{f(p)}N$ entonces podemos restringir a los espacios tangentes:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "dF_p|_{T_pM}"] \arrow[rr, bend right, "d(G\circ F)_p|_{T_pM}"'] & T_{f(p)}N \arrow[r, "dG_{F(p)}|_{T_{f(p)}N}"] & T_{g(f(p))}Z \end{tikzcd}$$

Por definición del diferencial, el diagrama anterior es igual al siguiente, concluyendo la demostración:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "df_p"] \arrow[rr, bend right, "d(g\circ f)_p"'] & T_{f(p)}N \arrow[r, "dg_{f(p)}"] & T_{g(f(p))}Z \end{tikzcd}$$

□

Corolario 4.5.5. *Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo entre variedades y $p \in M$, entonces el diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es un isomorfismo lineal, y:*

$$(df_p)^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}$$

Además M y N tienen la misma dimensión.

Demostración. Ya sabemos que el diferencial de la identidad es la identidad y que vale la regla de la cadena, así que repetimos la demostración de esta proposición para abiertos. Tenemos $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$ y $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$, entonces:

$$\mathrm{id}_{T_pM} = d(\mathrm{id}_M)_p = d(f^{-1} \circ f)_p = d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p$$
$$\mathrm{id}_{T_{f(p)}N} = d(\mathrm{id}_N)_{f(p)} = d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = df_p \circ d(f^{-1})_{f(p)}$$

Por lo tanto df_p es un isomorfismo, y además $(df_p)^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}$. Como la dimensión de un espacio tangente es la dimensión de la variedad, se concluye también que M y N tienen la misma dimensión. □

Teorema de la función inversa. *Sean M y N variedades, $p \in M$ y $f : M \to N$ un mapa diferenciable tal que df_p es un isomorfismo lineal. Entonces existe $X \subset M$ abierto relativo con $p \in X$ tal que $f(X) \subset N$ es un abierto relativo y $f|_X : X \to f(X)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Hagamos un truco ya habitual: sean $\varphi : U \to M$, $\psi : V \to N$ parametrizaciones, con φ elegida de modo tal que $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$. Si definimos $\hat{f} : U \to V$ como $\hat{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dotted, "\hat{f}"'] & V \end{tikzcd}$$

Si $\varphi(q) = p$ y $\psi(r) = f(p)$, aplicamos la regla de la cadena y obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "df_p"] & T_{f(p)}N \arrow[d, "d(\psi^{-1})_{f(p)}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "d\varphi_q"] \arrow[r, "d\hat{f}_q"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Observar que son todos isomorfismos lineales. En efecto, df_p, $d\varphi_q$ y $d(\psi^{-1})_{f(p)}$ lo son (el primero por hipótesis, los otros dos por ser diferenciales de difeomorfismos), entonces por la conmutatividad del diagrama (i.e. por composición), $d\hat{f}_q$ es un isomorfismo lineal.

Ahora, gracias a $\hat{f}$ estamos en las hipótesis del teorema de la función inversa para abiertos. Podemos encontrar $\hat{U} \subset U$ tal que $\hat{f}|_{\hat{U}} : \hat{U} \to \hat{f}(\hat{U})$ sea un difeomorfismo. Restringiendo el primer diagrama a este $\hat{U}$ e invirtiendo las parametrizaciones:

$$\begin{tikzcd}
\varphi(\hat{U}) \arrow[r, "f|_{\varphi(\hat{U})}"] \arrow[d, "\varphi^{-1}|_{\varphi(\hat{U})}"'] & f(\varphi(\hat{U})) \\
\hat{U} \arrow[r, "\hat{f}|_{\hat{U}}"'] & \hat{f}(\hat{U}) \arrow[u, "\psi|_{\hat{f}(\hat{U})}"']
\end{tikzcd}$$

Esta vez son todos difeomorfismos: $\hat{f}|_{\hat{U}}$ por el teorema de la función inversa, $\psi|_{\hat{f}(\hat{U})}$ y $\varphi^{-1}|_{\varphi(\hat{U})}$ por restricciones de difeomorfismos, de donde por la conmutatividad del diagrama (i.e. por composición), $f|_{\varphi(\hat{U})} : \varphi(\hat{U}) \to f(\varphi(\hat{U}))$ es un difeomorfismo. Tomando $X = \varphi(\hat{U})$ tenemos demostrado el teorema. □

Que para *algún* $p \in M$ el diferencial de f en p sea un isomorfismo, ya sabemos que no garantiza que f sea un difeomorfismo (el teorema de la función inversa nos garantiza que será un difeomorfismo *local*). Pero si pedimos hipótesis más fuertes, podemos encontrar una condición suficiente (muy fuerte, en realidad) para que un mapa sea un difeomorfismo:

Corolario 4.5.6. *Sean M y N variedades y $f : M \to N$ un mapa diferenciable, biyectivo, y que verifica que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es un isomorfismo lineal para todo $p \in M$. Entonces f es un difeomorfismo.*

Demostración. Lo único que nos falta ver es que $f^{-1} : N \to M$ es diferenciable. Sea $q \in N$, entonces $q = f(p)$ para algún $p \in M$. Por el teorema de la función inversa, existe un entorno abierto relativo $W_q \subset N$ de q tal que

$$f^{-1}|_{W_q} : W_q \to f^{-1}(W_q) \subset M$$

es un difeomorfismo (en particular, es diferenciable). Para cada q encontramos un W_q, entonces los W_q cubren N y $f^{-1} : N \to M$ es un difeomorfismo global (en particular, es diferenciable), y ya está. □

4.6. Orientación

La idea de esta sección es introducir una *orientación* en una variedad. Por ejemplo, una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ podemos recorrerla en sentido horario o antihorario. En una superficie, la clásica "regla de la mano derecha" nos da una orientación. Pero éste no es un método muy satisfactorio, y no se puede generalizar fácilmente.

La estrategia para orientar una variedad será orientar los espacios tangentes en cada punto. Esto es más sencillo, ya que los espacios tangentes son hiperplanos y quedan unívocamente determinados eligiendo una base.

4.6.1. Orientación de espacios vectoriales

En esta sección, V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Motivemos un poco la próxima definición.

¿Por qué decir "en sentido horario" nos "orienta" el plano? Bueno, el plano está determinado por linealidad por los vectores canónicos e_1 y e_2. Entonces si yo tengo e_1, digo que ir hacia e_2 es ir en sentido antihorario y digo que es esa "orientación" la que voy a tomar. Podría haber dicho que desde e_1, me voy hacia $-e_2$, y también "orienté" el plano (en sentido horario).

¿Por qué la "regla de la mano derecha" nos "orienta" el espacio? Para empezar, tomamos una orientación del plano xy, por ejemplo, la antihoraria. Entonces, al hacer ese juego con las manos, lo que estamos haciendo es, dados e_1 y e_2, en ese orden (no es lo mismo ir de uno al otro que viceversa), elegir e_3, y decretar que eso es un orden positivo (cf. producto vectorial).

En definitiva, en los dos casos estamos haciendo lo mismo, o sea, tomar una base del espacio y darle un signo. Y además vemos que en un espacio vectorial sólo habrá dos orientaciones posibles. A una que elijamos le llamaremos positiva (en el plano, solemos elegir la antihoraria, y en el espacio, la que cumple la regla de la mano derecha), y la otra será la negativa.

Definición 4.6.1. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases ordenadas de V, diremos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ *tienen la misma orientación* si el determinante de cambio de base es positivo, es decir si

$$\det {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} > 0$$

Observación 4.6.2. La relación "tener igual orientación" es una relación de equivalencia en el conjunto de las bases ordenadas de V.

Demostración. Verifiquemos las tres propiedades de una relación de equivalencia:

- Reflexiva: $\det {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = \det \mathrm{id} = 1 > 0$
- Simétrica: Si $\det {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} > 0$, entonces:

$$\det {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'} = \det \left({}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \left(\det {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\right)^{-1} > 0$$

- Transitiva: Si $\det {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} > 0$ y $\det {}_{\mathcal{B}''}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'} > 0$, entonces

$$\det {}_{\mathcal{B}''}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = \det \left({}_{\mathcal{B}''}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}\, {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\right) = \det \left({}_{\mathcal{B}''}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}\right) \det \left({}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}\right) > 0 \qquad \square$$

Definición 4.6.3. Una *orientación* de V es una clase de equivalencia de la relación "tener igual orientación". Un *espacio vectorial orientado* es un par (V, ξ) donde ξ es una orientación de V.

Proposición 4.6.4. *Hay exactamente dos orientaciones de V.*

Demostración. Si tomamos $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{-x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces una base $\mathcal{C}$ cualquiera es equivalente o a $\mathcal{B}$ o a $\mathcal{B}'$. Entonces hay sólo dos clases de equivalencia, la de $\mathcal{B}$ y la de $\mathcal{B}'$. □

Observación 4.6.5. Al haber entonces sólo dos orientaciones posibles, orientar un espacio vectorial (i.e. asignarle una orientación) es lo mismo que elegir una base y asignarle un signo, + o -. En $\mathbb{R}^n$, la *orientación estándar* será la clase de equivalencia de la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$, o en otras palabras, la base canónica tendrá signo positivo.

Proposición 4.6.6. *Sean V y W dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita orientados, y $T : V \to W$ un isomorfismo lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una base positiva $\mathcal{B}$ de V tal que $T(\mathcal{B})$ es una base positiva de W.*
2. *Para toda base positiva $\mathcal{B}$ de V se verifica que $T(\mathcal{B})$ es una base positiva de W.*

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1): es trivial sabiendo que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.
1) $\Rightarrow$ 2): para empezar, recordar que ya sabemos que si $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces $T(\mathcal{B})$ es una base de W (como T es un isomorfismo lineal, lleva bases en bases). Sea $\mathcal{B}$ una base positiva de V tal que $T(\mathcal{B})$ es positiva. Sea $\mathcal{B}'$ otra base positiva de V. Tenemos que:

$$_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = {}_{T(\mathcal{B}')}[\mathrm{id}]_{T(\mathcal{B})}$$

En efecto: sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$. Si $v_i = a_1 v'_1 + \cdots + a_n v'_n$ entonces

$$T(v_i) = T(a_1 v'_1 + \cdots + a_n v'_n) = a_1 T(v'_1) + \cdots + a_n T(v'_n)$$

Como eso se cumple para todo $i = 1, \ldots, n$ entonces las n columnas de esas dos matrices son iguales, luego son iguales. Entonces ya está, pues $_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} > 0$ pues las dos bases son positivas, luego $_{T(\mathcal{B}')}[\mathrm{id}]_{T(\mathcal{B})} > 0$, entonces $T(\mathcal{B}')$ es positiva, que es lo que queríamos probar. □

Definición 4.6.7. Si $T : V \to W$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita orientados, diremos que es *compatible* con la orientación de W, o que *preserva* la orientación si existe una base positiva $\mathcal{B}$ de V tal que $T(\mathcal{B})$ es una base positiva de W, y que *invierte* la orientación en caso contrario.

Observación 4.6.8. Un isomorfismo lineal o preserva o invierte la orientación.

Ejemplo 4.6.9. La identidad id: $V \to V$ preserva la orientación si y sólo si se considera V con la misma orientación en el dominio y en el codominio.

Proposición 4.6.10. *Sea V un espacio vectorial orientado y $T : V \to V$ un isomorfismo. Entonces T preserva orientación si y sólo si* $\det T > 0$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ bases positivas tales que $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. Entonces

$$\det T = \det {}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'} = \det \left({}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}\right) \det \left({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}\right) > 0$$

pues ${}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Id}$ y T preserva orientación, con $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases positivas.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{B}$ base positiva de V. Entonces

$$0 < \det T = \det {}_{T(\mathcal{B})}[T]_{T(\mathcal{B})} = \det \left({}_{T(\mathcal{B})}[T]_{\mathcal{B}}\right) \det \left({}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{T(\mathcal{B})}\right) = \det {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{T(\mathcal{B})}$$

luego $\det {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{T(\mathcal{B})} > 0$; invirtiendo, $\det {}_{T(\mathcal{B})}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} > 0$ y por lo tanto T preserva orientación. $\square$

4.6.2. Orientación de variedades

Una orientación de una variedad M será una "elección diferenciable" de orientaciones de T_pM, para todo $p \in M$. La definición que daremos no parece condecir con esta idea, pero la proposición 4.6.16 las vinculará.

Definición 4.6.11. Una variedad M es *orientable* si existe un atlas $\mathcal{A}$ de M tal que: si $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ y $\varphi : U \to M$, $\psi : V \to M$ cumplen que $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$, entonces, si $\varphi(U) \cap \psi(V) = \Xi$ y $f = (\psi^{-1} \circ \varphi)|_{\varphi^{-1}(\Xi)}$ (el cambio de coordenadas):

$$\det df_q > 0, \qquad \forall q \in \varphi^{-1}(\Xi).$$

Diremos que un tal atlas es una *orientación* de M (o que un tal atlas es *compatible*).[1]

$$\begin{tikzcd}
 & \varphi(U) \cap \psi(V) = \Xi \arrow[dr, "\psi^{-1}|_{\Xi}"] & \\
\varphi^{-1}(\Xi) \arrow[ur, "\varphi|_{\varphi^{-1}(\Xi)}"] \arrow[rr, "f"'] & & \psi^{-1}(\Xi)
\end{tikzcd}$$

Definición 4.6.12. Dada una orientación $\mathcal{A}$ de una variedad M orientable, decimos que el par $(M, \mathcal{A})$ es una *variedad orientada*.

La definición de orientación parece enrevesada pero no lo es tanto. Dicho con palabras (de [dC]): una variedad es orientable si es posible recubrirla con una familia de entornos coordenados de forma que si un punto p pertenece a dos entornos de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en p.

¿Por qué el jacobiano? No es un capricho definirlo así, viene de la orientación de los planos tangentes. Supongamos que $p \in \Xi$ es tal que $\varphi(q) = p$ y $\psi(r) = p$. ¿Cómo se relaciona el jacobiano con la orientación de los planos tangentes?

Tenemos dos parametrizaciones φ y ψ alrededor de p. Cada una induce una base para T_pM: $\mathcal{B} = \{\varphi_{u_1}(q), \ldots, \varphi_{u_n}(q)\}$ y $\mathcal{B}' = \{\psi_{u_1}(r), \ldots, \psi_{u_n}(r)\}$. Es

[1] Formalmente, debemos requerir además que semejante atlas sea *maximal*, en el sentido que si $\nu : V \to M$ es una parametrización tal que para toda $\mathcal{A} \ni \varphi : U \to M$ con $\varphi(U) = \nu(V)$ se tiene que el cambio de coordenadas es diferenciable, entonces $\nu \in \mathcal{A}$.

fundamental observar que ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = Jf(q)$ (ver lema 4.6.21), por lo tanto $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tienen la misma orientación si y sólo si el jacobiano de f es positivo. O sea, cuando pedimos que el jacobiano del cambio de coordenadas sea positivo, estamos pidiendo que φ y ψ induzcan la misma orientación al espacio tangente. En definitiva, acabamos de probar la siguiente

Proposición 4.6.13. *Sea M una variedad. Un atlas $\mathcal{A}$ es una orientación de M si y sólo si para cada $p \in M$ toda parametrización que rodea a p induce la misma orientación en T_pM.*

Observación 4.6.14. La proposición anterior nos dice que una variedad orientable siempre admite *al menos* dos orientaciones. En efecto, dada una orientación $\mathcal{A}$, podemos obtener una segunda tomando aquellas parametrizaciones que para cada $p \in M$ inducen la orientación *opuesta* en T_pM que la que inducen las parametrizaciones de $\mathcal{A}$. Explícitamente, basta tomar el mismo atlas pero orientando $\mathbb{R}^n$ con la orientación opuesta. Podemos entonces hacer la siguiente

Definición 4.6.15. Sea M una variedad orientada. Notaremos $-M$ a la variedad orientada con la orientación opuesta (en el sentido de la observación precedente).

Con la formulación de la proposición anterior, estamos induciendo a cada T_pM una orientación por las parametrizaciones que rodean a p, y pidiendo que todas induzcan la misma. Podemos mirarlo *al revés*, es decir, fijar primero una orientación de T_pM y pedir que los diferenciales de las parametrizaciones preserven su orientación. Entonces conseguimos la siguiente formulación equivalente:

Proposición 4.6.16. *Sea M una variedad. Un atlas $\mathcal{A}$ es una orientación de M si y sólo si para cada $p \in M$ podemos elegir una orientación de T_pM de modo tal que toda parametrización φ de $\mathcal{A}$ que rodea a p, con $\varphi(q) = p$ verifica que $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to T_pM$ preserva la orientación (tomando $\mathbb{R}^n$ con la orientación estándar).*

Definición 4.6.17. Si $(M, \mathcal{A})$ es una variedad orientada y $\varphi : U \to \varphi(U) \subset M$ es una parametrización cualquiera de M, decimos que φ es *compatible con la orientación de M* (o aun, que *preserva la orientación*) si $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to T_pM$ preserva la orientación, para todo $p = \varphi(q) \in \varphi(U)$. Tomamos en $\mathbb{R}^n$ la orientación estándar, y en T_pM la inducida por la orientación de M.

Definición 4.6.18. En general, sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades orientadas. Diremos que f es *compatible con la orientación de N*, o que *preserva la orientación* si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ preserva la orientación, para todo $p \in M$. Diremos que *invierte* la orientación si df_p invierte la orientación, para todo $p \in M$. Tomamos en T_pM la orientación inducida por M y en $T_{f(p)}N$ la orientación inducida por N.

Observación 4.6.19. Un difeomorfismo $f : M \to N$ entre variedades orientadas no tiene por qué preservar o invertir la orientación. Es un ejercicio probar que si M es conexa entonces f preserva o invierte la orientación, y que basta verificarlo en un punto $p \in M$.

Con esta definición, la proposición anterior queda en:

Proposición 4.6.20. *Sea M una variedad. Un atlas $\mathcal{A}$ es una orientación de M si y sólo si para cada $p \in M$ podemos elegir una orientación de T_pM de modo tal que toda parametrización φ de $\mathcal{A}$ que rodea a p preserva la orientación.*

Todo esto siempre y cuando uno se crea el siguiente

Lema 4.6.21. *Sea M una variedad, $\varphi : U \to M$ y $\psi : V \to M$ dos parametrizaciones alrededor de $p \in M$, $f : U \to V$ el cambio de coordenadas. Si notamos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ a las bases inducidas por φ y ψ respectivamente, entonces ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = Jf(q)$.*

Demostración. Para simplificar notaciones, tomaremos como variedad una superficie regular S, y $\varphi : U \to \varphi(U) \subset S$, $\psi : V \to \psi(V) \subset S$ parametrizaciones tales que $\psi(V) = \varphi(U)$. Si $f = \psi^{-1} \circ \varphi$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \varphi(U) = \psi(V) & \\ U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "f"'] & & V \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Luego aplicando la regla de la cadena: $d\varphi_q = d(\psi \circ f)_q = d\psi_{f(q)} \circ df_q$ entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_u(q) &= \psi_u(r)\, f_{1u}(q) + \psi_v(r)\, f_{2u}(q) \\ \varphi_v(q) &= \psi_u(r)\, f_{1v}(q) + \psi_v(r)\, f_{2v}(q) \end{aligned}$$

Esto nos dice exactamente lo que queremos probar por la definición de matriz de cambio de base. □

Ejemplo 4.6.22. Si tenemos un atlas formado por una sola parametrización, entonces es una orientación: el cambio de coordenadas es la identidad cuyo jacobiano es 1. En la práctica, casi siempre utilizaremos una sola parametrización. Entonces hablaremos de la orientación que induce esta parametrización en la variedad.

Ejemplo 4.6.23. Si una variedad es el gráfico de una función diferenciable, entonces se puede cubrir por una sola parametrización, luego es orientable.

Como ya habíamos adelantado, venimos definiendo y caracterizando la orientabilidad de una variedad en términos de la orientabilidad de sus espacios tangentes, una tarea más sencilla.

Habíamos observado que una variedad orientable admite al menos dos orientaciones. Para terminar esta sección, demostremos que una variedad orientable y *conexa* admite *exactamente* dos orientaciones.

Teorema 4.6.24. *Una variedad M conexa y orientable admite exactamente dos orientaciones.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos orientaciones de M. Sea $A \subset M$ el conjunto de puntos p donde las parametrizaciones de $\mathcal{A}$ que rodean a p inducen la misma orientación a T_pM que las de $\mathcal{A}'$ que rodean a p, y $B \subset M$ el conjunto donde inducen orientaciones opuestas. A y B son abiertos, porque si en un punto de A (resp. B) el jacobiano del cambio de coordenadas es positivo (resp. negativo)

también lo es en un entorno del punto. Además $M = A \cup B$ pues los espacios tangentes tienen sólo dos orientaciones. Como M es conexo y esta unión es disjunta, o $B = \emptyset$ (el jacobiano de los cambios de coordenadas siempre es positivo) o $A = \emptyset$ (el jacobiano de los cambios de coordenadas siempre es negativo). Nos elegimos dos orientaciones cualquiera y vimos que eran la misma o eran opuestas, por lo tanto sólo hay dos maneras de orientar M. $\square$

4.6.3. Orientación de curvas y superficies

Definición 4.6.25. Si $M \subset \mathbb{R}^k$ es una variedad, entonces un *campo vectorial* en M es una función diferenciable $F : M \to \mathbb{R}^k$; un *campo escalar* en M es una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$.

Un *campo tangente* en M es un campo vectorial $F : M \to \mathbb{R}^k$ tal que $F(p) \in T_pM$ para todo $p \in M$.

Un *campo normal* en M es un campo vectorial $F : M \to \mathbb{R}^k$ tal que $F(p) \perp T_pM$ para todo $p \in M$.

Un *campo unitario* en M es un campo tal que $\|F(p)\| = 1$ para todo $p \in M$.

Orientación de curvas

En esta sección, una *curva* $C \subset \mathbb{R}^k$ será una variedad conexa de dimensión 1.

Para orientar curvas, hay un criterio particular que resulta útil e intuitivo: *una curva es orientable si y sólo si admite un campo tangente unitario.*

Proposición 4.6.26. *Una curva C es orientable si y sólo si admite un campo tangente unitario.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{A}$ una orientación de C y sean $\alpha : I \to C$, $\beta : J \to C$ dos parametrizaciones de C tales que $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Supongamos que $\alpha(I) = \beta(J)$, y sea $f = \beta^{-1} \circ \alpha$ el cambio de coordenadas.

$$\begin{tikzcd} & \alpha(I) = \beta(J) \arrow[dr, "\beta^{-1}"] & \\ I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "f"'] & & J \end{tikzcd}$$

Tenemos sg $(f') > 0$ ya que como α y β preservan la orientación de C, entonces f es un difeomorfismo que preserva orientación.

Como $\alpha = \beta \circ f$, entonces por la regla de la cadena, $\alpha'(t) = \beta'(f(t))\, f'(t)$. Definimos el campo $T : \alpha(I) \to \mathbb{R}^k$ mediante

$$T(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} \frac{\beta'(f(t))}{\|\beta'(f(t))\|} = \frac{\beta'(f(t))}{\|\beta'(f(t))\|}$$

Podemos tener entonces el campo T tangente unitario bien definido en toda C.

($\Leftarrow$) Sea $T : C \to \mathbb{R}^k$ un campo tangente unitario. Dada una parametrización $\alpha : I \to C$ tal que $\alpha(t) = p$ para ciertos $t \in I, p \in C$, tenemos que o bien

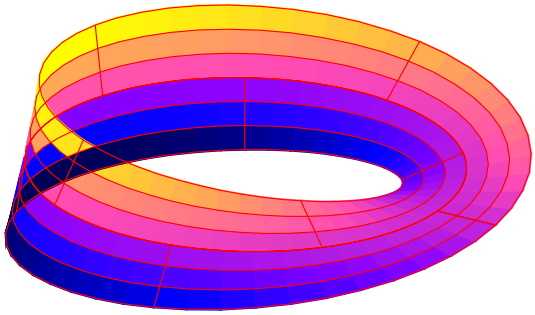


Figura 4.13: Banda de Möbius: una superficie no orientable

$T(p) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ o bien $T(p) = -\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$. Eligiendo parametrizaciones alrededor de cada punto de C tales que cumplen todas lo primero o todas lo segundo, tenemos un atlas que es una orientación de C. $\square$

Observación 4.6.27. De hecho, al final de la demostración vemos cómo conseguir *dos* orientaciones de C que podemos calificar de opuestas: aquella coherente con el campo T, y aquella coherente con el campo $-T$.

Observación 4.6.28. Recordemos el *teorema de clasificación de curvas*: toda variedad conexa de dimensión 1 es difeomorfa a S^1 o a un intervalo real. Por lo tanto, toda curva conexa es orientable, pues tanto S^1 como un intervalo real son orientables.

Orientación de superficies

Para orientar superficies, hay un criterio particular que resulta muy útil, y es que *una superficie es orientable si y sólo si admite un campo normal unitario*. Por ejemplo, la banda de Möbius (ver figura 4.13) no es orientable porque si una hormiga empieza a caminar desde un punto por arriba de la banda hacia la izquierda, al dar una vuelta llega por la derecha al mismo punto, pero por abajo. Entonces no tenemos un campo normal unitario continuo: a dicho punto le estaríamos asignando un vector normal hacia arriba y otro hacia abajo. Otro ejemplo de superficie no orientable (en $\mathbb{R}^4$) es la botella de Klein mencionada en la sección 4.1.

Una manera de construir una banda de Möbius es la siguiente: si tenemos una banda rectangular y unimos dos lados opuestos sin torcer los bordes, obtenemos un cilindro. Torciéndolos, obtenemos una banda de Möbius.

Proposición 4.6.29. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, y $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \varphi(U) \subset S$ una parametrización. Si $p \in \varphi(U)$ y $p = \varphi(q)$, entonces el campo $N : \varphi(U) \to \mathbb{R}^3$ definido por:*

$$N(p) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q)$$

donde $\times$ indica el producto vectorial, es un campo normal unitario. Además no depende de la parametrización elegida (a menos de un signo).

Demostración. Está claro que $\|N(p)\| = 1$ para todo $p \in \varphi(U)$. Como $\mathcal{B} = \{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ es una base de T_pS entonces $\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q)$ es normal a T_pS (es la gracia del producto vectorial). Está claro que es diferenciable.

Sea ahora $\psi : V \to \psi(V) \subset S$ otra parametrización tal que $\psi(V) = \varphi(U)$. Si $p = \psi(r)$, definimos $N_\psi : \varphi(U) \to \mathbb{R}^3$ por $N_\psi(p) = \frac{\psi_u \times \psi_v}{\|\psi_u \times \psi_v\|}(r)$ queremos probar que $N_\psi = \pm N$. Sea $f = \psi^{-1} \circ \varphi : U \to V$ el cambio de coordenadas. Recordemos que si $\mathcal{B}' = \{\psi_u(r), \psi_v(r)\}$ entonces ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = Jf(q)$, de donde:

$$\begin{aligned}
\varphi_u(q) &= \psi_u(r)\, f_{1u}(q) + \psi_v(r)\, f_{2u}(q) \\
\varphi_v(q) &= \psi_u(r)\, f_{1v}(q) + \psi_v(r)\, f_{2v}(q)
\end{aligned}$$

Hagamos el producto vectorial:

$$\begin{aligned}
\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) &= (\psi_u(r)\, f_{1u}(q) + \psi_v(r)\, f_{2u}(q)) \times (\psi_u(r)\, f_{1v}(q) + \psi_v(r)\, f_{2v}(q)) \\
&= \psi_u(r)\, f_{1u}(q) \times \psi_v(r)\, f_{2v}(q) + \psi_v(r)\, f_{2u}(q) \times \psi_u(r)\, f_{1v}(q) \\
&= \det(Jf(q))\ \psi_u(r) \times \psi_v(r)
\end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)$ y $\psi_u(r) \times \psi_v(r)$ son colineales. Al normalizar nos garantizamos que $N(p) = \pm N_\psi(p)$, según el signo del jacobiano. □

Lema 4.6.30. *Si M es una variedad conexa y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función continua que nunca se anula, entonces f es de signo constante.*

Demostración. Supongamos que f cambia de signo, es decir existen $p, q \in M$ tales que $f(p) < 0, f(q) > 0$. Sea $\alpha : [0,1] \to M$ continua tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Entonces $f \circ \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, y $f(\alpha(0)) = f(p) < 0, f(\alpha(1)) = f(q) > 0$. Por el teorema de Bolzano existe $c \in [0,1]$ tal que $f(\alpha(c)) = 0$, pero entonces f se anula en $\alpha(c)$, absurdo. □

Lema 4.6.31. *Sea M una variedad. Entonces siempre es posible elegir un atlas cuyas parametrizaciones tengan dominio y entorno coordenado conexos.*

Demostración. Sea $p \in M$, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ una parametrización alrededor de p, con $p = \varphi(q)$. Como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(q, \delta) \subset U$. Sea $U_0 = B(q, \delta)$, entonces $\varphi|_{U_0} : U_0 \to \varphi(U_0)$ es una parametrización alrededor de p cuyo dominio es conexo. Además como φ es continua, el entorno coordenado $\varphi(U_0)$ también es conexo. Tomando tales parametrizaciones para cada p, encontramos un atlas como queríamos. □

Teorema 4.6.32. *Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo si existe un campo normal unitario $N : S \to \mathbb{R}^3$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{A}$ una orientación de S. Definimos N de la siguiente manera: si $p \in S$, entonces está cubierto por una parametrización $\varphi : U \to S$, y definimos N como en la proposición 4.6.29. Al ser $\mathcal{A}$ una orientación, el jacobiano del cambio de coordenadas es positivo, por lo tanto esta definición no depende de la elección de la parametrización y N está bien definido. Es diferenciable pues es diferenciable en cada entorno coordenado, y ya sabemos que siempre es normal y

unitario.

($\Leftarrow$) Sea $N : S \to \mathbb{R}^3$ un campo normal unitario. Sea $\mathcal{A}$ un atlas de S como en el segundo lema. Sea $p_0 \in S$ fijo, entonces $p_0 = \varphi(q_0)$ para alguna parametrización $\varphi : U \to S$. Por la proposición anterior, tenemos necesariamente que:

$$\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q_0) = \pm N(p_0)$$

Si la igualdad anterior se da con un (+), entonces no hacemos nada. Si se da con un (-), cambiamos U por $\tilde{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (v, u) \in U\}$. Definiendo φ en $\tilde{U}$ en vez de en U, tenemos, por la anticonmutatividad del producto vectorial, que se da la igualdad con un (+). Modificando φ de tal manera si es necesario, tenemos que:

$$\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q_0) = N(p_0)$$

Probemos ahora que teniendo φ así para un $p_0 \in \varphi(U)$, entonces se cumple la anterior igualdad para todo $p \in \varphi(U)$, $p = \varphi(q)$.

Sea $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q) \cdot N(p)$$

Sabemos que f no se anula (toma valores 1 ó -1), y que $f(p_0) = 1$. Pero f es una función diferenciable, definida en un conexo, que no se anula nunca, entonces es de signo constante por el primer lema, luego $f(p) = 1$ para todo $p \in \varphi(U)$. Entonces se cumple:

$$\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q) = N(p), \qquad \forall p \in \varphi(U)$$

Consideremos ahora el atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ formado por tales φ. Tomemos $\varphi : U \to S, \psi : V \to S$ parametrizaciones de $\tilde{\mathcal{A}}$, tales que $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Luego si $p \in \varphi(U) \cap \psi(V)$, $p = \varphi(q)$ y $f = \psi^{-1} \circ \varphi$ es el cambio de coordenadas:

$$\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) = \det(Jf(q))\ \psi_u(r) \times \psi_v(r)$$

Por cómo construimos $\tilde{\mathcal{A}}$, necesariamente $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)$ y $\psi_u(r) \times \psi_v(r)$ son colineales y de mismo sentido, de donde $\det(Jf(q)) > 0$ para todo $q \in \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$, por lo tanto $\tilde{\mathcal{A}}$ es una orientación de S y S es orientable. $\square$

Observación 4.6.33. Si $v, w \in \mathbb{R}^3$ son no colineales, entonces $(v \times w, v, w)$ es una base positiva de $\mathbb{R}^3$ con la orientación usual. En efecto, recordemos de álgebra lineal que

$$\det(v \times w, v, w) = \langle v \times w, v \times w \rangle = \|v \times w\|^2 > 0$$

En particular, si tenemos un campo normal unitario N en la superficie regular S, la orientación que conseguimos con el teorema anterior es tal que si $p \in S$ y $\{v, w\} \subset T_pS$ es una base positiva, entonces $\{N(p), v, w\}$ es una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

Corolario 4.6.34. *Si una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es preimagen de un valor regular, entonces es orientable.*

Demostración. Sea S tal que $S = f^{-1}(\{a\})$, con $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene a $a \in \mathbb{R}$ como valor regular. En la proposición 4.4.15 ya demostramos que si $p \in S$, entonces $T_pS = \{\nabla f(p)\}^\perp$. Por lo tanto definiendo $N : S \to \mathbb{R}^3$ por $N(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ tenemos un campo normal unitario, luego S es orientable por el teorema anterior. □

Ejemplo 4.6.35. El toro T^2 es orientable, pues ya probamos que era preimagen de valor regular en el ejemplo 4.3.8.

Observación 4.6.36.

- El recíproco del corolario anterior es cierto: toda superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ orientable es preimagen de un valor regular. La demostración depende de la existencia de un *entorno tubular*: ver sección 2.7 de [dC].
- Al final de esa misma sección se da una referencia para la demostración del interesante teorema que afirma que toda superficie regular compacta es orientable.

4.7. Variedades con borde

4.7.1. Variedades con borde

Definición 4.7.1. Definimos el *semiespacio superior* como

$$\mathbb{H}^n \overset{\text{def.}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Definimos su *borde* como

$$\partial\mathbb{H}^n \overset{\text{def.}}{=} \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) : x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots, n-1\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Definimos también $-\mathbb{H}^n$, el *semiespacio inferior*, como

$$-\mathbb{H}^n \overset{\text{def.}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \leq 0\}$$

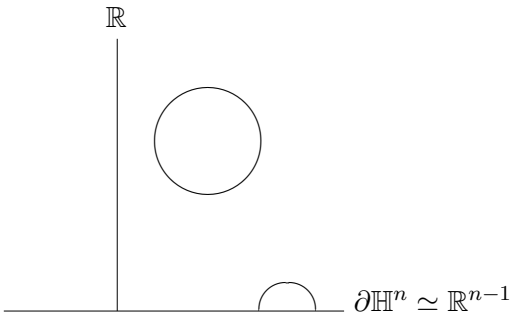
Observación 4.7.2. Identificaremos canónicamente $\partial\mathbb{H}^n$ con $\mathbb{R}^{n-1}$.

Definiremos variedad con borde análogamente a como definimos variedad, sólo que pediremos que sea localmente difeomorfa a un abierto de $\mathbb{H}^n$ en vez de a uno de $\mathbb{R}^n$:

Definición 4.7.3. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$. Decimos que M es una *variedad diferenciable con borde de dimensión n* si para todo $p \in M$ existe un entorno abierto de p, $W \subset \mathbb{R}^k$ tal que $W \cap M$ es difeomorfo a un abierto de $\mathbb{H}^n$.

Como siempre, diremos *variedad con borde* a secas para referirnos a una variedad diferenciable con borde. Mantendremos la terminología usual de variedades, es decir parametrización, entorno coordenado, atlas, etc. Con respecto a las parametrizaciones, en vez de tomar un abierto de $\mathbb{R}^n$ como dominio, tomaremos un abierto de $\mathbb{H}^n$ como dominio.

Observación 4.7.4. Recordemos del curso de topología que $V \subset \mathbb{H}^n$ es un abierto de $\mathbb{H}^n$ si $V = U \cap \mathbb{H}^n$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, las bolas de $\mathbb{H}^n$ son, además de aquellas bolas de $\mathbb{R}^n$ que no se intersectan con $\partial\mathbb{H}^n$ (i.e. las que están enteras en el semiespacio superior), las intersecciones de bolas de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{H}^n$, su "borde" incluido.



Por esta razón, toda variedad es una variedad con borde (si es localmente difeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$, trasladamos el abierto entero al semiespacio superior y nada cambia).

Definición 4.7.5. Sea $U \subset \mathbb{H}^n$ abierto de $\mathbb{H}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ un mapa diferenciable y $p \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$. Entonces si $F : W \to \mathbb{R}^m$ es una extensión diferenciable de f a un entorno de p abierto de $\mathbb{R}^n$, definimos el *diferencial* de f en p por:

$$df_p \overset{\text{def.}}{=} dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Esta definición es necesaria: recordemos que al definir diferenciabilidad en conjuntos cualesquiera, no pudimos definir sin embargo el *diferencial*: no conseguíamos necesariamente la independencia de la elección de una extensión de la función. En este caso en particular, podremos (tendremos que verificarlo a continuación, si no esta definición seguiría sin tener sentido). Por otro lado, habíamos definido el diferencial de un mapa entre variedades. Veremos que $\mathbb{H}^n$ no es una variedad (en el sentido habitual), y por lo tanto no estamos trabajando de más.

Proposición 4.7.6. *El diferencial anterior está bien definido. Es decir, todas las extensiones de f tienen el mismo diferencial.*

Demostración. Si $p \notin \partial\mathbb{H}^n$, no hay nada que verificar. Supongamos $p \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$: queremos ver que si $F = (F_1, \ldots, F_m) : W \to \mathbb{R}^m$ es una extensión diferenciable de $f = (f_1, \ldots, f_m)$ con W entorno de p abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no depende de la elección de F. Tenemos que:

$$dF_p = (d(F_1)_p, \ldots, d(F_m)_p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) &\overset{\text{def.}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{F_i(p + te_j) - F_i(p)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F_i(p + te_j) - F_i(p)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f_i(p + te_j) - f_i(p)}{t} \end{aligned}$$

Tenemos la última igualdad gracias a que F es precisamente una extensión de f, definida en $\mathbb{H}^n$. Pero entonces dF_p depende sólo de f. $\square$

Teorema 4.7.7 (Invariancia de dominio, versión diferenciable)**.** *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $S \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto y $f : U \to S$ un difeomorfismo. Entonces S es abierto en $\mathbb{R}^n$.*[2]

Demostración. Sea $p \in U$. Como $f : U \to S$ es un difeomorfismo, esto significa que existen $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $S \subset V$ y $g : V \to \mathbb{R}^n$ un mapa diferenciable tal que $g|_S = f^{-1}$. De esta forma, $g \circ f = \mathrm{id}_U$.

Por la regla de la cadena, $dg_{f(p)} \circ df_p = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Esto muestra que df_p tiene una inversa por izquierda, así que es inyectivo. Como $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces es un isomorfismo.

Por el teorema de la función inversa, existen entornos abiertos $U_p \subset U$ y $V_{f(p)} \subset V$ de p y de $f(p)$ respectivamente, de manera tal que $f|_{U_p} : U_p \to V_{f(p)}$ es un difeomorfismo.

Esto prueba que $f(p) \in V_{f(p)} = f(U_p) \subset f(U) = S$; como $V_{f(p)}$ es abierto en V y V es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_{f(p)}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Como p es arbitrario, esto prueba que todo punto de S tiene un entorno en S abierto en $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto S es abierto en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Ahora podemos probar que un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{H}^n$ manda puntos interiores en puntos interiores, y puntos del borde en puntos del borde.

Proposición 4.7.8. *Sean $U, V \subset \mathbb{H}^n$ abiertos de $\mathbb{H}^n$ y $f : U \to V$ un difeomorfismo. Entonces $f(U \setminus \partial\mathbb{H}^n) \subset V \setminus \partial\mathbb{H}^n$, y $f(U \cap \partial\mathbb{H}^n) \subset V \cap \partial\mathbb{H}^n$.*

Demostración. Sea $p \in U \setminus \partial\mathbb{H}^n$. Entonces existe una bola $B \subset \mathbb{H}^n$ abierta en $\mathbb{R}^n$ tal que $p \in B$. Por el teorema 4.7.7, $f(B)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $f(p) \in f(B) \subset V \setminus \partial\mathbb{H}^n$. Como p es arbitrario, esto prueba que $f(U \setminus \partial\mathbb{H}^n) \subset V \setminus \partial\mathbb{H}^n$.

Sea $p \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$. Entonces $f^{-1}(f(p)) = p \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$. Como f^{-1} es un difeomorfismo, lo que probamos recién aplicado a f^{-1} prueba que $f(p) \notin V \setminus \partial\mathbb{H}^n$. Por lo tanto $f(p) \in V \cap \partial\mathbb{H}^n$. Como p es arbitrario, esto prueba que $f(U \cap \partial\mathbb{H}^n) \subset V \cap \partial\mathbb{H}^n$. $\square$

Corolario 4.7.9. *$\mathbb{H}^n$ y $\mathbb{R}^n$ no son difeomorfos.*

Tenemos entonces que si $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ es una parametrización con $q \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$ y $p = \varphi(q)$, entonces si $\psi : V \subset \mathbb{H}^n \to M$ es otra parametrización tal que $V \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$, se tiene que $p \neq \psi(r)$, para todo $r \in V$. Podemos pues hacer la siguiente

Definición 4.7.10. El *borde* de una variedad M, denotado por ∂M, consiste en aquellos puntos de M que son la imagen por alguna parametrización de un punto que está en $\partial\mathbb{H}^n$, es decir:

$$\partial M \overset{\text{def.}}{=} \{p \in M : \exists\, \varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M \text{ parametrización} : p = \varphi(q), \text{ con } q \in U \cap \partial\mathbb{H}^n\}$$

[2] La versión continua de este teorema dice que si un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces es abierto en $\mathbb{R}^n$. Ese teorema es considerablemente más difícil de probar.

El *interior* de una variedad es $\mathring{M} \overset{\text{def.}}{=} M \setminus \partial M$.

Decimos que M es una *variedad sin borde* si es una variedad en el sentido usual, es decir si $\partial M = \emptyset$.

Observación 4.7.11. Atención: por más que utilicemos el signo ∂ para el borde de una variedad, no tiene en general nada que ver con el borde topológico (la frontera) de un conjunto. Ídem para el interior.

Ejercicio 4.7.12. Probar que si $f : M \to N$ es un mapa diferenciable entre variedades con borde, entonces $f(\partial M) \subset \partial N$, y $f(\mathring{M}) \subset \mathring{N}$.

Definición 4.7.13. Damos las definiciones de espacio tangente y de diferencial para mapas entre variedades con borde. Son análogas a las de variedades sin borde y verifican las mismas propiedades:

- Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad con borde y $p \in M$. Si $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ es una parametrización y $p = \varphi(q)$, definimos $T_pM \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{Im} d\varphi_q$ (este diferencial es el que definimos recién). Valen las propiedades $\dim T_pM = n$ y $d\varphi_q : \mathbb{R}^n \to T_pM$ es un isomorfismo.

- Si M y N son variedades con borde, $f : M \to N$ es un mapa diferenciable y $p \in M$, definimos su diferencial mediante $df_p \overset{\text{def.}}{=} dF_p|_{T_pM} : T_pM \to T_{f(p)}N$, con F una extensión diferenciable de f a un entorno abierto de p en $\mathbb{R}^k$.

Observación 4.7.14. Es claro que si $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ es una parametrización de M, entonces $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n}$ es una parametrización de ∂M. Además si tales φ forman un atlas de M, entonces las $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n}$ forman un atlas de ∂M.

Proposición 4.7.15. *El borde de una variedad con borde M de dimensión n es una variedad sin borde de dimensión $n-1$.*

Demostración. Como $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ es un abierto de $\partial\mathbb{H}^n$, entonces con la identificación canónica $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, tenemos que $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n} : U \cap \partial\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n-1} \to M$ es una parametrización de ∂M en vista de la observación anterior. Entonces ∂M es una variedad sin borde de dimensión $n-1$. □

Corolario 4.7.16. $\partial(\partial M) = \emptyset$.

Esto nos permite escribir que $\partial^2 = 0$ como operador.

Proposición 4.7.17. *Si M es una variedad con borde de dimensión n, entonces $\mathring{M}$ es una variedad sin borde de dimensión n.*

Demostración. Sea $p \in \mathring{M}$, y $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ una parametrización alrededor de p. Como $p \notin \partial M$, entonces $U \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$ (achicando U si fuera necesario), luego U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y φ tiene como dominio un abierto de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\mathring{M}$ es una variedad sin borde de dimensión n. □

Proposición 4.7.18. *Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad con borde y $p \in \partial M$. Si $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ es una parametrización tal que $p = \varphi(q)$, entonces $T_p\partial M$ tiene como base al conjunto $\{\varphi_{u_1}(q), \ldots, \varphi_{u_{n-1}}(q)\}$.*

Demostración. Hacemos una prueba análoga a la del caso de variedades sin borde. Sea $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ una parametrización de M alrededor de p, con $p = \varphi(q)$. Tenemos que $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n} : U \cap \partial\mathbb{H}^n \to \partial M$ es una parametrización de ∂M alrededor de p pues $p \in \partial M$.

Por definición, $T_p\partial M = \operatorname{Im} d(\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n})_q$, con $d(\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n})_q : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^k$. Como $d(\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n})_q$ es un isomorfismo lineal sobre su imagen, entonces lleva bases en bases. En particular:

$$\begin{aligned}\{d(\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n})_q(e_1), \ldots, d(\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n})_q(e_{n-1})\} &= \{d\varphi_q(e_1), \ldots, d\varphi_q(e_{n-1})\} \\ &= \{\varphi_{u_1}(q), \ldots, \varphi_{u_{n-1}}(q)\}\end{aligned}$$

es base. □

Corolario 4.7.19. *$T_p\partial M$ es un subespacio vectorial de T_pM de codimensión 1. Además:*

$$T_pM = \langle d\varphi_q(e_n)\rangle \oplus T_p\partial M$$

donde $\langle\,\rangle$ significa "subespacio generado por" y $\oplus$ es la suma directa de subespacios vectoriales.

La demostración del siguiente teorema es análoga a la de su versión para variedades sin borde:

Teorema 4.7.20. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que tiene a $a \in \mathbb{R}$ como valor regular, entonces $M = f^{-1}((-\infty, a])$ es una variedad con borde de dimensión n, y $\partial M = f^{-1}(\{a\})$.*

Ejemplo 4.7.21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Es diferenciable y ya sabemos que 0 es valor regular. Entonces por el teorema anterior, $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ es una variedad con borde de dimensión 3, y $\partial B^3 = S^2$.

4.7.2. Orientación de variedades con borde

Si M es una variedad con borde y $p \in \partial M$, tenemos tres tipos de vectores en T_pM:

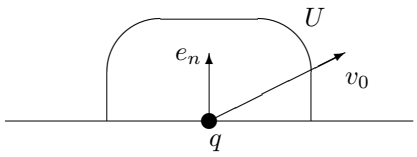
- Los vectores tangentes al borde, es decir aquellos que pertenecen a $T_p\partial M$, que sabemos que tiene codimensión 1,
- Los vectores "salientes": geométricamente, que "apuntan hacia afuera" de la variedad,
- Los vectores "entrantes", aquellos que "apuntan hacia adentro" de la variedad.

Podemos visualizar por ejemplo el cilindro "unidad" (la superficie): su borde son dos circunferencias. Situémonos en un punto p de la circunferencia inferior, por ejemplo $p = (0, 1, 0)$. T_pM es el plano $y = 0$. Tomemos un vector en $T_p\partial M$, que es la recta $y = 0, z = 0$, por ejemplo $-e_1$. A modo de ejemplo, un vector saliente en T_pM sería $-e_3$ y un vector entrante sería e_3. Observar que si nos situamos en el punto $(0, 1, 1)$ de la circunferencia superior, los roles de $-e_3$ y e_3 se invierten.

Podremos entonces orientar $T_p\partial M$: diremos que una base ordenada de $T_p\partial M$ *tiene la orientación inducida por* M si poniéndole un vector saliente delante nos da la misma orientación que la de T_pM. Siguiendo con el ejemplo del punto $p = (0, 1, 0)$ del cilindro, supongamos que T_pM tiene a $\{e_3, e_1\}$ como base ordenada (sentido antihorario, si miramos el plano desde "dentro" del cilindro). Si tomamos como base ordenada de $T_p\partial M$ a $\{-e_1\}$, entonces $\{-e_3, -e_1\} \sim \{e_3, e_1\}$, que tiene la orientación de T_pM, por lo tanto diremos que $\{-e_1\}$ tiene la orientación inducida por M. Formalicemos.

Vectores entrantes y salientes

Definición 4.7.22. Sea M una variedad con borde de dimensión n, $p \in \partial M$ y $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ una parametrización tal que $\varphi(q) = p$. Decimos que $v \in T_pM$ es un *vector entrante* (a M) si es de la forma $d\varphi_q(v_0)$, con $v_0 \cdot e_n > 0$, y decimos que es un *vector saliente* (a M) si es de la forma $d\varphi_q(v_0)$, con $v_0 \cdot e_n < 0$.



$v = d\varphi_q(v_0)$ es un vector entrante

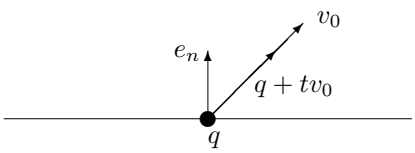
Debemos ver que la definición anterior no depende de la elección de la parametrización. Para ello, veamos una caracterización de los vectores entrantes y salientes que no depende de parametrizaciones.

Proposición 4.7.23. *Sea M una variedad con borde de dimensión n, $p \in \partial M$ y $v \in T_pM$. Son equivalentes:*

1. *existe una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ en torno de p tal que, si $\varphi(q) = p$ y $v = d\varphi_q(v_0)$, entonces $v_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_0 \cdot e_n > 0$,*
2. *$v \notin T_p\partial M$ y existe una curva $\alpha : [0, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$,*
3. *para toda parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ en torno de p se tiene que, si $\varphi(q) = p$ y $v = d\varphi_q(v_0)$, entonces $v_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v_0 \cdot e_n > 0$.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Definimos $\alpha : [0, \epsilon) \to M$ como $\alpha(t) = \varphi(q + tv_0)$, tomando ϵ suficientemente chico para que $q + tv_0 \in U$ para todo $t \in [0, \epsilon)$. Entonces $\alpha(0) = p$, y

$$\alpha'(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(q + tv_0) \overset{\text{r.c.}}{=} d\varphi_q(v_0) = v$$



($2 \Rightarrow 3$) Sea $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ una parametrización en torno de p. Supongamos que $\varphi(q) = p$ y $v = d\varphi_q(v_0)$.

Como $\alpha(0) = p \in \varphi(U)$, entonces achicando ϵ si es necesario podemos suponer que $\alpha([0, \epsilon)) \subset \varphi(U)$. De esta forma, tenemos una curva $\beta := \varphi^{-1} \circ \alpha : [0, \epsilon) \to U$ con $\beta(0) = q$ y $\beta'(0) = v_0$.

Queremos ver que $\beta'(0) \cdot e_n > 0$. Observar que $\beta'(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\beta(t)-q}{t}$; ahora, $\beta(t) - q \in \mathbb{H}^n$ pues $q \in \partial\mathbb{H}^n$ y $\beta(t) \in \mathbb{H}^n$ para todo t. Por lo tanto $\beta'(0) = v_0 \in \mathbb{H}^n$.

Como además $v \notin T_p\partial M$, entonces $v_0 \notin \partial\mathbb{H}^n$, y por lo tanto $v_0 \cdot e_n > 0$.

($3 \Rightarrow 1$) Es obvio. □

Observación 4.7.24.

1. La proposición anterior vale para vectores salientes, cambiando $v_0 \cdot e_n > 0$ por $v_0 \cdot e_n < 0$, y $\alpha : [0, \epsilon) \to M$ por $\alpha : (-\epsilon, 0] \to M$.
2. Por el corolario 4.7.19, si $p \in \partial M$ entonces el espacio tangente T_pM se descompone en suma directa de $T_p\partial M$ y un subespacio de dimensión uno. Por la proposición anterior, este subespacio unidimensional es unión de dos semiespacios, el de los vectores entrantes y el de los vectores salientes, uniendo también el vector nulo.

Veamos ahora que los vectores entrantes/salientes van a parar por una función diferenciable a vectores entrantes/salientes respectivamente, i.e. una función diferenciable respeta la descomposición en suma directa de la observación 4.7.24.2.

Proposición 4.7.25. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre variedades con borde. Sea $p \in \partial M$ y $v \in T_pM$. Si v es un vector entrante (resp. saliente), entonces $df_p(v) \in T_{f(p)}N$ es un vector entrante (resp. saliente).*

Demostración. Observar primero que por el ejercicio 4.7.12, efectivamente $f(p) \in \partial N$ y por lo tanto tiene sentido que $df_p(v)$ sea entrante o saliente.

Supongamos que v es entrante. Por la proposición 4.7.23, existe una curva $\alpha : [0, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. Consideremos $f \circ \alpha : [0, \epsilon) \to M$. Se tiene $f(\alpha(0)) = f(p)$, y

$$(f \circ \alpha)'(0) \overset{\text{r.c.}}{=} df_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = df_p(v)$$

Por la proposición 4.7.23, esto prueba que $df_p(v)$ es entrante. La demostración en el caso que v es saliente es análoga. □

Teorema 4.7.26. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene a $a \in \mathbb{R}$ como valor regular, de manera que $M := f^{-1}((-\infty, a])$ es una variedad con borde tal que $\partial M = f^{-1}(\{a\})$. Sea $p \in \partial M$. Entonces $\nabla f(p)$ es un vector saliente a M.*

Demostración. Observar primero que $\nabla f(p) \notin T_p\partial M$, pues $T_p\partial M = \{\nabla f(p)\}^\perp$ por la proposición 4.4.15. Supongamos por absurdo que $\nabla f(p)$ es entrante.

Aplicándole la proposición anterior a la función $f|_M : M \to (-\infty, a]$, tenemos entonces que $df_p(\nabla f(p)) \in \mathbb{R}$ es entrante a $(-\infty, a]$. Explícitamente, esto significa que $df_p(\nabla f(p)) < 0$.

En efecto, por la proposición 4.7.23 un vector $v \in \mathbb{R}$ es entrante a $(-\infty, a]$ si y sólo si $v \neq 0$ y existe una curva $\alpha : [0, \epsilon) \to (-\infty, a]$ tal que $\alpha(0) = a$, $\alpha'(0) = v$. Observar que como $\alpha(t) \leq a$ para todo t, entonces

$$v = \alpha'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\alpha(t) - a}{t} \leq 0$$

luego $v < 0$.

Tenemos pues que $df_p(\nabla f(p)) < 0$. Llegamos entonces a una contradicción, ya que $df_p(\nabla f(p)) = \nabla f(p) \cdot \nabla f(p) = \|\nabla f(p)\|^2 > 0$. □

Orientación

La definición de variedad con borde orientable es la misma que para variedades sin borde (sólo que las parametrizaciones tienen como dominio un abierto de $\mathbb{H}^n$). Escribamos formalmente la orientación de $T_p\partial M$ que induce T_pM que enunciábamos al comienzo de la sección:

Definición 4.7.27. Sea M una variedad con borde y $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ una parametrización de M. Si un vector saliente (resp. entrante) $N = d\varphi_q(v_0)$ es tal que $v_0 \cdot e_n = -1$ (resp. $+1$), tenemos un vector que llamamos *normal saliente* (resp. *normal entrante*).

Definición 4.7.28. Sea M una variedad con borde orientada. Sea $p \in \partial M$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base ordenada de $T_p\partial M$. Orientamos $T_p\partial M$ diciendo que $\mathcal{B}$ es una base positiva de $T_p\partial M$ si $\{N, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es una base positiva de T_pM, siendo N un vector normal saliente. A esta orientación de $T_p\partial M$ le llamamos *orientación inducida por* T_pM.

Observación 4.7.29. Podríamos pedir simplemente que N fuera saliente, sin pedir que sea normal. Pidiendo que sea normal lo que ganamos es que si $\mathcal{B}$ es una base ortogonal, entonces agregándole N sigue siendo ortogonal. Observar que en todo caso se cumple que $\langle N \rangle \oplus T_p\partial M = T_pM$.

Observación 4.7.30. A veces en la práctica procederemos al revés: le daremos una orientación a T_pM a partir de una base que previamente fijamos como positiva de $T_p\partial M$ y poniéndole delante la normal saliente.

Tenemos una proposición que nos caracteriza las orientaciones de las variedades: *un atlas $\mathcal{A}$ es una orientación de M si y sólo si para cada $p \in M$ podemos elegir una orientación de T_pM de modo tal que toda parametrización φ de $\mathcal{A}$ que rodea a p preserva la orientación.* En base a esto podemos hacer la siguiente

Definición 4.7.31. Sea M una variedad con borde orientada. Decimos que ∂M tiene la *orientación inducida por M* (o la *orientación borde*) si tomamos como orientación de ∂M un atlas tal que, para todo $p \in \partial M$, toda parametrización que rodea a p preserva la orientación de $T_p\partial M$, tomando en $T_p\partial M$ la orientación inducida por T_pM.

No está claro que un tal atlas siempre exista, es decir, que siempre se pueda dotar a ∂M de la orientación borde. Esto es cierto, pero lo sacaremos como corolario de la próxima proposición.

Recordemos que si $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ es una parametrización de M, entonces $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n}$ es una parametrización de ∂M. De esta manera, si φ preservara orientación, uno querría que $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n}$ preservara la orientación de ∂M, con ∂M orientada con la orientación borde. Pero esto no siempre es así: falla un factor.

Proposición 4.7.32. *Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad con borde orientada. Si $\mathcal{A}$ está formado por ciertas parametrizaciones $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$, entonces el atlas $\tilde{\mathcal{A}} = \{\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n} : \varphi \in \mathcal{A}\}$ de ∂M lo dota de la orientación borde si y sólo si n es par.*

Demostración. Sea $p \in M$ y $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ una parametrización alrededor de p. Lo que queremos ver es que la orientación que induce $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n}$ en $T_p\partial M$ es la misma que la orientación inducida por T_pM si y sólo si n es par, o en otras palabras, que $\{d\varphi_q(e_1), \ldots, d\varphi_q(e_{n-1})\}$ es una base positiva de $T_p\partial M$ si y sólo si n es par.

Como φ preserva orientación, entonces $\mathcal{B}_1 = \{d\varphi_q(e_1), \ldots, d\varphi_q(e_n)\}$ es una base positiva de T_pM. Queremos ver que si N es un vector saliente, entonces $\mathcal{B}_2 = \{N, d\varphi_q(e_1), \ldots, d\varphi_q(e_{n-1})\}$ es una base positiva de T_pM si y sólo si n es par. Escribamos N en términos de la base $\mathcal{B}_1$:

$$N = a_1 d\varphi_q(e_1) + \cdots + a_n d\varphi_q(e_n) = d\varphi_q(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n)$$

Como N es saliente, $(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) \cdot e_n < 0 \Rightarrow a_n < 0$.

$$\det {}_{\mathcal{B}_1}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2} = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \ldots & 1 \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}\, a_n \det\,(\mathrm{id}) = (-1)^{n+1}\, a_n$$

Entonces $\mathcal{B}_2$ es base positiva de $T_pM \Leftrightarrow$

$$(-1)^{n+1}\, a_n > 0 \Leftrightarrow (-1)^n\,(-a_n) > 0 \Leftrightarrow n \text{ es par, ya que } -a_n > 0 \qquad \square$$

Corolario 4.7.33. *Si M es una variedad con borde orientable, entonces ∂M es una variedad sin borde orientable, y siempre se la puede dotar de la orientación borde.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una orientación de M. Si $\varphi \in \mathcal{A}$, $\varphi : U \subset \mathbb{H}^n \to M$ entonces ya sabemos que $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n}$ es una parametrización de ∂M, y sabemos que tales $\varphi|_{U\cap\partial\mathbb{H}^n}$ conforman un atlas de ∂M que notaremos $\tilde{\mathcal{A}}$. Por la proposición anterior, sabemos que $\tilde{\mathcal{A}}$ es la orientación borde si n es par, y la orientación "opuesta" (en el sentido que cada $T_p\partial M$ tendrá orientación opuesta a la inducida por T_pM) si n es impar. En tal caso, basta componer cada parametrización de $\tilde{\mathcal{A}}$ con el difeomorfismo $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_2, x_1, \ldots, x_{n-1})$ y considerar el atlas compuesto por esas composiciones. $\square$

Damos ahora un par de ejemplos. El primero será importante en un futuro.

Ejemplo 4.7.34. La orientación de $\partial\mathbb{H}^n$ como borde de $\mathbb{H}^n$ es la misma que la orientación usual de $\mathbb{R}^{n-1}$ si n es par, y la opuesta si n es impar. Basta tomar como parametrización la identidad (recordemos que preserva la orientación si orientamos de la misma manera en el dominio que en el codominio).

Esto podemos verlo sin usar el teorema anterior, de todas formas. La base $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es una base positiva de $\partial\mathbb{H}^n$ si $\{-e_n, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es una base positiva de $\mathbb{R}^n$. Observar que el signo de $\{-e_n, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es $(-1)^n$ veces el signo de $\{e_1, \ldots, e_n\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Luego la orientación de $\partial\mathbb{H}^n$ como borde de $\mathbb{H}^n$ es la misma que la orientación usual de $\mathbb{R}^{n-1}$ si n es par, y la opuesta si n es impar.

Ejemplo 4.7.35. Orientemos S^2 con la orientación borde de B^3, pues $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\} = \partial B^3 = \partial\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Para todo $p \in B^3$ tenemos $T_pB^3 = \mathbb{R}^3$. Orientamos B^3 asignándole a cada T_pB^3 la orientación estándar de $\mathbb{R}^3$, es decir tomando la base canónica como positiva para T_pB^3.

Como normal saliente podemos tomar la de norma 1: para $p \in S^2$, $N(p) = p$. Para darle la orientación borde a S^2, diremos que una base $\mathcal{B} = \{u, v\}$ de T_pS^2 es positiva si $\{N(p), u, v\} = \{p, u, v\}$ es una base positiva de $T_pB^3 = \mathbb{R}^3$. La base $\{p, u, v\}$ es positiva si y sólo si $\{u, v, p\}$ es positiva. Por ejemplo, para $p = (0, 0, 1)$, basta tomar $u = e_1$ y $v = e_2$.

Capítulo 5

Formas diferenciales en variedades

En esta sección consideraremos las variedades con o sin borde. Observar que lo que hicimos en el capítulo 2 se adapta sin dificultades para conseguir formas diferenciales en abiertos de $\mathbb{H}^n$: utilizaremos este hecho sin reparos.

5.1. k-formas

Definición 5.1.1. Sea $M \subset \mathbb{R}^l$ una variedad. Una *k-forma en M* es una función

$$\omega : M \to \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM^*)$$

tal que $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM^*)$.

Para visualizar un poco esta definición, podemos pensar en una esfera. En cada punto, miramos el plano tangente, que es un subespacio vectorial de dimensión 2, y ponemos allí una 2-forma bilineal, por ejemplo (será el ejemplo más útil pues integraremos n-formas en variedades de dimensión n).

Observación 5.1.2. El espacio de las k-formas es un espacio vectorial con las operaciones definidas punto a punto.

5.2. Pull-back

Definición 5.2.1. Sea $f : M \to N$ un mapa diferenciable entre variedades. Definimos la aplicación f^*: lleva k-formas en N en k-formas en M de manera tal que, si ω es una k-forma en N, $p \in M$ y $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$, entonces:

$$f^*(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k))$$

Para $k = 0$ definimos $f^*(g) = g \circ f$.

Decimos que $f^*(\omega)$ es el *pull-back* de ω por f.

Observación 5.2.2. Esto no es nada más que el pull-back lineal de $\omega(f(p)) \in \Lambda^k((T_{f(p)}N)^*)$ por $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$, es decir:

$$f^*(\omega)(p) = df_p^*(\omega(f(p)))$$

Proposición 5.2.3. *Sean $f : M \to N$, $g : N \to Z$ mapas diferenciables entre variedades, ω una k-forma en N, η una r-forma en N. La aplicación f^* tiene las siguientes propiedades:*

- *f^* es lineal,*
- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$,
- $(\mathrm{id}_M)^* = \mathrm{id}$,
- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,
- *Si f es un difeomorfismo entonces f^* es un isomorfismo lineal, y verifica*

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Las propiedades tercera y cuarta nos dicen que el pull-back es un *functor contravariante*, como sucedía con el pull-back en el espacio euclídeo.

Observación 5.2.4. Aplicando la segunda propiedad a una 0-forma, obtenemos:

$$f^*(g\omega) = f^*(g \wedge \omega) = f^*(g) \wedge f^*(\omega) = (g \circ f) f^*(\omega)$$

5.3. Formas diferenciales en variedades

Definición 5.3.1. Sea ω una k-forma en M. Decimos que ω es una *forma diferencial* si para toda parametrización $\varphi : U \to M$ vale que $\varphi^*(\omega|_{\varphi(U)})$ es una forma diferencial en U.

Observación 5.3.2. Es por esta definición que es lógica y formalmente necesario estudiar primero las formas y el pull-back en $\mathbb{R}^n$ (y en $\mathbb{H}^n$).

Notación. Notaremos $\Omega^k(M)$ al conjunto de las k-formas diferenciales en M.

Observación 5.3.3. $\Omega^k(M)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas punto a punto.

Proposición 5.3.4. *Para ver que una k-forma ω en M es una forma diferencial, basta verificarlo en un atlas.*

Demostración. Sean $\varphi : U \to M$ y $\psi : V \to M$ parametrizaciones tales que $\varphi(U) = \psi(V)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \varphi(U) = \psi(V) & \\
U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi^{-1}\circ\varphi"'] & & V \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Escribamos para abreviar $\omega = \omega|_{\varphi(U)}$. Por las propiedades del pull-back, tenemos que:

$$(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(\psi^*(\omega)) = \varphi^*(\omega)$$

Por lo tanto $\varphi^*(\omega)$ es una forma diferencial si y sólo si lo es $(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(\psi^*(\omega))$.

Si $\psi^*(\omega)$ es una forma diferencial, entonces ya sabemos (por el corolario 2.4.8) que $(\psi^{-1}\circ\varphi)^*(\psi^*(\omega))$ es una forma diferencial, de donde $\varphi^*(\omega)$ es una forma diferencial.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi^*(\omega)$ es una forma diferencial, es decir $(\psi^{-1}\circ\varphi)^*(\psi^*(\omega))$ es una forma diferencial. Como $\psi^{-1}\circ\varphi$ es un difeomorfismo, entonces invirtiendo tenemos:

$$\Omega^k(V) \xrightarrow{(\psi^{-1}\circ\varphi)^*} \Omega^k(U)$$

$$\Omega^k(U) \xrightarrow{(\varphi^{-1}\circ\psi)^*} \Omega^k(V)$$

Entonces $\psi^*(\omega) = (\varphi^{-1}\circ\psi)^*(\varphi^*(\omega))$ es una forma diferencial (por el corolario 2.4.8).

Esto prueba que $\varphi^*(\omega)$ es una forma diferencial si y sólo lo es $\psi^*(\omega)$, de donde se deduce la tesis. □

Observación 5.3.5. Sea M una variedad de dimensión n, $\omega \in \Omega^k(M)$, $\varphi : U \to M$ una parametrización de M. Tenemos en T_pM la base $\{\varphi_{u_{i_1}}, \ldots, \varphi_{u_{i_n}}\}$, de donde si $\{\varphi^*_{u_{i_1}}, \ldots, \varphi^*_{u_{i_n}}\}$ es su base dual, podemos escribir

$$\omega|_{\varphi(U)} = \sum a_{i_1,\ldots,i_k}\, \varphi^*_{u_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \varphi^*_{u_{i_k}}$$

Entonces $\omega|_{\varphi(U)}$ es una forma diferencial si y sólo si $a_{i_1,\ldots,i_k} : M \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Proposición 5.3.6. *El pull-back lleva k-formas diferenciales en k-formas diferenciales. Esto es, si $f : M \to N$ es un mapa diferenciable y $\omega \in \Omega^k(N)$, entonces $f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$. Por lo tanto tenemos bien definido $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$.*

Demostración. Sean $\varphi : U \to M$, $\psi : V \to N$ parametrizaciones, $\omega \in \Omega^k(N)$. Queremos ver que $f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$. Como ω es una forma diferencial, sabemos que $\psi^*(\omega) \in \Omega^k(V)$. Nos falta ver que $\varphi^*(f^*(\omega)) \in \Omega^k(U)$. Sea $\hat{f} = \psi^{-1}\circ f\circ\varphi$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\hat{f}"'] & V \end{tikzcd}$$

Como $\psi^*(\omega) \in \Omega^k(V)$, sabemos que $\hat{f}^*(\psi^*(\omega)) \in \Omega^k(U)$, pero

$$\begin{aligned} \hat{f}^*(\psi^*(\omega)) &= (\psi^{-1}\circ f\circ\varphi)^*(\psi^*(\omega)) \\ &= (\varphi^*\circ(\psi^{-1}\circ f)^*)(\psi^*(\omega)) \\ &= (\varphi^*\circ f^*\circ(\psi^{-1})^*)(\psi^*(\omega)) \\ &= \varphi^*(f^*(\omega)) \end{aligned}$$

de donde se deduce la tesis. □

5.4. Orientación de variedades con formas diferenciales y forma de volumen

Proposición 5.4.1. *Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial orientado con producto interno de dimensión n, entonces existe una única $\nu \in \Lambda^n(V^*)$ tal que*

$$\nu(v_1, \dots, v_n) = 1 \quad \forall \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base ortonormal positiva de } V.$$

Explícitamente, si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal positiva de V y $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ es su base dual, entonces

$$\nu = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \in \Lambda^n(V^*) \tag{5.1}$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal positiva de V y sea $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ su base dual. Definimos ν como en (5.1). Veamos que es la forma buscada.

Sea $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ otra base ortonormal positiva de V, entonces por el ejemplo 1.3.23:

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(w_1, \dots, w_n) = \det(\phi_i(\omega_j)) = \det {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} \tag{5.2}$$

En efecto, si $w_j = \sum_k a_{kj} v_k$ entonces $\phi_i(w_j) = \sum_k a_{kj} \phi_i(v_k) = a_{ij}$.

El determinante de (5.2) es el determinante de un cambio de base de una base ortonormal a una base ortonormal, por lo tanto es el determinante de una matriz ortogonal: tiene determinante 1 ó -1. Como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases positivas, debe ser 1.

Verifiquemos la unicidad: si $\eta \in \Lambda^n(V^*)$ cumple lo mismo, entonces como $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$, tenemos $\eta = c\nu$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Evaluando en una base ortonormal:

$$\eta(v_1, \dots, v_n) = c\,\nu(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow c = 1$$

de donde $\eta = \nu$. □

Observación 5.4.2. Otra vez vemos la bondad de aquellos aparentemente molestos factoriales que normalizaban el producto cuña. Pues de no tenerlos, tendríamos un factor $\frac{1}{n!}$, y tendríamos que haber pedido que $\nu(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!}$ para toda base ortonormal positiva, lo cual es molesto y poco intuitivo.

Corolario 5.4.3. *Si tomamos $V = \mathbb{R}^n$ con la orientación usual, entonces $\nu = \det$.*

Demostración. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica, entonces es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^n$. Su base dual es $\{dx_1, \dots, dx_n\}$, y $\nu = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \det$. □

Observación 5.4.4. El corolario anterior tiene sentido geométrico. Si tomamos la base canónica, $\{e_1, \dots, e_n\}$, al ser una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^n$, entonces $\det(e_1, \dots, e_n) = 1 =$ volumen del paralelepípedo n-dimensional generado por $\{e_1, \dots, e_n\}$. En el caso general, al pedir que ν dé 1 en toda base ortonormal positiva, podemos pensar que ν es una manera general de medir volúmenes de paralelepípedos (de manera razonable) en espacios vectoriales orientados con producto interno cualesquiera.

Definición 5.4.5. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad orientada de dimensión n. Definimos $dV \in \Omega^n(M)$, la *forma de volumen*, mediante lo siguiente: si $p \in M$, entonces $dV(p) \in \Lambda^n(T_pM^*)$ es la única n-forma multilineal alternada en T_pM que verifica

$$dV(p)(v_1, \ldots, v_n) = 1, \quad \forall \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ base ortonormal positiva de } T_pM$$

Para variedades de dimensión 1 en $\mathbb{R}^k$, la forma de volumen se llama *forma de longitud* y se denota ds. Para superficies regulares, la forma de volumen se llama *forma de área* y se denota dA.

Observación 5.4.6. El nombre, *forma de volumen*, está motivado por la observación anterior. Esta forma es especialmente importante porque nos permitirá definir la integral de una *función*.

Proposición 5.4.7. *La forma de volumen $dV \in \Omega^n(M)$ existe y es única. Además, si $\varphi : U \to M$ es una parametrización compatible con la orientación y $g_{ij} = \langle \varphi_{u_i}, \varphi_{u_j} \rangle : U \to \mathbb{R}$, entonces*

$$dV|_{\varphi(U)} = \sqrt{\det(g_{ij})}\, \varphi^*_{u_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^*_{u_n} \tag{5.3}$$

Demostración. Por definición de forma de volumen, dado $p \in M$ debemos definir $dV(p) = \nu_p \in \Lambda^n(T_pM^*)$, la forma multilineal alternada que vale 1 en toda base ortonormal positiva de T_pM, que ya probamos en la proposición 5.4.1 que siempre existe y es única. Esto prueba la unicidad de dV. Veamos que existe una tal forma diferencial.

Sea $\varphi : U \to M$ una parametrización compatible con la orientación y sea $p \in \varphi(U)$. Entonces

$$dV|_{\varphi(U)} = f\varphi^*_{u_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^*_{u_n}$$

para cierta $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sea $(e_1, \ldots, e_n) \subset T_pM$ una base ortonormal positiva.

Escribamos $\varphi_{u_i}(p) = \sum_j a_{ij} e_j$. Observar que $\det((a_{ij})) > 0$ al estar ambas bases orientadas positivamente. Ahora calculamos. Por un lado,

$$dV(p)\left(\varphi_{u_1}(p), \ldots, \varphi_{u_n}(p)\right) = f(p)(\varphi^*_{u_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^*_{u_n})\left(\varphi_{u_1}(p), \ldots, \varphi_{u_n}(p)\right) = f(p)$$

Por otro lado, usando la proposición 1.3.25:

$$\begin{aligned} dV(p)\left(\varphi_{u_1}(p), \ldots, \varphi_{u_n}(p)\right) &= dV(p)\left(\sum_j a_{1j} e_j, \ldots, \sum_j a_{nj} e_j\right) \\ &= \det((a_{ij}))\; dV(p)(e_1, \ldots, e_n) \\ &= \det((a_{ij})) \end{aligned}$$

Conseguimos entonces que $f(p) = \det((a_{ij})) > 0$. Seguimos calculando:

$$g_{ik}(p) = \langle \varphi_{u_i}(p), \varphi_{u_k}(p) \rangle = \left\langle \sum_j a_{ij} e_j, \sum_r a_{kr} e_r \right\rangle = \sum_j a_{ij} a_{kj}$$

que es el coeficiente (i, k) de la matriz $A^t A$, donde $A = (a_{ij})$. Por lo tanto

$$\det((g_{ij}(p))) = \det(A^t A) = (\det A)^2 = (f(p))^2$$

de donde se deduce la expresión (5.3) tomando raíz cuadrada, ya que $f(p) > 0$.

Observar ahora que g_{ij} son funciones diferenciables. En efecto, el producto interno es diferenciable, y las funciones $d\varphi(e_i) : U \to \mathbb{R}^k$, $q \mapsto d\varphi_q(e_i)$ son diferenciables por la diferenciabilidad de las derivadas parciales.

Esto prueba que $dV|_{\varphi(U)} \in \Omega^n(\varphi(U))$, y como φ es una parametrización arbitraria, concluimos que $dV \in \Omega^n(M)$. □

Para orientar una superficie, tenemos que es orientable si y sólo si existe un campo de vectores normales a la superficie. La versión "dual" en algún sentido de esta proposición sería: una superficie es orientable si y sólo si admite una 2-forma que nunca se anula. Esto es geométricamente intuitivo.

Esta manera de verlo tiene dos ventajas. Por un lado, orientar a través de un campo normal sólo sirve para variedades de codimensión 1, mientras que con una n-forma orientaremos variedades de dimensión n arbitrarias. La segunda, es que para obtener una normal usamos el espacio ambiente, mientras que con una n-forma nos quedamos en la variedad y en sus espacios tangentes.

Proposición 5.4.8. *Una n-variedad M es orientable si y sólo si existe $\omega \in \Omega^n(M)$ que nunca se anula (i.e. $\omega(p)$ nunca es la forma multilineal nula).*

Demostración. ($\Rightarrow$) Fijando una orientación, ya sabemos que existe la forma de volumen $dV \in \Omega^n(M)$, que nunca se anula.

($\Leftarrow$) Sea $\varphi : U \to M$ una parametrización. Sea $\psi : V \to M$ otra parametrización con $\varphi(U) = \psi(V)$. Quiero ver que es posible tomarla tal que el cambio de coordenadas $f = \psi^{-1} \circ \varphi$ tenga jacobiano positivo para todo $q \in U$.

$$\begin{tikzcd} & \varphi(U) = \psi(V) & \\ U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "f"'] & & V \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Supongamos que

$$\varphi^*(\omega) = a\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$
$$\psi^*(\omega) = b\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Pero ya sabemos que $f^*(\psi^*(\omega)) = (b \circ f) \det df\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, por lo tanto:

$$a = (b \circ f) \det df$$

Como ω nunca se anula, podemos decir que $\det df = \frac{a}{b \circ f} > 0$ eligiendo b adecuadamente. □

Observación 5.4.9. Si una n-variedad M está orientada, podemos elegir $\omega \in \Omega^n(M)$ que nunca se anula, coherente con la orientación de M. Decimos esto en el sentido que si $p \in M$, tenemos en T_pM la orientación inducida por las parametrizaciones del atlas. Elegimos ω nunca nula para que $\omega(p)$ induzca la misma orientación en T_pM.

Recíprocamente, si tenemos $\omega \in \Omega^n(M)$ que nunca se anula, ésta induce una orientación en M descrita en la proposición anterior.

Observación 5.4.10. Algunos autores llaman forma de volumen a una forma ω como en la proposición anterior. Es más general, pero con menos carga geométrica y no es única.

A continuación daremos una expresión explícita para la forma de longitud y la forma de área.

Proposición 5.4.11. *Sea $C \subset \mathbb{R}^k$ una variedad de dimensión 1, $T : C \to \mathbb{R}^k$ el campo tangente unitario que determina la orientación de C. Entonces*

$$ds(p)(v) = v \cdot T(p)$$

para todo $p \in C$, $v \in T_pC$.

En otras palabras, si $T = (T_1, \dots, T_k)$ entonces

$$ds = T_1\, dx_1 + \cdots + T_k\, dx_k$$

Demostración. Sea $p \in C$ y sea $\{v\}$ una base ortonormal positiva de T_pC, tenemos que probar que $ds(p)(v) = 1$. Al ser T coherente con la orientación de C, $T(p)$ tiene el mismo sentido que v. Como ambos son unitarios, deducimos que $v \cdot T(p) = 1$. □

Lema 5.4.12. *Se cumple que*

$$T_1\, ds = dx \qquad T_2\, ds = dy \qquad T_3\, ds = dz$$

Demostración. Veamos la primera igualdad, las otras dos son análogas. Recordemos que $ds(p)(v) = T(p) \cdot v$. En particular, $ds(p)(T(p)) = 1$; como $\{T(p)\}$ es base de T_pC concluimos que $\{ds(p)\}$ es la base dual de $\{T(p)\}$ en $(T_pC)^*$. Usando la segunda igualdad de la observación 1.1.4,

$$dx(p) = dx(p)(T(p))\, ds(p) = T_1(p)\, ds(p)$$

lo cual termina la demostración. □

Proposición 5.4.13. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada, $N : S \to \mathbb{R}^3$ el campo normal unitario que determina la orientación de S. Entonces*

$$dA(p)(v, w) = N(p) \cdot (v \times w)$$

para todo $p \in S$, $v, w \in T_pS$.

En otras palabras, si $N = (N_1, N_2, N_3)$ entonces

$$dA = N_1 dy \wedge dz + N_2 dz \wedge dx + N_3 dx \wedge dy$$

Demostración. Sea $p \in S$. Sea $\{v, w\} \subset T_pS$ una base ortonormal positiva. De esta forma, $N(p) = v \times w$. Por lo tanto $N(p) \cdot (v \times w) = N(p) \cdot N(p) = 1$.

La reformulación se deduce del ejemplo 1.3.23 que decía que

$$v \times w = (dy \wedge dz(v, w), dz \wedge dx(v, w), dx \wedge dy(v, w))$$ □

Observación 5.4.14. Recordemos que

$$N(p) \cdot (v \times w) = \det(N(p), v, w)$$

se llama el producto mixto de $N(p), v$ y w y mide el volumen (con signo) del paralelepípedo generado por $N(p), v$ y w.

Lema 5.4.15. *Se cumple que*

$$N_1\, dA = dy \wedge dz \qquad N_2\, dA = dz \wedge dx \qquad N_3\, dA = dx \wedge dy$$

Demostración. Veamos la primera igualdad, las otras dos son análogas. Tenemos que

$$N_1(p)\, dA(p)(v,w) = (e_1 \cdot N(p))\, dA(p)(v,w)$$

Ahora bien, para cualquier $u \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $(u \cdot N(p))\, dA(p)(v,w) = u \cdot v \times w$. En efecto, al ser $v \times w$ paralelo a $N(p)$ y al tener $\|N(p)\| = 1$, se tiene:

$$v \times w = ((v \times w) \cdot N(p))\, N(p) = dA(p)(v,w)\, N(p)$$

Al hacer el producto escalar con u,

$$u \cdot (v \times w) = u \cdot (dA(p)(v,w)\, N(p)) = dA(p)(v,w)\, (u \cdot N(p))$$

Siguiendo pues con la cuenta,

$$N_1(p)\, dA(p)(v,w) = (e_1 \cdot N(p))\, dA(p)(v,w) = e_1 \cdot (v \times w) = dy \wedge dz(p)(v,w)$$

lo cual termina la demostración. □

5.5. Derivada exterior en variedades

Proposición 5.5.1. *Sea M una variedad de dimensión n. Dadas dos parametrizaciones $\varphi : U \to M$ y $\psi : V \to M$ tales que $\varphi(U) = \psi(V)$, se tiene que*

$$(\varphi^*)^{-1} \circ d \circ \varphi^* = (\psi^*)^{-1} \circ d \circ \psi^*$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(\varphi(U)) \arrow[d, "\varphi^*"] \arrow[dd, bend right=60, "\psi^*"'] & \Omega^{k+1}(\varphi(U)) \\
\Omega^k(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{k+1}(U) \arrow[u, "(\varphi^*)^{-1}"] \\
\Omega^k(V) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{k+1}(V) \arrow[uu, bend right=60, "(\psi^*)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $f = \psi^{-1} \circ \varphi$ el cambio de coordenadas.

$$\begin{tikzcd}
 & \varphi(U) = \psi(V) & \\
U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "f"'] & & V \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Como $\psi \circ f = \varphi$, entonces $f^* \circ \psi^* = \varphi^*$. Por lo tanto:

$$d \circ \varphi^* = d \circ f^* \circ \psi^* = f^* \circ d \circ \psi^*$$

Aplicamos $(\varphi^*)^{-1} = (f^* \circ \psi^*)^{-1} = (\psi^*)^{-1} \circ (f^*)^{-1}$ a esta igualdad:

$$(\varphi^*)^{-1} \circ d \circ \varphi^* = (\psi^*)^{-1} \circ (f^*)^{-1} \circ f^* \circ d \circ \psi^* = (\psi^*)^{-1} \circ d \circ \psi^*$$

y la proposición queda probada. □

Para definir la derivada exterior en variedades, *tiramos para atrás* la forma como el pull-back de una parametrización, derivamos, y volvemos a subir por la parametrización: no depende de cuál escojamos por la proposición anterior. De esta manera usamos lo que sabemos de la derivada exterior en el espacio euclídeo. Observar que la propiedad $d \circ f^* = f^* \circ d$ en el espacio euclídeo es esencial para poder hacer esta definición.

Definición 5.5.2. Sea M una variedad de dimensión n, $\omega \in \Omega^k(M)$, y $\varphi : U \to M$ una parametrización. Definimos

$$d\omega|_{\varphi(U)} \overset{\text{def.}}{=} ((\varphi^*)^{-1} \circ d \circ \varphi^*)(\omega|_{\varphi(U)})$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(\varphi(U)) \arrow[r, dotted, "d_{\text{variedad}}"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \Omega^{k+1}(\varphi(U)) \\
\Omega^k(U) \arrow[r, "d_{\text{euclídeo}}"'] & \Omega^{k+1}(U) \arrow[u, "(\varphi^*)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

La derivada exterior en variedades se apoya en la derivada exterior euclídea, por lo tanto las siguientes propiedades de la derivada exterior en variedades se deducen directamente de aquellas en el espacio euclídeo.

Proposición 5.5.3. *Sean M y N variedades, $f : M \to N$ un mapa diferenciable, $\omega \in \Omega^k(M)$. El operador $d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ tiene las siguientes propiedades:*

- $d(a\omega + \eta) = a\, d\omega + d\eta, \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$-linealidad)
- $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
- $d^2 = 0$
- $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$.

Observación 5.5.4.

- Tenemos que el operador ∂ de variedades con borde cumple $\partial^2 = 0$, y el operador d de formas diferenciales en variedades cumple $d^2 = 0$. Esto no es coincidencia, y esta *dualidad* entre ∂ y d sale un poco más a la luz con el teorema de Stokes.
- Se puede dar una caracterización de la derivada exterior, mediante el siguiente teorema: existe una única sucesión de operadores $d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$, $r \in \mathbb{N}$ que satisface los primeros tres ítems de la proposición anterior y que si $f \in \Omega^0(M)$ entonces $(df)(p)(v) = df_p(v)$ (teorema 14.24 de [Lee]).

Capítulo 6

Integración de formas en variedades

6.1. Integración en $\mathbb{H}^n$

Recordemos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es *compacto* si es cerrado y acotado, o equivalentemente, si todo cubrimiento abierto de A admite un subcubrimiento finito (teorema de *Heine-Borel*).

Definición 6.1.1. Sea $f : A \subset \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ una función, definimos su *soporte* como

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}$$

Observación 6.1.2. El soporte de una función siempre es un conjunto cerrado.

Definición 6.1.3. Sea $U \subset \mathbb{H}^n$ abierto, $\omega \in \Omega^n(U)$. Definimos el *soporte* de ω como

$$\operatorname{sop} \omega = \overline{\{p \in U : \omega(p) \neq 0\}}$$

Observación 6.1.4. Como podemos escribir de manera única $\omega = a\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, entonces $\operatorname{sop} \omega = \operatorname{sop} a$.

Definición 6.1.5. Si $\operatorname{sop} \omega$ es compacto, definimos

$$\int_U \omega \overset{\text{def.}}{=} \int_U a$$

donde $\int_U a$ es la integral de Riemann de n variables. En otras palabras,

$$\int_U a\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \overset{\text{def.}}{=} \int_U a\, dx_1 \cdots dx_n$$

Pedimos que el soporte de ω sea compacto para que el soporte de a lo sea y la integral $\int_U a$ esté bien definida.[1]

[1] Hay un problema técnico que estamos barriendo bajo la alfombra. No está definida la integral de una función (acotada) en un abierto cualquiera, precisamos que sea medible Jordan. Esto se puede arreglar probando que dados $K \subset U \subset \mathbb{H}^n$ donde U es abierto y K es compacto, entonces existe un conjunto medible Jordan D tal que $K \subset D \subset U$. De esta forma, podemos definir $\int_U \omega = \int_D \omega$ donde D es un conjunto medible Jordan tal que $\operatorname{sop} \omega \subset D \subset U$, y se verifica que no depende de la elección de D. Ver [Lee], capítulo 16 para más detalles.

Observación 6.1.6. Se deduce inmediatamente la linealidad de esta "nueva" integral.

"Nueva" porque por ahora no hemos hecho nada novedoso. Pero la siguiente propiedad empieza a mostrar por qué dijimos que las formas eran buenos integrandos.

Proposición 6.1.7. *Sean $U, V \subset \mathbb{H}^n$ abiertos, $f : U \to V$ un difeomorfismo, $\omega \in \Omega^n(V)$ con soporte compacto. Entonces*

- *Si f preserva la orientación, entonces*

$$\int_V \omega = \int_U f^*(\omega)$$

- *Si f invierte la orientación, entonces*

$$\int_V \omega = -\int_U f^*(\omega)$$

Demostración. Podemos escribir de manera única $\omega = a\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, $a : V \to \mathbb{R}$ diferenciable. Ya sabemos que

$$f^*(\omega) = (a \circ f) \det df\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

de donde $f^*(\omega)$ también tiene soporte compacto. Usando el teorema de cambio de variable:

$$\int_V \omega = \int_V a\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \overset{\text{def.}}{=} \int_V a\, dy_1 \cdots dy_n = \int_U (a \circ f)\, |\det df|\, dx_1 \cdots dx_n$$

Si f preserva orientación, entonces $|\det df| = \det df$ y la últma integral es $\int_U f^*(\omega)$.

Si f invierte orientación, entonces $|\det df| = -\det df$ y la última integral es $-\int_U f^*(\omega)$. □

Esto nos muestra que las integrales de formas se transforman bien bajo pull-backs, mientras que las de funciones no. No vale que $\int_V a = \int_U a \circ f$, su obvio pull-back. Tiene que aparecer el factor $|\det df|$ que mide cómo f altera el volumen. Las formas lo llevan incorporado.

¿Por qué es tan importante esto? Bueno, para integrales en $\mathbb{R}^n$ no hay mayor problema con las funciones, uno pone ese determinante y asunto arreglado. Sin embargo, las integrales de formas serán una herramienta potente en variedades, donde no podremos hablar de *determinante* (al menos no antes de introducir la teoría de formas diferenciales).

6.2. Integración en un entorno coordenado

Antes de definir cómo integrar una forma en una variedad, vamos a definir cómo integrarla en un cierto entorno coordenado. Luego utilizaremos *partición de la unidad* para integrar en una variedad. En el caso de una variedad cubierta por una sola parametrización, el segundo paso es innecesario (en la práctica, por tanto, generalmente sólo será necesario este primer paso).

Definición 6.2.1. Diremos que una variedad $M \subset \mathbb{R}^k$ es *compacta* si lo es como subconjunto de $\mathbb{R}^k$.

Definición 6.2.2. Sea M una variedad con borde, $\omega \in \Omega^k(M)$. Definimos el *soporte* de ω como

$$\operatorname{sop} \omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$$

Lema 6.2.3. *Sean M, N variedades con borde, $f : M \to N$ un difeomorfismo y $\omega \in \Omega^k(N)$. Entonces*

$$\operatorname{sop} f^*(\omega) = f^{-1}(\operatorname{sop} \omega)$$

En particular, si ω tiene soporte compacto entonces $f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$ tiene soporte compacto.

Demostración. Sea $q \in M$. Como f es un difeomorfismo, entonces df_q es un isomorfismo, y por lo tanto $(df_q)^*$ lo es también. Entonces

$$f^*(\omega)(q) = (df_q)^*(\omega(f(q)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega(f(q)) = 0$$

Esto prueba que

$$f\left(\{q \in M : f^*(\omega)(q) = 0\}\right) = \{p \in N : \omega(p) = 0\}$$

de donde se deduce la tesis. □

En particular, si $\varphi : U \to M$ es una parametrización, entonces

$$\operatorname{sop} \varphi^*(\omega) = \varphi^{-1}(\operatorname{sop} \omega|_{\varphi(U)})$$

luego si $\omega \in \Omega^k(M)$ tiene soporte compacto, entonces $\varphi^*(\omega) \in \Omega^k(U)$ también lo tiene.

Proposición 6.2.4. *Sea M una variedad con borde de dimensión n orientada y $\omega \in \Omega^n(M)$ de soporte compacto. Si $\varphi : U \to M$ y $\psi : V \to M$ son parametrizaciones compatibles con la orientación de M tales que* $\operatorname{sop} \omega \subset \varphi(U) = \psi(V)$ *entonces*

$$\int_U \varphi^*(\omega) = \int_V \psi^*(\omega)$$

Demostración. Sabemos de la existencia de ambas integrales por el ejercicio anterior. Sea $f : U \to V$ el cambio de coordenadas, $f = \psi^{-1} \circ \varphi$, por lo tanto $\psi \circ f = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
 & \varphi(U) = \psi(V) & \\
U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "f"'] & & V \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Como φ y ψ son difeomorfismos que preservan la orientación, entonces por composición f es un difeomorfismo que preserva la orientación. Aplicando el teorema de cambio de variable para formas (la proposición 6.1.7) a la forma $\psi^*(\omega)$ y a f,

$$\int_V \psi^*(\omega) = \int_U f^*(\psi^*(\omega)) = \int_U (\psi \circ f)^*(\omega) = \int_U \varphi^*(\omega)$$ □

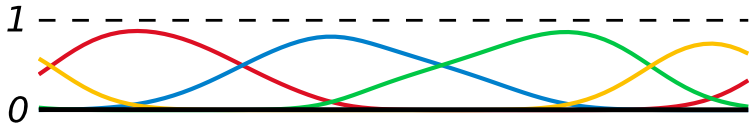


Figura 6.1: Una partición de la unidad de S^1 por cuatro funciones: S^1 fue desenrollado sobre la línea de abajo, y la línea punteada superior representa la suma de las funciones.

Gracias a esta proposición, podemos hacer la siguiente

Definición 6.2.5. Sea M una variedad de dimensión n con borde orientada, $\varphi : U \to M$ una parametrización compatible con la orientación de M, $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que su soporte es compacto y cumple sop $\omega \subset \varphi(U)$. Definimos

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^*(\omega)$$

Observación 6.2.6. Vemos finalmente el interés de las formas diferenciales. Como los difeomorfismos (las parametrizaciones) van del espacio euclídeo en la variedad, no podemos hablar de determinante (como hacíamos con un difeomorfismo en el espacio euclídeo, ahorrándonos por ejemplo en Cálculo II a través del teorema de cambio de variable de tener que hablar de formas diferenciales). Por lo tanto las formas nos permiten integrar en variedades: le podemos dar sentido a la expresión $\int_M \omega$ definiéndola como $\int_U \varphi^*(\omega)$.

Observación 6.2.7. De la linealidad tanto de φ^* como de la integral de formas en $\mathbb{H}^n$, se deduce la linealidad de la integral de formas en un entorno coordenado.

6.3. Integración en una variedad compacta

Ahora consideraremos que M es compacta (de manera que automáticamente toda forma en M tiene soporte compacto), y no pediremos que $\omega \in \Omega^n(M)$ tenga su soporte contenido en algún entorno coordenado.

Definición 6.3.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un *cubrimiento abierto de* A si $U_i \subset A$ son abiertos relativos de A tales que $A = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Definición 6.3.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ un cubrimiento abierto de A. Una *partición de la unidad* (finita) de A subordinada a $\mathcal{U}$ es una familia de funciones diferenciables $\{\rho_i : M \to [0,1] : i = 1, \ldots, r\}$ que verifican:

- sop $\rho_i \subset U_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$,
- $\sum_{i=1}^r \rho_i = 1$, es decir $\sum_{i=1}^r \rho_i(x) = 1$ para todo $x \in M$.

(ver figura 6.1).

Teorema de partición de la unidad. *Sea M una variedad compacta con borde y sea $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces siempre existe una partición de la unidad de M subordinada a $\mathcal{U}$.*

Observación 6.3.3. Como M es compacta, podemos tomar una partición de la unidad finita. Ver [Spi] para un enunciado más general del teorema donde no se requiere que M sea compacta, pero posiblemente se precisan infinitas funciones ρ_i. No nos aporta mucho más, pues nosotros lo utilizaremos para variedades compactas.

Definición 6.3.4. Sea M una variedad de dimensión n compacta con borde orientada, $\omega \in \Omega^n(M)$. Al ser M compacta existe un atlas finito $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r : \varphi_i : U_i \to M\}$ compatible con la orientación de M. Tenemos $M = \varphi_1(U_1) \cup \cdots \cup \varphi_r(U_r)$.

Sea $\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{\varphi_1(U_1), \ldots, \varphi_r(U_r)\}$. Tenemos entonces que

$$\omega = \sum_i \rho_i \omega$$

con $\rho_i\omega \in \Omega^n(M)$ tal que sop $(\rho_i\omega) \subset$ sop $(\rho_i) \subset \varphi_i(U_i)$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Podemos entonces definir

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_M \rho_i \omega$$

Proposición 6.3.5. *La definición anterior tiene sentido, es decir, no depende de la elección del atlas ni de la partición de la unidad.*

Demostración. Sea $\tilde{\mathcal{A}} = \{\psi_1, \ldots, \psi_m : \psi_j : V_j \to M\}$ otro atlas finito compatible con la orientación de M. Sea $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{\psi_1(V_1), \ldots, \psi_m(V_m)\}$. Tenemos que ver que

$$\sum_{i=1}^{r} \int_M \rho_i \omega = \sum_{j=1}^{m} \int_M \mu_j \omega$$

Hagamos la cuenta. Por un lado:

$$\int_M \rho_i \omega = \int_M \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \right) \rho_i \omega = \sum_{j=1}^{m} \int_M \mu_j \rho_i \omega$$

Sumamos en i:

$$\sum_{i=1}^{r} \int_M \rho_i \omega = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} \int_M \mu_j \rho_i \omega$$

Misma cuenta con el otro término:

$$\int_M \mu_j \omega = \int_M \left(\sum_{i=1}^{r} \rho_i \right) \mu_j \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_M \rho_i \mu_j \omega$$

Sumamos en j y permutamos las sumas:

$$\sum_{j=1}^{m} \int_M \mu_j \omega = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r} \int_M \rho_i \mu_j \omega = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} \int_M \mu_j \rho_i \omega$$

y la proposición queda demostrada. □

Observación 6.3.6. Gracias a la linealidad de la integral en un entorno coordenado deducimos la linealidad de esta integral general, y observamos que si el soporte de la forma está contenido en un entorno coordenado, entonces la integral de la sección 6.2 y ésta coinciden.

Tenemos finalmente bien definido lo que es integrar una forma en una variedad. Ya vimos que las formas en el espacio euclídeo se transforman bien bajo pull-backs por difeomorfismos, lo cual es esencialmente el teorema de cambio de variable. Probemos el análogo *arriba*, en las variedades.

Proposición 6.3.7. *Sean M y N variedades de dimensión n compactas con borde orientadas. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo que preserva la orientación y $\omega \in \Omega^n(N)$, entonces*

$$\int_M f^*(\omega) = \int_N \omega$$

Demostración. Supongamos primero que existe una parametrización $\psi : V \to N$ compatible con la orientación tal que $\operatorname{sop}(\omega) \subset \psi(V)$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ & V \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Observar que $f^{-1} \circ \psi : V \to M$ es una parametrización de M compatible con la orientación, luego

$$\int_M f^*(\omega) = \int_V (f^{-1} \circ \psi)^*(f^*(\omega)) = \int_V (f \circ f^{-1} \circ \psi)^*(\omega) = \int_V \psi^*(\omega) = \int_N \omega$$

Hagamos ahora el caso general. Sea $\{\psi_1, \ldots, \psi_r : \psi_i : V_i \to N\}$ un atlas compatible con la orientación de N. Sea $\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{\psi_1(V_1), \ldots, \psi_r(V_r)\}$. Entonces $\operatorname{sop}(\rho_i\omega) \subset \psi_i(V_i)$ para todo i, luego utilizando lo recién demostrado:

$$\int_N \omega = \sum_{i=1}^r \int_N \rho_i\omega = \sum_{i=1}^r \int_M f^*(\rho_i\omega) = \sum_{i=1}^r \int_M (\rho_i \circ f) f^*(\omega) = \int_M f^*(\omega)$$

pues las funciones $\rho_i \circ f : M \to [0, 1]$ forman una partición de la unidad subordinada a $\{(f^{-1} \circ \psi_1)(V_1), \ldots, (f^{-1} \circ \psi_r)(V_r)\}$, ya que $\sum_i (\rho_i \circ f) = 1$ y

$$\operatorname{sop}(\rho_i \circ f) = f^{-1}(\operatorname{sop} \rho_i) \subset f^{-1}(\psi_i(V_i)) \qquad \square$$

Ejercicio 6.3.8. En las hipótesis de la proposición anterior, probar que si f invierte orientación entonces $\int_M f^*(\omega) = -\int_N \omega$.

Proposición 6.3.9. *Sea M una variedad de dimensión n compacta con borde orientada, $\omega \in \Omega^n(M)$. Entonces*

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$$

Demostración. Supongamos que existe $\varphi : U \to M$ una parametrización compatible con la orientación de M tal que sop $\omega \subset \varphi(U)$. Orientemos $\mathbb{H}^n$ al revés: sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $h(x_1, x_2 \ldots, x_n) = (-x_1, x_2 \ldots, x_n)$. Definimos $-U = h^{-1}(U)$ y $-\varphi = \varphi \circ h$. Tenemos entonces $-\varphi : -U \to -M$ una parametrización de $-M$ compatible con su orientación.

$$\begin{aligned}\int_{-M} \omega &\overset{\text{def.}}{=} \int_{-U} (-\varphi)^*(\omega) = \int_{-U} (\varphi \circ h)^*(\omega) = \int_{-U} (h^* \circ \varphi^*)(\omega) \\ &= -\int_U \varphi^*(\omega) \overset{\text{def.}}{=} -\int_M \omega\end{aligned}$$

En general, sea $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r : \varphi_i : U_i \to M\}$ un atlas compatible con la orientación de M y $\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{\varphi_1(U_1), \ldots, \varphi_r(U_r)\}$. Entonces, usando lo recién demostrado:

$$-\int_M \omega \overset{\text{def.}}{=} -\sum_{i=1}^r \int_M \rho_i \omega = \sum_{i=1}^r \left(-\int_M \rho_i \omega \right) = \sum_{i=1}^r \int_{-M} \rho_i \omega \overset{\text{def.}}{=} \int_{-M} \omega \qquad \square$$

6.4. Integración de funciones en variedades

Ya habíamos adelantado que la forma de volumen nos permitiría integrar funciones en variedades:

Definición 6.4.1. Sea M una variedad de dimensión n compacta con borde orientada, $dV \in \Omega^n(M)$ la forma de volumen. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, definimos

$$\int_M f \overset{\text{def.}}{=} \int_M f \, dV$$

Observación 6.4.2. Hay que entender bien qué está pasando. dV es una n-forma, f es una 0-forma, por lo tanto $f \wedge dV = f \, dV \in \Omega^n(M)$, de donde tenemos perfectamente definida la integral del miembro derecho.

Esto es novedoso para variedades de codimensión mayor que 0. Para una n-variedad M de codimensión 0 esto no nos dice nada nuevo, porque ya sabemos integrar funciones en $\mathbb{R}^n$. Como todo está bien definido, la integral de $f \, dV$ en M es igual a la integral de Riemann de f en M, porque $dV = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, y tenemos que

$$\int_M f \, dV = \int_M f \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \overset{\text{def.}}{=} \int_M f \, dx_1 \cdots dx_n$$

En el caso particular en el que $n = 1$, o sea $M \subset \mathbb{R}$, nos queda la integral de Riemann usual, donde la forma de volumen es $dt \in \Omega^1(M)$ tal que $dt(x) = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6.5. Volúmenes de variedades

Definición 6.5.1. Sea M una variedad de dimensión n compacta con borde orientada, $dV \in \Omega^n(M)$ la forma de volumen. Definimos el *volumen* de M como

$$\mathrm{vol}\,(M) = \int_M dV$$

Área de una superficie

En el caso de una superficie regular con borde $S \subset \mathbb{R}^3$, llamamos *área* a su volumen, que es entonces

$$\text{área } (S) = \int_S dA$$

Proposición 6.5.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular compacta orientada con borde cubierta por una parametrización compatible $\varphi : U \to \varphi(U) = S$. Entonces*

$$\varphi^*(dA) = \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \wedge dv \tag{6.1}$$

y en particular

$$\text{área } (S) = \int_U \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv \tag{6.2}$$

Demostración. Tenemos que $\varphi^*(dA) = a \, du \wedge dv$, para $a : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que determinaremos.

$$\varphi^*(dA)(q)(e_1, e_2) = a(q) \, (du \wedge dv)(e_1, e_2) = a(q)$$

Por otro lado calculamos

$$\begin{aligned} \varphi^*(dA)(q)(e_1, e_2) &= dA(\varphi(q))(d\varphi_q(e_1), d\varphi_q(e_2)) = N(\varphi(q)) \cdot \varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \\ &= \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|} \cdot \varphi_u(q) \times \varphi_v(q) = \|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\| \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $a = \|\varphi_u \times \varphi_v\|$, y tenemos entonces

$$\varphi^*(dA) = \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \wedge dv$$

El área de una superficie se calcula entonces así:

$$\begin{aligned} \text{área } (S) &= \int_S dA = \int_U \varphi^*(dA) = \int_U \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \wedge dv \\ &\overset{\text{def.}}{=} \int_U \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv \end{aligned}$$

□

Ver [dC] §2.8 para una interpretación geométrica de la fórmula 6.2.

Longitud de una curva

En el caso de una variedad C de dimensión 1, llamamos *longitud* a su volumen, que es entonces

$$\text{long } (C) = \int_C ds$$

Proposición 6.5.3. *Sea $C \subset \mathbb{R}^k$ una variedad de dimensión 1 compacta conexa orientada con borde cubierta por una parametrización compatible con la orientación $\alpha : [a, b] \to C$. Entonces*

$$\alpha^*(ds) = \|\alpha'\| \, dt \tag{6.3}$$

y en particular

$$\text{long } (C) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt \tag{6.4}$$

Demostración. Sea $T : C \to \mathbb{R}^k$ el campo unitario tangente compatible con la orientación. Observar que $T(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ para todo t. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\alpha^*(ds)(t)(v) &= ds(\alpha(t))(d\alpha_t(v)) = ds(\alpha(t))(\alpha'(t)\, v) \\
&= \alpha'(t)\, v \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \|\alpha'(t)\|\, v \\
&= \|\alpha'(t)\|\, dt(v)
\end{aligned}$$

donde dt es la forma definida en la observación 6.4.2. Tenemos pues $\alpha^*(ds) = \|\alpha'\|\, dt$ de donde se deduce que

$$\text{long }(C) = \int_C ds = \int_{[a,b]} \alpha^*(ds) = \int_{[a,b]} \|\alpha'\|\, dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt \qquad \square$$

6.6. Integración en superficies

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular compacta con borde orientada y $\varphi : U \to S = \varphi(U)$ una parametrización de S que cubre toda la superficie y es compatible con su orientación. Consigamos algunas fórmulas explícitas para el cálculo.

Integración de campos escalares en superficies

Sea $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar en S, entonces

$$\begin{aligned}
\int_S f &\overset{\text{def.}}{=} \int_S f\, dA = \int_U \varphi^*(f\, dA) = \int_U \varphi^*(f) \wedge \varphi^*(dA) \\
&= \int_U (f \circ \varphi)\, \|\varphi_u \times \varphi_v\|\, du \wedge dv \\
&\overset{\text{def.}}{=} \int_U (f \circ \varphi)\, \|\varphi_u \times \varphi_v\|\, du\, dv
\end{aligned}$$

Integración de 2-formas en superficies

Sea $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ y la restringimos a S. Si $\omega = a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy$ y definimos el campo vectorial $F = (a, b, c) : S \to \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_S \omega &= \int_U \varphi^*(\omega) \\
&= \int_U \Big((a \circ \varphi)\, \varphi^*(dy \wedge dz) + (b \circ \varphi)\, \varphi^*(dz \wedge dx) + (c \circ \varphi)\, \varphi^*(dx \wedge dy) \Big)
\end{aligned}$$

Si $\varphi^*(dy \wedge dz) = f\, du \wedge dv$ para cierta $f : U \to \mathbb{R}$, entonces por un lado tenemos que

$$\varphi^*(dy \wedge dz)(q)(e_1, e_2) = f(q)\, (du \wedge dv)(e_1, e_2) = f(q)$$

y por otro lado, conseguimos que

$$\varphi^*(dy \wedge dz)(q)(e_1, e_2) = (dy \wedge dz)(\varphi(q))(d\varphi_q(e_1), d\varphi_q(e_2)) = (dy \wedge dz)(\varphi_u(q), \varphi_v(q))$$

de donde

$$\varphi^*(dy \wedge dz) = (dy \wedge dz)(\varphi_u, \varphi_v)\, du \wedge dv \tag{6.5}$$

Conseguimos fórmulas análogas para $\varphi^*(dz \wedge dx)$ y $\varphi^*(dx \wedge dy)$, de donde concluimos gracias al ejemplo 1.3.23 que

$$\begin{aligned}\int_S \omega &= \int_U \Big\langle F \circ \varphi, \Big((dy \wedge dz)(\varphi_u, \varphi_v), (dz \wedge dx)(\varphi_u, \varphi_v), (dx \wedge dy)(\varphi_u, \varphi_v)\Big)\Big\rangle\, du \wedge dv \\ &= \int_U \Big\langle F \circ \varphi, \varphi_u \times \varphi_v \Big\rangle\, du\, dv\end{aligned}$$

Integración de campos vectoriales en superficies

Algo que no sabemos hacer aún es integrar un campo vectorial $F : S \to \mathbb{R}^3$. Si $N : S \to \mathbb{R}^3$ es el campo normal unitario compatible con la orientación de S, entonces lo que haremos será integrar en S la función $F \cdot N$. Esto tiene un sentido físico, lo cual justifica el nombre que le daremos, *flujo*.

Definición 6.6.1. Sea $F : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Definimos el *flujo de F a través de S* mediante

$$\int_S F \overset{\text{def.}}{=} \int_S F \cdot N \overset{\text{def.}}{=} \int_S F \cdot N\, dA$$

Observación 6.6.2. Hay que asegurarse de entender bien qué significa cada miembro. A la izquierda, estamos definiendo lo que es integrar un campo vectorial en una superficie, algo que no sabemos hacer. Al medio, definimos integrar ese campo vectorial como integrar su producto escalar con N, lo cual nos da una función diferenciable, que sabemos integrar. Es por definición el miembro de la derecha: integrar la forma $F \cdot N\, dA$.

Veamos explícitamente cómo integrar un campo vectorial. Escribamos $F = (F_1, F_2, F_3)$ y $N = (N_1, N_2, N_3)$.

$$\begin{aligned}\int_S F &\overset{\text{def.}}{=} \int_S F \cdot N\, dA = \int_S (F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3)\, dA \\ &= \int_S (F_1 N_1\, dA + F_2 N_2\, dA + F_3 N_3\, dA)\end{aligned}$$

Recordemos el lema 5.4.15,

$$N_1\, dA = dy \wedge dz \qquad N_2\, dA = dz \wedge dx \qquad N_3\, dA = dx \wedge dy$$

por lo tanto usando la ecuación (6.5) y sus expresiones análogas, conseguimos que

$$\begin{aligned}\int_S F &= \int_S (F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy) \\ &= \int_U \varphi^*(F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy) \\ &= \int_U \Big((F_1 \circ \varphi)\, \varphi^*(dy \wedge dz) + (F_2 \circ \varphi)\, \varphi^*(dz \wedge dx) + (F_3 \circ \varphi)\, \varphi^*(dx \wedge dy)\Big) \\ &= \int_U \Big\langle (F \circ \varphi), \varphi_u \times \varphi_v \Big\rangle\, du\, dv\end{aligned}$$

Esto encaja perfectamente con el parágrafo anterior. Tenemos entonces:

$$\int_S F = \int_S \omega_F^2$$

donde ω_F^2 se define como en la sección 2.5.

6.7. Integración en curvas

Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ una variedad de dimensión 1 compacta conexa orientada con borde, parametrizada por $\alpha : [a, b] \to C$ compatible con su orientación.

Integración de campos escalares en curvas

Sea $f : C \to \mathbb{R}$ un campo escalar en C, entonces:

$$\int_C f \overset{\text{def.}}{=} \int_C f\, ds = \int_{[a,b]} \alpha^*(f\, ds) = \int_{[a,b]} (f \circ \alpha)\, \|\alpha'\|\, dt = \int_a^b (f(\alpha(t))\, \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Integración de 1-formas en curvas

Sea $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ y la restringimos a C. Si $\omega = a\, dx + b\, dy + c\, dz$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y definimos el campo vectorial $F = (a, b, c) : S \to \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &= \int_{[a,b]} \alpha^*(\omega) \\
&= \int_{[a,b]} \alpha^*(a\, dx + b\, dy + c\, dz) \\
&= \int_{[a,b]} \Big((a \circ \alpha)\, \alpha^*(dx) + (b \circ \alpha)\, \alpha^*(dy) + (c \circ \alpha)\, \alpha^*(dz) \Big)
\end{aligned}$$

Si $\alpha^*(dx) = f\, dt$ entonces por un lado $\alpha^*(dx)(t)(1) = f(t)$, y por otro lado

$$\alpha^*(dx)(t)(1) = dx(\alpha(t))(d\alpha_t(1)) = dx(\alpha'(t)) = x'(t)$$

de donde

$$\alpha^*(dx) = x'\, dt \tag{6.6}$$

Análogamente $\alpha^*(dy) = y'\, dt$ y $\alpha^*(dz) = z'\, dt$, y por lo tanto

$$\int_C \omega = \int_{[a,b]} \Big\langle (F \circ \alpha), \alpha' \Big\rangle\, dt = \int_a^b \Big\langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \Big\rangle\, dt$$

Integración de campos vectoriales en curvas

Como en superficies, no sabemos aún integrar campos vectoriales en curvas. Definimos $T : C \to \mathbb{R}^3$ el campo unitario tangente compatible con la orientación de C, y lo que haremos será integrar el campo escalar $F \cdot T$. Esto también tiene un sentido físico que justifica su nombre, *circulación*.

Definición 6.7.1. Sea $F : C \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Definimos la *circulación de F a lo largo de C* mediante

$$\int_C F \overset{\text{def.}}{=} \int_C F \cdot T \overset{\text{def.}}{=} \int_C F \cdot T \, ds$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_C F &\overset{\text{def.}}{=} \int_C F \cdot T \, ds = \int_C (F_1 \, T_1 + F_2 \, T_2 + F_3 \, T_3) \, ds \\ &= \int_C (F_1 \, T_1 \, ds + F_2 \, T_2 \, ds + F_3 \, T_3 \, ds) \end{aligned}$$

Recordemos que $T_1 \, ds = dx \quad T_2 \, ds = dy \quad T_3 \, ds = dz$ (lema 5.4.12), por lo tanto usando la expresión (6.6) y sus expresiones análogas, conseguimos que

$$\begin{aligned} \int_C F &= \int_C (F_1 dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz) \\ &= \int_{[a,b]} \alpha^* (F_1 dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz) \\ &= \int_{[a,b]} \Big((F_1 \circ \alpha) \, \alpha^*(dx) + (F_2 \circ \alpha) \, \alpha^*(dy) + (F_3 \circ \alpha) \, \alpha^*(dz) \Big) \\ &= \int_{[a,b]} \Big\langle (F \circ \alpha), \alpha' \Big\rangle \, dt \end{aligned}$$

De nuevo, esto encaja perfectamente con el parágrafo anterior. Tenemos entonces:

$$\int_C F = \int_C \omega_F^1$$

donde ω_F^1 se define como en la sección 2.5.

6.8. Teorema de Stokes

Con toda la maquinaria que hemos desarrollado, podemos expresar el teorema de Stokes casi sin palabras:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Tenemos definido lo que es una variedad y su orientación, el borde de una variedad y su orientación, la integral de una forma diferencial en una variedad y la derivada exterior de una forma en una variedad: todo está listo. Además, en la práctica el teorema es interesante leerlo de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

Teorema de Stokes. *Sea M una variedad de dimensión n compacta con borde orientada, $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Consideremos ∂M orientado con la orientación borde inducida por M. Entonces:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Observación 6.8.1. Si $\partial M = \emptyset$ entonces definimos $\int_{\partial M} \omega = 0$, y el teorema también se aplica.

Demostración. Los operadores $\int_M$, d e $\int_{\partial M}$ son lineales, por lo tanto podemos asumir que ω es tal que sop $\omega \subset \varphi(U)$, donde $\varphi : U \to M$ es una parametrización compatible con la orientación de M y $U \subset \mathbb{H}^n$ es un abierto.

Supongamos primero que U es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Como $U \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$, entonces $\varphi(U) \cap \partial M = \emptyset$, y por lo tanto

$$\int_M d\omega = \int_U \varphi^*(d\omega) = \int_U d(\varphi^*(\omega)) \qquad\qquad \int_{\partial M} \omega = 0$$

Queremos ver entonces que la integral de la izquierda es 0. Sea $\nu = \varphi^*(\omega) \in \Omega^{n-1}(U)$, por lo tanto se escribe de manera única como

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \overline{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

donde $\overline{dx_i}$ significa que el término fue omitido y $f_i : U \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. El factor $(-1)^{i-1}$ se introduce por conveniencia, pues ahora tenemos:

$$d\nu = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Como $d\nu \in \Omega^n(U)$, podemos integrarla:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\nu = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_1 \cdots dx_n$$

usando la linealidad de la integral. Por comodidad escribimos la integral sobre $\mathbb{R}^n$ y no sobre $U \subset \mathbb{R}^n$, valiendo 0 allí donde no está definida. Ahora podemos usar el teorema de Fubini (o de integrales iteradas) para integrar en el orden que deseemos, así que para cada i, integremos primero el término i-ésimo con respecto a x_i:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\nu = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_i \right) dx_1 \cdots \overline{dx_i} \cdots dx_n$$

Estamos tomando la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_i$ sobre $(-\infty, +\infty)$, pero como ν tiene soporte compacto entonces una primitiva del integrando se anula fuera de un intervalo suficientemente grande. Aplicando la regla de Barrow, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_i = 0$$

Esto vale para todo $i = 1, \ldots, n$, de donde:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} d\nu = \int_M d\omega$$

que es lo que queríamos probar.

Supongamos ahora que U es un abierto de $\mathbb{H}^n$. Teníamos la expresión

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} d\nu = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dx_1 \cdots dx_n$$

El mismo razonamiento hecho recién vale ahora para todas las variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$, pues allí $\mathbb{H}^n$ es igual a $\mathbb{R}^n$: se anulan todos los sumandos salvo el último. Tenemos entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

Como ν tiene soporte compacto, f_n se anula si x_n está fuera de un intervalo de la forma $(0, a)$ para un a suficientemente grande, pero aunque $f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) = 0$, tenemos que $f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \neq 0$: es aquí donde cambia el razonamiento con respecto al caso anterior (lógico, pues en este caso $\int_{\partial M} \omega \neq 0$). Aplicando el teorema fundamental del cálculo como antes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{a} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} -f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \end{aligned}$$

Calculemos por otro lado $\int_{\partial M} \omega$. Como $\nu = \varphi^*(\omega)$,

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial \mathbb{H}^n} \nu$$

pero ya vimos que

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \overline{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

y en este caso, como $x_n = 0$ en $\partial \mathbb{H}^n$, entonces $dx_n = 0$ en $\partial \mathbb{H}^n$, luego en $\partial \mathbb{H}^n$ sólo sobrevive el último sumando. Integramos, entonces:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial \mathbb{H}^n} \nu = \int_{\partial \mathbb{H}^n} (-1)^{n-1} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

Ya sabemos que si orientamos $\partial \mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ como borde de $\mathbb{H}^n$, esta orientación es la misma que la usual de $\mathbb{R}^{n-1}$ cuando n es par, y es la opuesta cuando n es impar, de donde:

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (-1)^{n-1} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

pero $(-1)^n(-1)^{n-1} = -1$, por lo tanto

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

concluyendo la demostración. $\square$

Leyéndolo de izquierda a derecha, tenemos:

Corolario 6.8.2. *Si M es una n-variedad compacta sin borde orientada y $\omega \in \Omega^n(M)$ es exacta, entonces*

$$\int_M \omega = 0$$

Observación 6.8.3. El recíproco también vale: si ω es tal que que $\int_M \omega = 0$ para toda n-variedad M compacta sin borde, entonces ω es exacta. Esto no es sencillo de probar: se deduce del teorema de de Rham, que pertenece a una teoría más avanzada de la que aquí tratamos. Ver [ST]. Observar sin embargo que sí lo hemos demostrado para 1-formas y curvas (teorema 3.2.1).

Leyéndolo de derecha a izquierda, tenemos:

Corolario 6.8.4. *Si M es una n-variedad compacta con borde orientada y $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ es cerrada, entonces:*

$$\int_{\partial M} \omega = 0$$

Observación 6.8.5. El teorema de Stokes también se aplica a "variedades con aristas" (cf. [Spi]) o "variedades con singularidades" (cf. [Ivo], §10.6): por ejemplo, un cilindro de altura finita (con las tapas) o un cuadrado en $\mathbb{R}^2$ no son variedades con borde como nosotros las definimos, pero igual podemos aplicar el teorema de Stokes.

Una de las hipótesis del teorema de Stokes es la compacidad de la variedad. Veamos que no podemos ignorarla:

Contraejemplo 6.8.6. Sea M la variedad de dimensión 2 sin borde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, orientada con la orientación usual de $\mathbb{R}^2$. Está acotada, pero no es cerrada, luego no es compacta. Definimos $\omega \in \Omega^1(M)$ mediante $\omega = -y\,dx + x\,dy$, entonces tiene soporte compacto. Si integramos $d\omega$ sobre M obtenemos 2π, pero si integramos ω sobre $\partial M = \emptyset$ nos da 0. Luego el teorema de Stokes no se aplica.

Hagamos un ejemplo en detalle.

Ejemplo 6.8.7. Sea $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ cerrada y sea F su campo asociado. Sabiendo que F cumple

$$\begin{aligned} F(x, y, 0) &= (\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\cos x, e^x, y - 1) \\ F(x, y, 1) &= (\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\cos x, e^x, 0) \end{aligned}$$

calcular su flujo a través de la superficie cilíndrica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ orientada con la normal entrante.

Sólo podemos manejar la información que tenemos mediante el teorema de Stokes. Sea M el cilindro relleno orientado con la orientación usual de $\mathbb{R}^3$, A el círculo inferior, B el círculo superior. Entonces:

$$\begin{aligned} (\partial M, \text{borde de } M) &= (S, \text{saliente}) \cup (B, \text{saliente}) \cup (A, \text{saliente}) \\ &= -S \cup B \cup A \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Stokes: como ω es cerrada,

$$0 = \int_M d\omega = \int_M \operatorname{div} F = \int_{-S} F + \int_A F + \int_B F$$

Por lo tanto:

$$\int_S F = \int_A F + \int_B F$$

Parametrizamos A por $\varphi : U = (0,1) \times (0,2\pi) \to A$, $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0)$. Tenemos que $\varphi_r \times \varphi_\theta(r,\theta) = (0,0,r)$: es la normal entrante, por lo tanto φ invierte la orientación.

$$\begin{aligned}\int_A F &= -\int_U F(\varphi(r,\theta)) \cdot \varphi_r \times \varphi_\theta = -\int_U (r\operatorname{sen}\theta - 1)\, r \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r\operatorname{sen}\theta - r)\, dr = \pi\end{aligned}$$

Parametrizamos B con $\varphi : U \to B$, $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1)$. De nuevo, $\varphi_r \times \varphi_\theta = (0,0,r)$, pero en este caso es la normal saliente: φ preserva la orientación. Entonces:

$$\int_B F = \int_U F(\varphi(r,\theta)) \cdot \varphi_r \times \varphi_\theta = 0$$

Concluimos entonces que

$$\int_S \omega = \int_S F = \int_A F = \pi$$

6.8.1. Los teoremas clásicos

Observación 6.8.8. Uno podría ver el teorema fundamental del cálculo como un caso particular del teorema general de Stokes, y demostrarlo a partir de éste. Pero estaríamos cayendo en un círculo vicioso, porque recién demostramos el teorema de Stokes a partir del teorema fundamental del cálculo...

Teorema del gradiente. *Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ una variedad de dimensión 1 compacta con borde tal que existe $\alpha : [a,b] \to C$ una parametrización compatible con la orientación de C y sea $f : C \to \mathbb{R}$ diferenciable. Entonces*

$$\int_C df = \alpha(b) - \alpha(a)$$

o, en su notación más clásica:

$$\int_C \nabla f \cdot T\, ds = \alpha(b) - \alpha(a)$$

Demostración. Basta observar que $\partial C = \{\alpha(a), \alpha(b)\}$ (una variedad de dimensión 0), tener cuidado con la orientación del borde y aplicar el teorema de Stokes. □

Teorema de Green. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ compacto, $F = (a,b) : U \to \mathbb{R}$ un campo escalar, entonces*

$$\oint_{\partial U} a\, dx + b\, dy = \iint_U \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Demostración. Basta observar que $d(a\,dx + b\,dy) = \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}$ y aplicar el teorema de Stokes. $\square$

Teorema de Stokes clásico. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta con borde orientada, $F : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, $N : S \to \mathbb{R}^3$ el campo normal unitario compatible con la orientación de S. Entonces*

$$\int_{\partial S} F = \int_S \text{rot } F$$

o, en su notación más clásica, si $\partial S = C$:

$$\int_C F \cdot T\,ds = \int_S \text{rot } F \cdot N\,dA$$

Demostración.

$$\int_S \text{rot } F = \int_S \omega^2_{\text{rot } F} = \int_S d\omega^1_F = \int_{\partial S} \omega^1_F = \int_{\partial S} F \qquad \square$$

Observación 6.8.9. Esto parece muy trivial pero no lo es tanto: hay que asegurarse de comprender cada paso. El primer paso es usar que $\int_S X = \int_S \omega^2_X$, probado en la sección 6.6. El segundo es que $\omega^2_{\text{rot } F} = d\omega^1_F$: esto lo vimos en la observación 2.5.4. Luego aplicamos el teorema de Stokes generalizado. Y finalmente usamos que $\int_C Y = \int_C \omega^1_Y$, probado en la sección 6.7

Teorema de la divergencia de Gauss. *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una variedad compacta orientada de dimensión 3 con borde, $F : M \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Entonces*

$$\int_{\partial M} F = \int_M \text{div } F$$

o, en su notación más clásica, si $\partial M = S$:

$$\int_S F \cdot N\,dA = \iiint_M \text{div } F$$

Demostración.

$$\int_M \text{div } F = \int_M \omega^3_{\text{div } F} = \int_M d\omega^2_F = \int_{\partial M} \omega^2_F = \int_{\partial M} F \qquad \square$$

6.8.2. Interpretación física de los operadores clásicos

Gradiente

Sabemos de Cálculo II que el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial que apunta en la dirección de mayor crecimiento del campo escalar.

Rotacional

Sea $p \in \mathbb{R}^3$, $\epsilon > 0$, N un campo normal fijo y $D_\epsilon = \overline{D_\epsilon(p)}$ el disco perpendicular a $N(p)$, orientado por N (normal saliente). Sea $F : D_\epsilon \to \mathbb{R}^3$. Tenemos el teorema de Stokes clásico:

$$\int_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot N \, dA = \int_{\partial D_\epsilon} F \cdot T \, ds$$

Aplicamos el teorema del valor medio para integrales y obtenemos, si $p_\epsilon \in D_\epsilon$:

$$\int_{D_\epsilon} \text{rot } F \cdot N \, dA = (\text{rot } F \cdot N)(p_\epsilon) \, \text{área } (D_\epsilon)$$

Lo juntamos con el teorema de Stokes clásico y tenemos:

$$\int_{\partial D_\epsilon} F \cdot T \, ds = (\text{rot } F \cdot N)(p_\epsilon) \, \text{área } (D_\epsilon)$$

Si hacemos tender ϵ a 0,

$$(\text{rot } F \cdot N)(p) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\text{área } (D_\epsilon)} \int_{\partial D_\epsilon} F \cdot T \, ds$$

Por lo tanto el rotacional de un campo vectorial en un punto es la circulación por unidad de área. Si F es el flujo de un fluido y el rotacional es nulo, F es *irrotacional*, no tiene remolinos. Por ejemplo, si coloco en el fluido una pequeña rueda con aspas se mueve con el fluido, pero no rota alrededor de su eje. Cuidado, porque el drenado de un fluido en una pileta es irrotacional aunque dé vueltas.

Divergencia

Sea $p \in \mathbb{R}^3$, $\epsilon > 0$, $M_\epsilon = \overline{B_\epsilon(p)}$, orientada con la orientación de $\mathbb{R}^3$. Sea $F : M_\epsilon \to \mathbb{R}^3$. Tenemos el teorema de Gauss:

$$\iiint_{M_\epsilon} \text{div } F = \int_{\partial M_\epsilon} F \cdot N \, dA$$

Aplicamos el teorema del valor medio para integrales y obtenemos, si $p_\epsilon \in M_\epsilon$.

$$\iiint_{M_\epsilon} \text{div } F = (\text{div } F)(p_\epsilon) \, \text{vol } (M_\epsilon)$$

Lo juntamos con el teorema de Gauss y tenemos:

$$(\text{div } F)(p_\epsilon) = \frac{1}{\text{vol } (M_\epsilon)} \int_{\partial M_\epsilon} F \cdot N \, dA$$

Si hacemos tender ϵ a 0,

$$(\text{div } F)(p) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\text{vol } (M_\epsilon)} \int_{\partial M_\epsilon} F \cdot N \, dA$$

Por lo tanto la divergencia de un campo vectorial en un punto es el flujo por unidad de volumen. Si F es el campo de velocidad de un gas (o un fluido), la divergencia nos da la tasa de expansión por unidad de volumen.

Si la divergencia es positiva, el gas se expande. Si la divergencia es negativa, el gas se comprime. Si la divergencia es nula, el gas es *incompresible*. En este caso decimos que el campo F es *solenoidal*.

6.9. Homotopía

Recordemos que queríamos demostrar que integrar la forma de ángulo en cualquier curva cerrada que rodea al origen siempre da 2π, siempre y cuando se recorra la curva una sola vez. Formalizando un poco: el truco está en que la forma de ángulo es cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; que si dos curvas cerradas rodean el origen, entonces son *homotópicas*; y que ya vimos que la integral de la forma de ángulo en *una* curva cerrada que rodea el origen da 2π. Hagamos el trabajo directamente para curvas en variedades.

Definición 6.9.1. Sea M una variedad con borde. Dos curvas cerradas $\alpha, \gamma : S^1 \to M$ son *homotópicas* si existe un mapa $F : S^1 \times [0,1] \to M$ diferenciable tal que:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= \alpha(x) \quad \forall x \in S^1 \\ F(x,1) &= \gamma(x) \quad \forall x \in S^1 \end{aligned}$$

Podemos pensar el segundo parámetro como el *tiempo*, por lo tanto dos curvas son homotópicas si es posible deformar diferenciablemente la una en la otra sin salirse de M.

Esta definición es enteramente análoga a la de curvas homotópicas en el espacio euclídeo; sin embargo no está de más reiterarla.

Lema 6.9.2. *Sean M y N variedades, M sin borde y N con borde. Entonces $M \times N$ es una variedad con borde tal que* $\dim (M \times N) = \dim M + \dim N$*, y* $\partial(M \times N) = M \times \partial N$.

Demostración. Tomemos $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ y $\psi : V \subset \mathbb{H}^m \to N$ parametrizaciones. Tenemos que $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{H}^m \simeq \mathbb{H}^{n+m}$ es abierto. Tomamos $\varphi \times \psi : U \times V \to M \times N$ definida como

$$(\varphi \times \psi)(u,v) = (\varphi(u), \psi(v))$$

y es una parametrización de $M \times N$, luego $M \times N$ es una variedad con borde de dimensión $n+m$. Además:

$$\begin{aligned} & \partial(M \times N) = \\ = \; & \{(p_1,p_2) \in M \times N : (p_1,p_2) = (\varphi \times \psi)(q_1,q_2), (q_1,q_2) \in (U \times V) \cap \partial\mathbb{H}^{n+m}\} \\ = \; & \{(p_1,p_2) \in M \times N : (p_1,p_2) = (\varphi \times \psi)(q_1,q_2), q_1 \in U, q_2 \in (V \cap \partial\mathbb{H}^m)\} \\ = \; & M \times \partial N \end{aligned}$$

□

Observar que si M, N son variedades orientadas, entonces $M \times N$ adquiere una orientación natural (ver [GP], p. 97 para más detalles).

Corolario 6.9.3. *Sea M una variedad orientada. Si $N = [0,1]$ y consideramos en $M \times \{0\}$ y $M \times \{1\}$ las orientaciones inducidas como borde de $M \times [0,1]$, entonces el difeomorfismo $F : M \times \{0\} \to M \times \{1\}$ definido por $F(x,0) = (x,1)$ invierte orientación.*

Demostración. Esto es cierto si $dF_p : T_p(M \times \{0\}) \to T_{F(p)}(M \times \{1\})$ invierte orientación para todo $p \in M \times \{0\}$. Pero dF_p actúa como la identidad, y T_pM está orientado al revés en el codominio que en el dominio (se ve geométricamente), por lo tanto dF_p invierte orientación. □

Observación 6.9.4. El producto de variedades con borde no tiene por qué ser una variedad con borde. Por ejemplo, $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ no lo es, y es producto de variedades con borde.

Proposición 6.9.5. *Sea M una variedad, $\alpha, \gamma : S^1 \to M$ dos curvas cerradas diferenciables y homotópicas. Si $\omega \in \Omega^1(M)$ es cerrada, entonces*

$$\int_\alpha \omega = \int_\gamma \omega$$

Demostración. Como α y γ son homotópicas, existe $F : S^1 \times [0,1] \to M$ diferenciable tal que

$$\begin{aligned} F(x,0) &= \alpha(x) \quad \forall x \in S^1 \\ F(x,1) &= \gamma(x) \quad \forall x \in S^1 \end{aligned}$$

Usamos el hecho de que $d\omega = 0$, el teorema de Stokes y el corolario anterior:

$$0 = \int_{S^1 \times [0,1]} F^*(d\omega) = \int_{S^1 \times [0,1]} d(F^*\omega) = -\int_{S^1 \times \{0\}} F^*(\omega) + \int_{S^1 \times \{1\}} F^*(\omega) = -\int_\alpha \omega + \int_\gamma \omega$$

□

Ejemplo 6.9.6. La integral de línea de la forma de ángulo $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ da 2π sobre cualquier curva cerrada que rodea al origen (recorrida una vez), pues ya vimos que esto valía para S^1 (ejemplo 3.2.4) y cualquier otra curva cerrada que rodee el origen (y se recorra una vez) es homotópica a S^1.

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema enunciado en la sección 2.6:

Teorema 6.9.7. *Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto simplemente conexo, entonces toda 1-forma cerrada $\omega \in \Omega^1(U)$ es exacta.*

Demostración. Sea $\omega \in \Omega^1(U)$ cerrada. Si α es una curva cerrada en U, entonces $\int_\alpha \omega = 0$, pues U es simplemente conexo y por la proposición anterior. Pero esto es equivalente con que ω sea exacta, gracias al teorema 3.2.1. □

Parte II

Geometría diferencial de curvas y superficies

Capítulo 1

Geometría diferencial de curvas

1.1. Definición y ejemplos

Vamos a desarrollar nuestra teoría (local) de curvas bajo la hipótesis de *regularidad*. Lo que queremos es que en cada punto de la curva siempre exista un vector tangente (no nulo).

Definición 1.1.1. Una *curva regular* es una aplicación $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

En términos cinemáticos, podemos pensar α' como la velocidad de la curva, entonces la condición de regularidad es que la curva *nunca se detenga*.

Observación 1.1.2. Si la curva es plana (i.e. está contenida en un plano), entonces podemos tomar el codominio de la curva como $\mathbb{R}^2$.

Observación 1.1.3. Decir que una curva es regular *no* es lo mismo que decir que es una variedad de dimensión 1. Si le pedimos a una curva que sea una variedad de dimensión 1, le estamos pidiendo (básicamente) que no se autointersecte (si no, en ningún entorno del punto de autointersección se parece a $\mathbb{R}$). Una curva regular sí puede autointersectarse.

Ejemplo 1.1.4. La *catenaria* es la curva descrita por un hilo uniforme suspendido por sus extremos y sometido a un campo gravitatorio uniforme (ver figura 1.1a). Se parametriza mediante

$$\alpha(t) = \left(t, a \cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

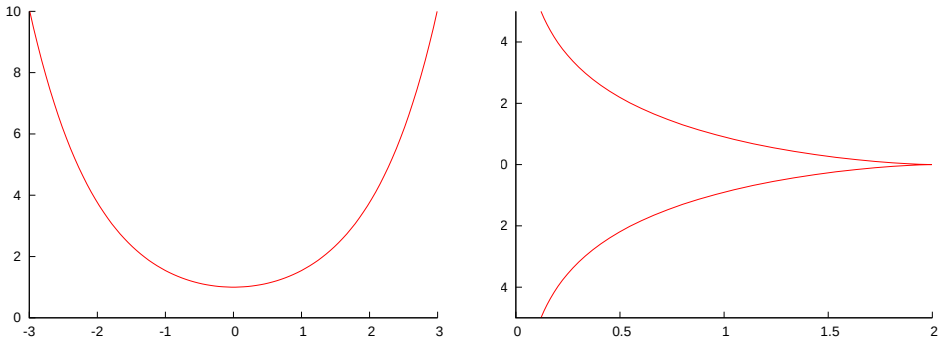
donde a es una constante real no nula.

Ejemplo 1.1.5. La *tractriz* es la curva descrita por el extremo de una cuerda tirante de longitud l a medida que el otro extremo se mueve por el eje y (ver figura 1.1b). Se parametriza mediante

$$\alpha(t) = \left(\frac{l}{\cosh t}, \pm l\,(t - \tanh t)\right)$$

Ejemplo 1.1.6. La *hélice* (ver figura 1.2) es la curva regular parametrizada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$$



(a) Catenaria con $a = 1$ (b) Tractriz con $l = 2$

Figura 1.1: Tractriz y catenaria

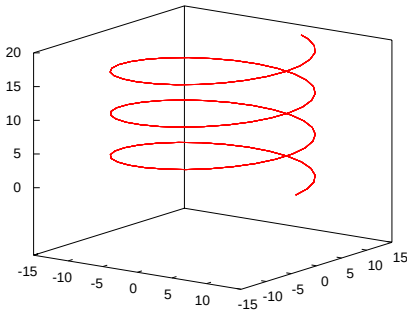


Figura 1.2: Hélice con $a = 12$, $b = 1$

Ejemplo 1.1.7. Existen curvas diferenciables no regulares. Por ejemplo, sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$\alpha(t) = (t^3, t^2)$$

(ver figura 1.3a). Claramente es diferenciable en 0, y sin embargo $\|\alpha'(0)\| = \|(0,0)\| = 0$, luego la curva no es regular.

Ejemplo 1.1.8. Veamos un ejemplo de una curva regular que se autointersecta, i.e. que no es inyectiva. Definamos $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ por:

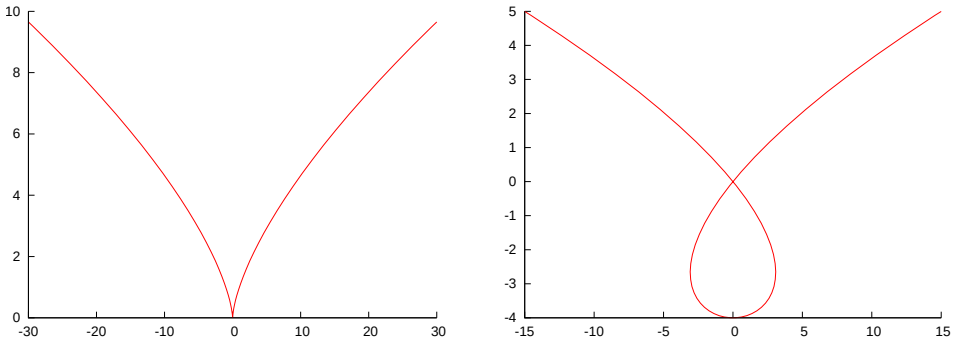
$$\beta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

(ver figura 1.3b). Tenemos que $\beta(2) = \beta(-2) = (0,0)$, por lo tanto β no es inyectiva, sin embargo es regular, pues:

$$\|\beta'(t)\| = \|(3t^2 - 4, 2t)\| \neq 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Notación. Si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular, escribimos $l(\alpha)$ para la longitud de la curva como la definimos en 6.5, le llamaremos *longitud de arco*. Tenemos entonces que

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$



(a) Traza de α (b) Traza de β

Figura 1.3: Curva diferenciable no regular y curva regular que se autointersecta

Entonces $l(\alpha)$ nos indica cuánto "mide" la traza de la curva. De esta manera, podemos definir lo que sería una parametrización natural de la curva, o parametrización *por longitud de arco*, pidiendo que $b - a = l(\alpha)$, o que la curva se recorra a velocidad 1 constante.

Definición 1.1.9. Una curva regular $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ está *parametrizada por longitud de arco* si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in [a, b]$.

En general, para una curva parametrizada por longitud de arco usaremos el parámetro s en vez del parámetro t.

Proposición 1.1.10. *Toda curva regular $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ se puede parametrizar por longitud de arco (i.e. es posible obtener una curva $\bar{\alpha}$ parametrizada por longitud de arco que tenga la misma traza que α).*

Demostración. Definamos $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ como $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau$, es decir, la longitud del arco hasta $\alpha(t)$.

s es derivable, y $s'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$, por lo tanto s es estrictamente creciente, entonces es inyectiva: por el teorema de la función inversa[1], existe $s^{-1} : [0, l(\alpha)] \to [a, b]$, es derivable y verifica $(s^{-1})'(t) = \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} = \frac{1}{\|\alpha'(s^{-1}(t))\|}$

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^3 \\
{[0,l(\alpha)]} \arrow[u, "s^{-1}"] \arrow[ur, "\bar{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

Definimos $\bar{\alpha} = \alpha \circ s^{-1}$, tenemos que verificar que $\|\bar{\alpha}'(t)\| = 1$ para todo t. Usamos

[1]Recordemos que el teorema de la función inversa en una variable nos dice que si f es una función real de variable real, de clase C^1, y f tiene derivada no nula en $a \in \mathbb{R}$, entonces f es invertible en un entorno de a, su inversa es C^1 y se cumple que $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\|\bar{\alpha}'(t)\| &= \|\alpha'(s^{-1}(t))(s^{-1})'(t)\| \\ &= \|\alpha'(s^{-1}(t))\|\,|(s^{-1})'(t)| \\ &= \|\alpha'(s^{-1}(t))\|\frac{1}{\|\alpha'(s^{-1}(t))\|} = 1\end{aligned}$$

□

Por lo tanto, no perdemos generalidad en la teoría si le pedimos a una curva regular que esté parametrizada por longitud de arco.

1.2. Triedro de Frenet

A cada punto de una curva regular parametrizada por longitud de arco le vamos a asociar un sistema de referencia llamado *triedro de Frenet*.

Definición 1.2.1. Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular parametrizada por longitud de arco, entonces definimos los siguientes vectores unitarios (de norma 1):

- $t(s)$, el *vector tangente*, es el que verifica $t(s) = \alpha'(s)$.
- $n(s)$, el *vector normal*, es el vector unitario que verifica $t'(s) = k(s)n(s)$, con $k(s) > 0$.
- $b(s)$, el *vector binormal*, está definido por $b(s) = t(s) \wedge n(s)$.

La terna $\{t(s), n(s), b(s)\}$ se llama *triedro de Frenet* (ver figura 1.4). Éste determina ciertos planos:

- El *plano osculador* es el plano generado por $t(s)$ y $n(s)$.
- El *plano normal* es el plano generado por por $n(s)$ y $b(s)$.
- El *plano rectificante* es el plano generado por $t(s)$ y $b(s)$.

Observación 1.2.2. Está claro que estos vectores efectivamente conforman un triedro: por definición, el vector normal es perpendicular al vector tangente, y el binormal es perpendicular al normal y al tangente. Para que el vector normal (y por lo tanto el binormal) estén bien definidos, es que pedimos que $k(s) \neq 0$ (esto es, que la curva nunca es localmente recta).

De la definición de vector normal resulta claro que $k(s) = \|t'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$, entonces $k(s)$ mide la velocidad a la que se mueve el vector tangente en un entorno del punto. Esto motiva la siguiente

Definición 1.2.3. El número positivo $k(s)$ antes definido es la *curvatura* de α en s.

Si en un entorno del punto la curva es "casi recta", la curvatura será cercana a 0; si la curva es muy vertiginosa, la curvatura será grande.

Observación 1.2.4. $b'(s) \perp t(s)$.

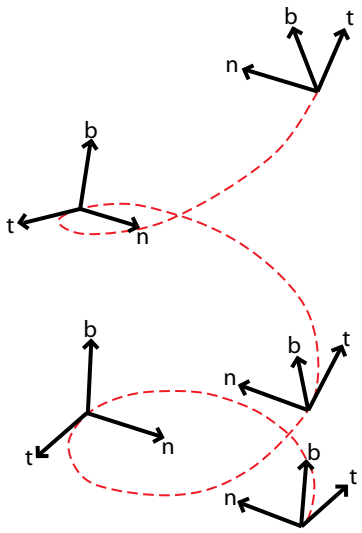


Figura 1.4: Triedro de Frenet en movimiento

Demostración. Derivemos la expresión $b(s) \cdot t(s) = 0$:

$$b'(s) \cdot t(s) + b(s) \cdot t'(s) = b'(s) \cdot t(s) + b(s) \cdot k(s)n(s) = b'(s) \cdot t(s) = 0 \qquad \square$$

Esto nos permite hacer la siguiente definición, parecida a la de la curvatura:

Definición 1.2.5. Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular parametrizada por longitud de arco, definimos la *torsión* de α en s, $\tau(s)$ de modo que $b'(s) = \tau(s)n(s)$.

Observación 1.2.6. La torsión está definida en función de n: entonces, para tener bien definida la torsión, necesitamos tener bien definido n, por tanto debe ser $k \neq 0$.

Tenemos entonces que $\|b'(s)\| = |\tau(s)|$. La torsión mide entonces cuán rápido se aleja la curva, en un entorno del punto, del plano osculador. Se dice también que la torsión mide el "atornillamiento" de la curva. Si tenemos una curva plana (contenida en un plano), entonces el plano osculador es constante, de donde la torsión es cero. El recíproco también es cierto:

Proposición 1.2.7. *Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco, $k(s) \neq 0$ para todo s. Entonces $\tau(s) = 0$ para todo s si y sólo si α es una curva plana.*

Demostración. El recíproco lo acabamos de comentar. Si tenemos $\tau = 0$, entonces $b'(s) = 0$ para todo s, de donde $b(s) = b_0$ es constante.

$$(\alpha(s) \cdot b_0)' = \alpha'(s) \cdot b_0 = 0$$

Entonces $\alpha(s) \cdot b_0$ es constante, de donde α está contenida en un plano normal a b_0. $\square$

Definición 1.2.8. Las *ecuaciones de Frenet* son:

- $t' = kn$
- $b' = \tau n$
- $n' = -\tau b - kt$

Las dos primeras son por definición, la última nos falta verificarla. Tenemos $b = t \wedge n$, de donde $n = b \wedge t$. Derivamos esta expresión:

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t' = \tau n \wedge t + b \wedge kn = -\tau b + kb \wedge n = -\tau b - kt$$

Si queremos calcular explícitamente la curvatura y la torsión de una curva, tenemos las siguientes fórmulas:
Si está parametrizada por longitud de arco:

$$k = \|t'\| \qquad \tau = -\frac{1}{k^2} t \wedge t' \cdot t''$$

Si no lo está:

$$k = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \qquad \tau = -\frac{\alpha' \wedge \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

(Una demostración de estas fórmulas se encuentra en [Opr]: no es más que hacer algunas cuentas.)

Para terminar, enunciamos informalmente el *teorema fundamental de la teoría local de curvas*: una curva está determinada absolutamente, a menos de isometrías (movimientos rígidos), por la torsión y la curvatura en cada punto. La demostración de este resultado es complicada. No es difícil sin embargo probar su versión para curvas planas: una curva plana está totalmente determinada, a menos de isometrías, por su curvatura en cada punto.

Otro resultado interesante sobre la teoría *global* de curvas que comentamos antes de finalizar este capítulo es el siguiente: si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ es una curva plana cerrada parametrizada por longitud de arco con $\alpha'(a) = \alpha'(b)$, entonces la curvatura total $\int_a^b k(s)\, ds$ satisface

$$\int_a^b k(s)\, ds = 2\pi$$

Este resultado se puede mejorar: la curvatura total de una curva cerrada y simple es $\geq 2\pi$, dándose la igualdad si y sólo si la curva es plana y *convexa* (en todo punto, la curva está contenida en un semiplano cerrado determinado por la recta tangente). Este resultado se llama *teorema de Fenchel* (ver [dC], p. 398).

Capítulo 2

Geometría diferencial de superficies

Recordamos que una *superficie regular* $S \subset \mathbb{R}^3$ es una variedad diferenciable de dimensión 2.

2.1. Primera forma fundamental

Definición 2.1.1. Sea S una superficie regular, $p \in S$. La *primera forma fundamental* es una forma cuadrática $\mathrm{I}_p : T_pS \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\mathrm{I}_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \|v\|^2$$

donde $\langle , \rangle_p$ es el producto interno de T_pS heredado de $\mathbb{R}^3$.

El interés de esta "forma fundamental" es que carga con propiedades geométricas que podremos tener entonces en superficies abstractas, donde los productos internos de los espacios tangentes no se heredan del espacio ambiente (porque *no hay* espacio ambiente). En nuestro caso, no hay ambigüedad si omitimos el subíndice y escribimos simplemente $\langle , \rangle$.

2.1.1. Primera forma fundamental en coordenadas locales

Consideremos una parametrización $\varphi : U \to S$, con $\varphi(q) = p$. Entonces un vector $v \in T_pS$ arbitrario es de la forma

$$v = a\varphi_u + b\varphi_v$$

donde por abuso de notación, $\varphi_u = \varphi_u(q)$, $\varphi_v = \varphi_v(q)$. Veamos cómo luce la primera forma fundamental en coordenadas locales:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p(v) = \langle v, v \rangle &= \langle a\varphi_u + b\varphi_v, a\varphi_u + b\varphi_v \rangle \\ &= a^2\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + 2ab\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + b^2\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\ &= a^2E + 2abF + b^2G \end{aligned}$$

donde, por abuso de notación, $E = E(q)$, $F = F(q)$, $G = G(q)$, con E, F, G funciones $U \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \langle \varphi_u(u,v), \varphi_u(u,v) \rangle \\ F(u,v) &= \langle \varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v) \rangle \\ G(u,v) &= \langle \varphi_v(u,v), \varphi_v(u,v) \rangle \end{aligned}$$

Diremos que E, F y G son los *coeficientes de la primera forma fundamental* asociados a la parametrización φ.

Si tenemos una curva α en S, dada por $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ entonces tenemos:

$$\alpha'(t) = \varphi_u(u(t), v(t))\, u'(t) + \varphi_v(u(t), v(t))\, v'(t) = u'\varphi_u + v'\varphi_v$$

y por lo tanto

$$\mathrm{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = (u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G$$

con $E = E(u(t), v(t))$, $F = F(u(t), v(t))$, $G = G(u(t), v(t))$. Dejamos como ejercicio la verificación de la fórmula recién usada, que no es más que una simple aplicación de la regla de la cadena:

Ejercicio 2.1.2. Verificar que en las hipótesis anteriores vale la fórmula siguiente:

$$\alpha'(t) = \varphi_u(u(t), v(t))\, u'(t) + \varphi_v(u(t), v(t))\, v'(t)$$

lo cual uno abrevia escribiendo $\alpha'(t) = \varphi_u\, u' + \varphi_v\, v'$.

Observación 2.1.3. La identidad de Lagrange dice que si $a, b \in \mathbb{R}^3$ entonces $\|a \times b\|^2 = \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2$. En particular, para $a = \varphi_u$ y $b = \varphi_v$ deducimos que

$$EG - F^2 = \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 \tag{2.1}$$

En particular, la matriz $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ es invertible. En efecto, su determinante es (2.1) y este número no es cero ya que $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ es una base de T_pS.

Ejemplo 2.1.4. Tomemos como S al plano $\{z = 0\}$. Entonces podemos tomar $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(u, v) = (u, v, 0)$. De esta manera tenemos $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$.

Ejemplo 2.1.5. Tomemos como S al cilindro unidad de eje z; lo parametrizamos por $\varphi : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ y obtenemos $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Son los mismos coeficientes que los del plano. Esto no es coincidencia, más tarde veremos por qué.

2.1.2. Aplicaciones

Como habíamos dicho, la primera forma resume ciertas propiedades geométricas. Consideremos una superficie regular orientada S.

Proposición 2.1.6. *Si $\alpha : [a, b] \to S$ es una curva regular y $\varphi : U \to S$ es una parametrización de S tal que $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ tenemos:*

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\mathrm{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}\, dt = \int_a^b \sqrt{(u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle}\,dt = \int_a^b \sqrt{\mathrm{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(u')^2E + 2u'v'F + (v')^2G} \end{aligned}$$ □

Proposición 2.1.7. *Si $\varphi : U \to S$ es una parametrización compatible con la orientación, entonces*

$$\varphi^*(dA) = \sqrt{EG - F^2} \tag{2.2}$$

En particular, si φ cubre toda la superficie, entonces

$$\text{área}(S) = \int_U \sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

Demostración. La fórmula (2.2) se deduce de la ecuación (2.1) y de la proposición 6.5.2. En particular,

$$\text{área}(S) = \int_S dA = \int_U \varphi^*(dA) = \int_U \sqrt{EG - F^2}\,dudv$$ □

Las *curvas coordenadas* de una parametrización φ son las imágenes por φ de las rectas con u constante o con v constante.

Proposición 2.1.8. *El ángulo θ entre las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi : U \to S$ viene dado por:*

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Demostración.

$$\cos\theta = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle}{\|\varphi_u\|\|\varphi_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$ □

2.2. Mapa de Gauss y segunda forma fundamental

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada.

Definición 2.2.1. Denotaremos por $N : S \to \mathbb{R}^3$ al campo de vectores normales unitarios compatible con la orientación de S, que llamaremos *mapa de Gauss*.

Observación 2.2.2. Como $\|N(p)\| = 1$ para todo $p \in S$, entonces podemos ver N con codominio en S^2, esto es, $N : S \to S^2$, entonces tenemos $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2$.

Está geométricamente claro que $T_{N(p)}S^2 = T_pS$, pues los subespacios afines $T_pS + p$ y $T_{N(p)}S^2 + N(p)$ son planos paralelos. Por lo tanto:

$$dN_p : T_pS \to T_pS$$

El diferencial del mapa de Gauss (a veces llamado *mapa de Weingarten*) mide la tasa de variación de N en un entorno de p; esto es, cuán rápidamente se aleja N de $N(p)$ en un entorno de p. Esto nos permite medir cuán rápidamente se aleja S de T_pS en un entorno de p.

Proposición 2.2.3. *El diferencial del mapa de Gauss, $dN_p : T_pS \to T_pS$ es autoadjunto.*

Demostración. Tenemos que probar que $\langle dN_p(v), w\rangle = \langle v, dN_p(w)\rangle$. Por linealidad, basta probarlo en una base de T_pS.

Sea $\varphi : U \to S$ una parametrización alrededor de p tal que $\varphi(q) = p$. Escribiendo $\varphi_u = \varphi_u(q)$, $\varphi_v = \varphi_v(q)$, basta probar que:

$$\langle dN_p(\varphi_u), \varphi_v\rangle = \langle \varphi_u, dN_p(\varphi_v)\rangle$$

Observemos que $\langle N, \varphi_u\rangle = 0$ y $\langle N, \varphi_v\rangle = 0$, donde $N = N(\varphi(u, v))$. Abusando de la notación por enésima vez, escribimos $N_u = \frac{\partial}{\partial u}(N \circ \varphi)$, $N_v = \frac{\partial}{\partial v}(N \circ \varphi)$, entonces derivando la primera ecuación respecto a v y la segunda ecuación respecto a u, obtenemos:

$$\begin{aligned}\langle N_v, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{uv}\rangle &= 0\\ \langle N_u, \varphi_v\rangle + \langle N, \varphi_{vu}\rangle &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle N_u, \varphi_v\rangle = \langle N_v, \varphi_u\rangle$. Observando que $dN_p(\varphi_u) = N_u$ y $dN_p(\varphi_v) = N_v$, obtenemos

$$\langle dN_p(\varphi_u), \varphi_v\rangle = \langle dN_p(\varphi_v), \varphi_u\rangle = \langle \varphi_u, dN_p(\varphi_v)\rangle \qquad \square$$

Esta propiedad es el pilar de lo que llamaremos *segunda forma fundamental*. Al ser el diferencial del mapa de Gauss autoadjunto, tenemos una forma bilineal simétrica B en T_pS dada por $B(v, w) = \langle dN_p(v), w\rangle$. Podemos entonces definir una forma cuadrática Q en T_pS: $Q(v) = \langle dN_p(v), v\rangle$.

Definición 2.2.4. La forma cuadrática $\mathrm{II}_p : T_pS \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\mathrm{II}_p(v) = \langle -dN_p(v), v\rangle$$

se llama *segunda forma fundamental*.

El signo de menos se irá justificando a medida que desarrollemos más nociones.

Si la primera forma fundamental codifica toda la geometría intrínseca de una superficie, la segunda forma fundamental codifica cómo la superficie está encajada en el espacio ambiente $\mathbb{R}^3$.

2.2.1. Curvaturas normales

En esta sección vemos el significado geométrico de la segunda forma fundamental.

Definición 2.2.5. Sea α una curva regular en S que pasa por un punto $p \in S$ con velocidad $v \in T_pS$, curvatura k y normal n. Sea N el vector unitario normal a S en p compatible con la orientación. Definimos la *curvatura normal* $k_n^\alpha(p, v)$ de α en p como la norma de la proyección de kn sobre N, i.e.

$$k_n^\alpha(p, v) = \langle kn, N\rangle$$

Sorprendentemente, la curvatura normal no depende de la curva:

Proposición 2.2.6. *En las hipótesis de la definición anterior, supongamos además que α está parametrizada por longitud de arco. Entonces*

$$k_n^\alpha(p,v) = \mathrm{II}_p(v)$$

y en particular k_n^α no depende de la elección de α. Decimos entonces que este número $k_n(p,v)$ donde $p \in S$ y $v \in T_pS$ es un vector unitario es la curvatura normal de S en p en la dirección de v. *Deducimos el* teorema de Meusnier*:*

Todas las curvas parametrizadas por longitud de arco contenidas en S que tienen en un punto dado la misma recta tangente, tienen en ese punto la misma curvatura normal.

Demostración. Supongamos que $\alpha(0) = p$, de manera que $\alpha'(0) = v$. Recordar que como α está parametrizada por longitud de arco entonces $\alpha''(0) = kn$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_p(v) &= \langle -dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\rangle \\
&\overset{\text{r.c.}}{=} \langle -(N\circ\alpha)'(0), \alpha'(0)\rangle \\
&\overset{*}{=} \langle (N\circ\alpha)(0), \alpha''(0)\rangle \\
&= \langle N(p), kn\rangle \\
&= \langle N, kn\rangle \\
&\overset{\text{def.}}{=} k_n^\alpha(p,v)
\end{aligned}$$

La validez de la igualdad $*$ se obtiene derivando la expresión $\langle (N\circ\alpha)(s), \alpha'(s)\rangle = 0$ y evaluando en cero:

$$\langle (N\circ\alpha)'(0), \alpha'(0)\rangle + \langle (N\circ\alpha)(0), \alpha''(0)\rangle = 0 \qquad \square$$

Dado un vector unitario $v \in T_pS$, llamamos *sección normal a S en p en la dirección de v* a la curva en S parametrizada por longitud de arco que es la intersección de S con un plano normal en p con vector director v. Observar que para esta curva se tiene que $n = \pm N$, de forma que $|k_n(p,v)| = k$:

> *la curvatura normal $k_n(p,v) = \mathrm{II}_p(v)$ es igual a la curvatura de la sección normal a S en p en la dirección de v, a menos de un signo que depende de la orientación de S.*

Esto nos dice que la curvatura normal $k_n(p,v) = \mathrm{II}_p(v)$ caracteriza la desviación del plano tangente de la superficie en el punto p, en la dirección del vector tangente unitario v.

Ejemplo 2.2.7. En la esfera S^2, las secciones normales en un punto $p \in S^2$ son los círculos máximos que pasan por p. Estos tienen curvatura 1, luego $\mathrm{II}_p(v) = \pm 1$ para todo $p \in S^2$, $v \in T_pS^2$ unitario. Observar que el signo es positivo si y sólo si S^2 está orientada con la normal entrante.

2.2.2. Curvaturas principales

El diferencial del mapa de Gauss dN_p es autoadjunto: por el teorema espectral, es diagonalizable en una base ortonormal, o en otras palabras, existe una base ortonormal de T_pS formada por vectores propios. Por lo tanto dN_p tiene dos valores propios (posiblemente iguales).

Definición 2.2.8. Los valores propios de $-dN_p$ se llaman *curvaturas principales* de S en p. Las direcciones dadas por los vectores propios se llaman *direcciones principales.*

Si las curvaturas principales en p son iguales, decimos que p es un *punto umbílico.*

Podemos determinar todas las curvaturas normales a partir de las curvaturas principales, y además las curvaturas principales son las curvaturas normales máxima y mínima, como vemos a continuación:

Proposición 2.2.9 (Fórmula de Euler)**.** *Sean $e_1, e_2 \in T_pS$ vectores propios unitarios asociados a las curvaturas principales k_1, k_2 respectivamente. Supongamos que $v \in T_pS$ es el vector unitario dado por $v = \cos(\theta)e_1 + \operatorname{sen}(\theta)e_2$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$. Entonces*

$$k_n(p, v) = \mathrm{II}_p(v) = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \operatorname{sen}^2(\theta)$$

Además, las curvaturas principales k_1, k_2 son el máximo y el mínimo de las curvaturas normales en p.

Demostración. Tenemos que $-dN_p(e_i) = k_i e_i$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned} k_n(p, v) = \mathrm{II}_p(v) &= \langle -dN_p(v), v\rangle \\ &= \Big\langle -dN_p\big(\cos(\theta)e_1 + \operatorname{sen}(\theta)e_2\big), \cos(\theta)e_1 + \operatorname{sen}(\theta)e_2\Big\rangle \\ &= \Big\langle \cos(\theta)k_1e_1 + \operatorname{sen}(\theta)k_2e_2, \cos(\theta)e_1 + \operatorname{sen}(\theta)e_2\Big\rangle \\ &= k_1\cos^2(\theta) + k_2\operatorname{sen}^2(\theta) \end{aligned}$$

Supongamos que $k_2 \leq k_1$. Veamos que k_1 es el valor de la curvatura normal máxima. Dado un $v \in T_pS$ unitario arbitrario, lo escribimos como $v = \cos(\theta)e_1 + \operatorname{sen}(\theta)e_2$ y usamos la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} k_n(p, v) &= k_1\cos^2(\theta) + k_2\operatorname{sen}^2(\theta) \\ &= k_1(1 - \operatorname{sen}^2(\theta)) + k_2\operatorname{sen}^2(\theta) \\ &= k_1 + (k_2 - k_1)\operatorname{sen}^2(\theta) \\ &\leq k_1 \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que k_2 es el valor de la curvatura normal mínima. □

Observación 2.2.10.

- Sea $p \in S$ un punto no umbílico. El teorema espectral nos dice que hay exactamente dos direcciones principales, o sea, hay exactamente una dirección donde la curvatura normal se maximiza y una donde se minimiza, y además, estas direcciones son ortogonales. Este resultado debido a Euler puede resultar sorprendente.

- Una curva en S es una *línea de curvatura* si su vector tangente en cada punto es una dirección principal. Lo recién observado nos dice que las líneas de curvatura son una familia de curvas que cuando se cortan en un punto no umbílico lo hacen ortogonalmente.
- Se puede probar que las superficies conexas donde los puntos son todos umbílicos son necesariamente una región de una esfera o de un plano (ver proposición 4, p. 153 de [dC]).

2.2.3. Curvatura Gaussiana

Definición 2.2.11. Si $p \in S$, entonces la *curvatura Gaussiana de S en p* es:

$$K(p) = \det dN_p$$

Observación 2.2.12. La curvatura Gaussiana se define de manera *extrínseca*: su definición depende del mapa de Gauss que no tiene sentido si no hay espacio ambiente. Sin embargo, demostraremos más tarde el Teorema Egregio de Gauss, que dice que en realidad la curvatura Gaussiana es intrínseca.

Ya podemos observar, sin embargo, que la curvatura Gaussiana no depende de la orientación de S.

Proposición 2.2.13. *La curvatura Gaussiana es el producto de las curvaturas principales.*

Demostración. Al estar en dimensión 2, $\det dN_p = \det -dN_p =$ el producto de sus valores propios = el producto de las curvaturas principales. □

Definición 2.2.14. Un punto de una superficie S se dice:

- *elíptico* si $K(p) > 0$,
- *hiperbólico* si $K(p) < 0$,
- *parabólico* si $K(p) = 0$ y $K(p) \neq 0$,
- *plano* si $dN_p = 0$.

Ejercicio 2.2.15.

1. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\|\alpha(s)\| \leq R \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha(s_0)\|$ para todo s suficientemente cerca de $s_0 \in (a, b)$. Probar que $k(s_0) \geq \frac{1}{R}$. (Sugerencia: definir $f(s) = \|\alpha(s)\|^2$ y analizar $f''(s_0)$.)
2. Deducir que toda superficie regular compacta orientable tiene un punto elíptico. (Sugerencia: considerar un punto en M donde la función $f : M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ alcanza su máximo.)

Enunciamos la siguiente proposición con más información geométrica que nos da la curvatura Gaussiana en puntos elípticos o hiperbólicos.

Proposición 2.2.16. *Sea $p \in S$. Si p es elíptico, existe un entorno $U \subset S$ de p tal que todos los puntos de U están del mismo lado del plano tangente T_pS. Si p es hiperbólico, en todo entorno de p en S hay puntos de S de ambos lados de T_pS.*

Demostración. Ver [dC], p. 163. □

2.2.4. Ejemplos

Ejemplo 2.2.17. Calculemos la curvatura Gaussiana de la esfera de radio r, $S(r) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \|p\| = r\}$. Definimos el mapa de Gauss $N : S(r) \to S^2$ como $N(p) = -\frac{p}{r}$ (la *normal entrante*).

Para calcular dN_p, definimos la extensión diferenciable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $F(p) = -\frac{p}{r}$. Entonces $dF_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $dF_p = \frac{1}{r}(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Entonces:

$$dN_p \overset{\text{def.}}{=} dF_p|_{T_pS(r)} = -\frac{1}{r}\,\mathrm{id}_{T_pS(r)}$$

Por lo tanto $\det dN_p = \frac{1}{r^2}$ es la curvatura Gaussiana de la esfera. Observar que a radio más pequeño, curvatura mayor; y que todos sus puntos son elípticos.

Ejemplo 2.2.18. Para encontrar un ejemplo de punto hiperbólico, basta encontrar un punto en una superficie que tenga curvatura Gaussiana negativa (que las curvaturas principales sean una positiva y la otra negativa). Geométricamente, el espacio tangente al punto debe dejar partes de la superficie en ambos lados. Consideremos el paraboloide hiperbólico (la "silla de montar"), con la parametrización $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi_u(u,v) &= (1, 0, 2u) \\ \varphi_v(u,v) &= (0, 1, -2v) \\ \varphi_u \wedge \varphi_v(u,v) &= (-2u, 2v, 1) \end{aligned}$$

El mapa de Gauss queda:

$$N(\varphi(u,v)) = \left(-\frac{2u}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}, \frac{2v}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right)$$

Consideremos el punto $p = (0, 0, 0)$, es la imagen por φ de $(0, 0)$. Si le aplicamos dN_p a los vectores

$$\varphi_u(0,0) = (1,0,0) \qquad \varphi_v(0,0) = (0,1,0)$$

obtenemos:

$$dN_p(\varphi_u(0,0)) = \frac{\partial}{\partial u}(N \circ \varphi)(0,0) = (-2,0,0) \qquad dN_p(\varphi_v(0,0)) = (0,2,0)$$

de donde $\varphi_u(0, 0), \varphi_v(0, 0)$ son vectores propios de dN_p de valores propios -2 y 2 respectivamente. Por lo tanto $p = (0, 0, 0)$ es un punto hiperbólico, y las direcciones principales son las de los planos normales $x = 0$ e $y = 0$ (ver figura 2.1).

Ejemplo 2.2.19. Para encontrar puntos parabólicos, nos vamos al cilindro. Consideremos la parametrización $\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \varphi_u(u,v) &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \\ \varphi_v(u,v) &= (0, 0, 1) \\ \varphi_u \wedge \varphi_v(u,v) &= (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) \end{aligned}$$

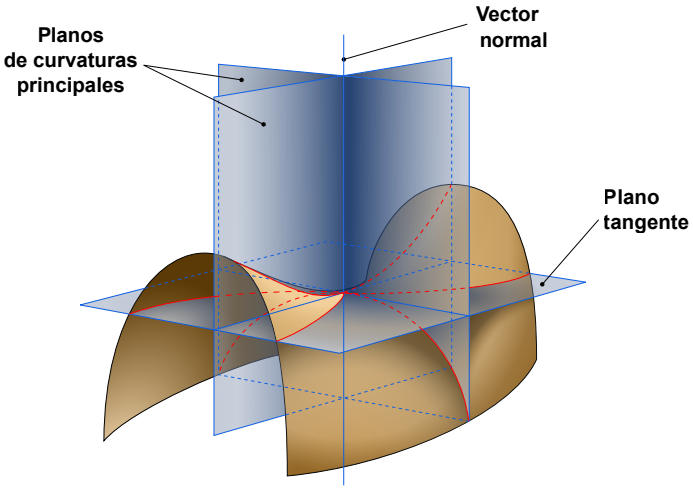


Figura 2.1: Planos de curvaturas principales del hiperboloide

Por lo tanto el mapa de Gauss queda $N(\varphi(u,v)) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$. Sea $p = \varphi(u,v)$ un punto cualquiera del cilindro. Entonces:

$$\begin{aligned} dN_p(\varphi_u(u,v)) &= \frac{\partial}{\partial u}(N \circ \varphi)(u,v) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) = \varphi_u(u,v) \\ dN_p(\varphi_v(u,v)) &= \frac{\partial}{\partial v}(N \circ \varphi)(u,v) = (0,0,0) \end{aligned}$$

de donde $\varphi_u(u,v)$ y $\varphi_v(u,v)$ son vectores propios de dN_p de valores propios 1 y 0 respectivamente. Por lo tanto la curvatura Gaussiana es 0 sin ser $dN_p = 0$: todo punto del cilindro es un punto parabólico. Observar que la curvatura principal 1 corresponde a la circunferencia directriz, mientras que la curvatura principal 0 corresponde a la recta vertical.

Ejercicio 2.2.20. Verificar que el hiperboloide de una hoja, parametrizado por $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$\varphi(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \operatorname{sen} u, \operatorname{senh} v)$$

tiene curvatura Gaussiana negativa en todos sus puntos.

La figura 2.2 nos muestra superficies con curvatura negativa, nula, y positiva en todos los puntos, respectivamente.

Ejemplo 2.2.21. Para hallar puntos planos consideremos el plano $z = 0$. Una parametrización es $\varphi(u,v) = (u,v,0)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi_u(u,v) &= (1,0,0) \\ \varphi_v(u,v) &= (0,1,0) \\ \varphi_u \wedge \varphi_v(u,v) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

El mapa de Gauss queda $N(\varphi(u,v)) = (0,0,1)$, constante, por lo tanto $dN_p = 0$ para todo p en el plano.

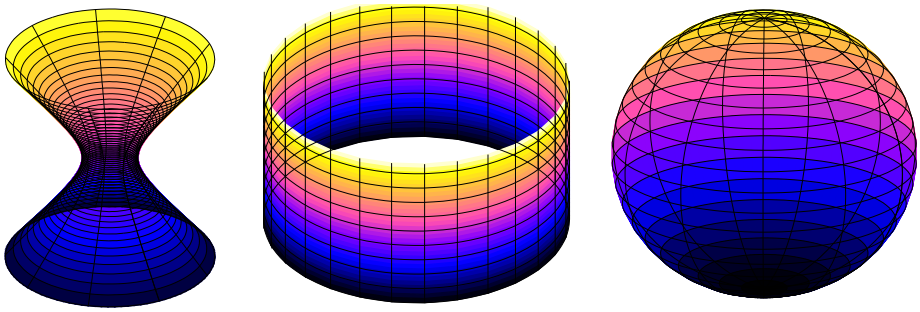


Figura 2.2: Hiperboloide de una hoja, cilindro, esfera

Ejemplo 2.2.22. La SILLA DEL MONO, denominada así por ser una silla de montar para monos (pues necesita una tercera depresión en la superficie para poner la cola), es la superficie definida por la parametrización:

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$$

(ver figura 2.3). Es un ejercicio verificar que el punto $p = (0, 0, 0)$ es un punto plano. Basta probar que los coeficientes de la segunda forma fundamental (ver sección 2.2.5) cumplen $e = f = g = 0$ pues entonces todas las curvaturas normales son 0, en particular las curvaturas principales son 0, entonces dN_p tiene ambos valores propios nulos, luego $dN_p = 0$.

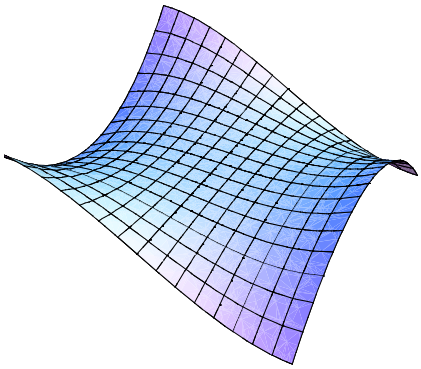


Figura 2.3: La silla del mono

Ejemplo 2.2.23. La *pseudoesfera* es el resultado de revolucionar la tractriz de longitud l alrededor del eje y (ver figura 2.4). Es un ejercicio probar que tiene curvatura constante $K = -\frac{1}{l^2}$, lo cual motiva su nombre por analogía con la esfera.

Esta superficie no es compacta. Es consecuencia de un teorema debido a Hilbert (ver [dC], sección 5.11) que no existe una superficie regular compacta de curvatura constante negativa.

Observar que no podemos dar una interpretación geométrica análoga a la de la proposición 2.2.16 para puntos planos o parabólicos. Por ejemplo, para puntos planos: los puntos de un plano se confunden con los de su plano tangente, mientras que el plano tangente al punto $(0, 0, 0)$ de la silla del mono deja puntos de la

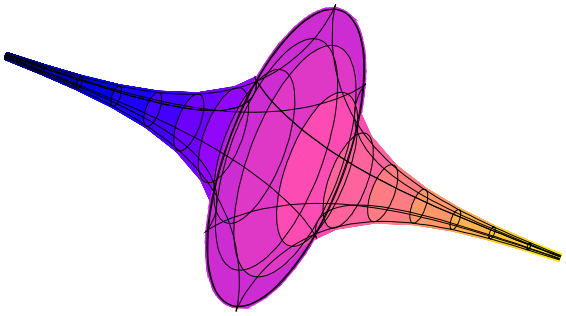


Figura 2.4: Pseudoesfera

superficie de ambos lados. Para puntos parabólicos: los planos tangentes a puntos de un cilindro están todos o del mismo lado o sobre el propio plano tangente, mientras que hay puntos parabólicos en la superficie del ejemplo 3, página 165 de [dC] cuyos planos tangentes dejan puntos de ambos lados de la superficie.

2.2.5. Segunda forma fundamental en coordenadas locales

Sea $p \in S$ y consideremos una parametrización $\varphi : U \to S$ tal que $\varphi(q) = p$. Entonces un vector tangente $v \in T_pS$ arbitrario es de la forma $v = a\varphi_u + b\varphi_v$ donde $\varphi_u = \varphi_u(q)$, $\varphi_v = \varphi_v(q)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p(v) &= \langle -dN_p(a\varphi_u + b\varphi_v), a\varphi_u + b\varphi_v\rangle \\ &= a^2\langle -dN_p(\varphi_u), \varphi_u\rangle + 2ab\langle -dN_p(\varphi_u), \varphi_v\rangle + b^2\langle -dN_p(\varphi_v), \varphi_v\rangle \\ &= a^2e + 2abf + b^2g \end{aligned}$$

donde, por abuso de notación, $e = e(q)$, $f = f(q)$, $g = g(q)$, con e, f, g funciones $U \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\begin{aligned} e(u,v) &= \langle -dN_p(\varphi_u(u,v)), \varphi_u(u,v)\rangle \\ f(u,v) &= \langle -dN_p(\varphi_u(u,v)), \varphi_v(u,v)\rangle \\ g(u,v) &= \langle -dN_p(\varphi_v(u,v)), \varphi_v(u,v)\rangle \end{aligned}$$

Diremos que e, f y g son los *coeficientes de la segunda forma fundamental* asociados a la parametrización φ.

Si escribimos $N_u = \frac{\partial}{\partial u}(N \circ \varphi)(q)$, $N_v = \frac{\partial}{\partial v}(N \circ \varphi)(q)$, entonces

$$e = \langle -dN_p(\varphi_u), \varphi_u\rangle = -\langle N_u, \varphi_u\rangle$$

de donde $e = -\langle N_u, \varphi_u\rangle$. Análogamente conseguimos otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} e = -\langle N_u, \varphi_u\rangle \\ f = -\langle N_u, \varphi_v\rangle \\ g = -\langle N_v, \varphi_v\rangle \end{cases} \tag{2.3}$$

Derivando la expresión $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ respecto de u tenemos que $\langle N_u, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uu} \rangle = 0$ de donde a partir de (2.3) deducimos que

$$\begin{cases} e = \langle N, \varphi_{uu} \rangle \\ f = \langle N, \varphi_{uv} \rangle \\ g = \langle N, \varphi_{vv} \rangle \end{cases} \tag{2.4}$$

Las últimas dos expresiones se deducen derivando $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ y $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$ respecto de v.

Como $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, deducimos que $f = -\langle N_v, \varphi_u \rangle$.

2.2.6. La curvatura en coeficientes

Sea $\varphi : U \to S$ una parametrización con $\varphi(q) = p$. Sean E, F, G, e, f y g los coeficientes de las primera y segunda formas fundamentales asociados a φ. Usaremos los abusos de notación ya introducidos.

Las igualdades que da la siguiente proposición se llaman *ecuaciones de Weingarten.*

Proposición 2.2.24. *Sea A la matriz asociada a $dN_p : T_pS \to T_pS$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Entonces*

$$A = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Demostración. Escribamos $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Entonces

$$N_u = dN_p(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \tag{2.5}$$
$$N_v = dN_p(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \tag{2.6}$$

Si hacemos el producto interno de (2.5) con φ_u y con φ_v y utilizamos las expresiones de (2.3), conseguimos que

$$-e = \langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \varphi_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F$$
$$-f = \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \varphi_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G$$

Haciendo el producto interno de (2.6) con φ_u y con φ_v y utilizamos las expresiones de (2.3), conseguimos que $-f = a_{21}E + a_{22}F$, $-g = a_{21}F + a_{22}G$. Esto prueba que $A\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} e & f \\ f & g \end{smallmatrix}\right)$ de donde se deduce la tesis, recordando que la matriz $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ es invertible (observación 2.1.3). □

Corolario 2.2.25. *Si K es la curvatura Gaussiana, entonces*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Demostración. Si A es la matriz de la proposición anterior, entonces

$$K = \det A = (-1)^2 \frac{1}{EG - F^2}(eg - f^2) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$ □

2.3. Isometrías

Sean M y N superficies regulares.

Definición 2.3.1. Un difeomorfismo $f : M \to N$ es una *isometría* si para todo $p \in M$ y cada $v, w \in T_pM$ se tiene:

$$\langle df_p(v), df_p(w)\rangle_{f(p)} = \langle v, w\rangle_p$$

Es decir, si en cada p se cumple que df_p es una isometría lineal entre T_pM y $T_{f(p)}N$. Diremos entonces que M y N son superficies *isométricas*.

Definición 2.3.2. Una función $f : M \to N$ es una *isometría local en p* si existe un entorno $W \subset M$ de p tal que $f|_W : W \to f(W)$ es una isometría. Decimos que f es una *isometría local* si es una isometría local en p para todo $p \in M$.

Dos superficies M, N son *localmente isométricas* si cada punto en cada una de las dos superficies tiene un entorno abierto isométrico a un abierto en la otra superficie.

Observación 2.3.3. Una función diferenciable $f : M \to N$ entre variedades es un *difeomorfismo local en p* si existe un entorno $W \subset M$ de p tal que $f|_W : W \to f(W)$ es un difeomorfismo, y es un *difeomorfismo local* si es un difeomorfismo local en p para todo $p \in M$.

Observar que una función $f : M \to N$ entre superficies regulares es una isometría local si y sólo si es un difeomorfismo local y df_p es una isometría lineal para todo $p \in M$.

Como la primera forma fundamental codifica el producto interno en la superficie, la siguiente proposición no resulta sorprendente.

Proposición 2.3.4. *Un difeomorfismo local $f : M \to N$ es una isometría local si y sólo si preserva los coeficientes de la primera forma fundamental.*

Más precisamente, un difeomorfismo local $f : M \to N$ es una isometría local si y sólo si dada $\varphi : U \to M$ una parametrización de M, los coeficientes de la primera forma fundamental de M asociados a la parametrización φ coinciden con los coeficientes de la primera forma fundamental de N asociados a la parametrización $f \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, dotted, "f\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $f : M \to N$ una isometría local, entonces:

$$\begin{aligned} E^{f\circ\varphi}(u,v) &= \langle (f\circ\varphi)_u(u,v), (f\circ\varphi)_u(u,v)\rangle \\ &\overset{\text{r.c.}}{=} \langle (df_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)), df_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v))\rangle \\ &\overset{\text{iso.}}{=} \langle \varphi_u(u,v), \varphi_u(u,v)\rangle \\ &= E^{\varphi}(u,v) \end{aligned}$$

De manera análoga, $F^{f\circ\varphi}(u,v) = F^{\varphi}(u,v)$ y $G^{f\circ\varphi}(u,v) = G^{\varphi}(u,v)$.

Recíprocamente, si un difeomorfismo local $f : M \to N$ preserva los coeficientes de la primera forma fundamental, entonces preserva la primera forma fundamental, es decir:

$$\mathrm{I}_p(v) = \mathrm{I}_{f(p)}(df_p(v)), \qquad \forall v \in T_pM, \ \forall p \in M$$

Veamos que f es una isometría local. Como I_p es una forma cuadrática, tenemos:

$$\begin{aligned} 2\langle v, w\rangle &= \mathrm{I}_p(v+w) - \mathrm{I}_p(v) - \mathrm{I}_p(w) \\ &= \mathrm{I}_{f(p)}(df_p(v+w)) - \mathrm{I}_{f(p)}(df_p(v)) - \mathrm{I}_{f(p)}(df_p(w)) \\ &= 2\langle df_p(v), df_p(w)\rangle \end{aligned}$$

para todo $v, w \in T_pM$, para todo $p \in M$. □

Proposición 2.3.5. *Si $\varphi : U \to M$ y $\psi : U \to N$ son parametrizaciones tales que $E^\varphi = E^\psi$, $F^\varphi = F^\psi$, y $G^\varphi = G^\psi$, entonces $f : \varphi(U) \to N$ definida por $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ es una isometría local para todo $p \in \varphi(U)$.*

$$\begin{tikzcd} \varphi(U) \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, "\varphi^{-1}"'] & & N \\ & U \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $p \in \varphi(U)$ con $\varphi(q) = p$ y $v \in T_pM$. Como siempre, $\varphi_u = \varphi_u(q)$, $\varphi_v = \varphi_v(q)$, entonces:

$$v = a\varphi_u + b\varphi_v$$

Pero entonces tenemos:

$$\begin{aligned} df_p(v) = df_p(a\varphi_u + b\varphi_v) &= a\, df_p(\varphi_u) + b\, df_p(\varphi_v) \\ &= a\, d(\psi \circ \varphi^{-1})_p(\varphi_u) + b\, d(\psi \circ \varphi^{-1})_p(\varphi_v) \\ &= a\, d(\psi \circ \varphi^{-1})_p(d\varphi_q(e_1)) + b\, d(\psi \circ \varphi^{-1})_p(d\varphi_q(e_2)) \\ &\overset{\text{r.c.}}{=} a\, d\psi_q(e_1) + b\, d\psi_q(e_2) \\ &= a\psi_u + b\psi_v \end{aligned}$$

donde $\psi_u = \psi_u(q)$, $\psi_v = \psi_v(q)$, con $\psi(q) = f(\varphi(q))$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle df_p(v), df_p(v)\rangle &= \langle a\psi_u + b\psi_v, a\psi_u + b\psi_v\rangle \\ &= a^2E^\psi + 2abF^\psi + b^2G^\psi \\ &= a^2E^\varphi + 2abF^\varphi + b^2G^\varphi \\ &= \langle a\varphi_u + b\varphi_v, a\varphi_u + b\varphi_v\rangle \\ &= \langle v, v\rangle \end{aligned}$$

y f es una isometría local entre $\varphi(U)$ y N, pues f es una isometría sobre su imagen. □

Ejemplo 2.3.6. Sean M el cilindro de radio 1 y la parametrización $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to M$ definida por $\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$. Conseguimos todos los puntos de M salvo los de la recta generatriz $u = 0$. Si un punto está en esa recta, basta considerar la misma parametrización con dominio $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$.

Sea N el rectángulo abierto no acotado del plano $\{z = 0\}$ parametrizado por $\psi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to N$, con $\psi(u, v) = (u, v, 0)$.

Ya vimos en un ejemplo anterior que $E^\varphi = E^\psi = 1$, $F^\varphi = F^\psi = 0$, $G^\varphi = G^\psi = 1$: observar entonces que M y N son superficies localmente isométricas.

Podemos decir que el cilindro menos una generatriz es isométrico a un rectángulo en el plano, pero no podemos decir que el cilindro sea globalmente isométrico a un plano. Ni siquiera es difeomorfo (ni homeomorfo) a un plano (el plano es simplemente conexo mientras que el cilindro claramente no, i.e. la circunferencia directriz no se puede deformar continuamente en un punto).

Ejercicio 2.3.7. Probar que un difeomorfismo entre superficies regulares es una isometría si y sólo si preserva longitudes de curvas.

Ejercicio 2.3.8. Una función diferenciable $f : M \to N$ entre superficies regulares se dice *conforme* si preserva ángulos, en el sentido que si $f(q) = p$ y $v, w \in T_qM$, entonces el ángulo entre v y w en T_qM es igual al ángulo entre $df_q(v)$ y $df_q(w)$ en T_pN. Si existe un difeomorfismo conforme entre dos superficies, decimos que son *conformes*.

1. Probar que un difeomorfismo local entre superficies regulares $f : M \to N$ es una isometría local si y sólo si es conforme y preserva áreas.

2. Probar que $\varphi : U \to \varphi(U) \subset M$ es una parametrización conforme de una superficie regular M si y sólo si $F = 0$ y $E = G$.

2.4. Símbolos de Christoffel y Teorema Egregio de Gauss

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada.

A cada punto de una curva le asignábamos un triedro, el triedro de Frenet. Vamos a hacer lo mismo con cada punto en una superficie. Sea $p \in S$ y $\varphi : U \to S$ una parametrización de S con $\varphi(q) = p$. Estudiaremos el triedro formado por los vectores $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q), N(p)\}$ que por abuso de notación notaremos $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$.

Definición 2.4.1. Los *símbolos de Christoffel* de la parametrización φ son las funciones $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$, $i, j, k = 1, 2$ que verifican:

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N \\
\varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N \\
\varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + \bar{L}_2 N \\
\varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N
\end{aligned}$$

Observación 2.4.2. Al ser $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, tenemos que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, y que $\bar{L}_2 = L_2$. Al efectuar el producto interno de las cuatro relaciones anteriores con N, obtenemos,

suprimiendo la *repetida*:

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + eN && (2.7)\\ \varphi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN && (2.8)\\ \varphi_{vv} &= \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + gN && (2.9) \end{aligned}$$

Proposición 2.4.3. *Los símbolos de Christoffel se pueden expresar en términos de E, F y G y sus derivadas primeras.*

Demostración. Haciendo el producto interno de (2.7), (2.8) y (2.9) con φ_u y φ_v, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \tfrac{1}{2}E_u\\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - \tfrac{1}{2}E_v\\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle &= \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \tfrac{1}{2}E_v\\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle &= \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G = \tfrac{1}{2}G_u\\ \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle &= \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F = F_v - \tfrac{1}{2}G_u\\ \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle &= \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G = \tfrac{1}{2}G_v \end{aligned}$$

Reescribimos las ecuaciones anteriores en forma matricial, y utilizando la observación 2.1.3, conseguimos las expresiones deseadas:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F\\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11}\\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u\\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} && \Longrightarrow && \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11}\\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u\\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} E & F\\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^1_{12}\\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v\\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} && \Longrightarrow && \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12}\\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v\\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} E & F\\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} && \Longrightarrow && \begin{pmatrix} \Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Teorema Egregio de Gauss. *La curvatura Gaussiana se puede expresar en términos de las derivadas hasta orden 2 de los coeficientes de la primera forma fundamental.*

Demostración. Recordemos las ecuaciones que definen los símbolos de Christoffel, y escribamos N_u, N_v en términos de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + eN\\ \varphi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN\\ \varphi_{vv} &= \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + gN\\ N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v\\ N_v &= a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \end{aligned}$$

Observemos que $(\varphi_{uu})_v = (\varphi_{uv})_u$, y se tiene

$$\begin{aligned} (\varphi_{uu})_v &= (\Gamma^1_{11})_v\,\varphi_u + \Gamma^1_{11}\,\varphi_{uv} + (\Gamma^2_{11})_v\,\varphi_v + \Gamma^2_{11}\,\varphi_{vv} + e_v\,N + e\,N_v\\ (\varphi_{uv})_u &= (\Gamma^1_{12})_u\,\varphi_u + \Gamma^1_{12}\,\varphi_{uu} + (\Gamma^2_{12})_u\,\varphi_v + \Gamma^2_{12}\,\varphi_{uv} + f_u\,N + f\,N_u \end{aligned}$$

Remplacemos con las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}(\varphi_{uu})_v &= (\Gamma^1_{11})_v\,\varphi_u + \Gamma^1_{11}\,(\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN) + (\Gamma^2_{11})_v\,\varphi_v \\ &+ \Gamma^2_{11}\,(\Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + gN) + e_v\,N + e\,(a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_{uv})_u &= (\Gamma^1_{12})_u\,\varphi_u + \Gamma^1_{12}\,(\Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + eN) + (\Gamma^2_{12})_u\,\varphi_v \\ &+ \Gamma^2_{12}\,(\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN) + f_u\,N + f\,(a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v)\end{aligned}$$

Como φ_u, φ_v, N son linealmente independientes, igualemos los coeficientes en φ_v:

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + e\,a_{22} = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + f\,a_{21} \tag{2.10}$$

La proposición 2.2.24 nos dice que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}$ y $a_{21} = \frac{eF-fE}{EG-F^2}$. Remplazando en (2.10) y reordenando:

$$\begin{aligned}&\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \left(\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right) = \\ = \;& f\left(\frac{eF-fE}{EG-F^2}\right) - e\left(\frac{fF-gE}{EG-F^2}\right) = E\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = EK\end{aligned}$$

Esto termina la demostración gracias a la proposición anterior. □

Esto nos dice que la curvatura es un invariante intrínseco, en el sentido que se puede obtener directamente a partir de la primera forma fundamental.

Corolario 2.4.4. *La curvatura es invariante por isometrías locales. Es decir, si $f : S_1 \to S_2$ es una isometría local y $p \in S_1$, entonces $K(p) = K(f(p))$.*

Demostración. Una isometría local preserva los coeficientes de la primera forma fundamental, y la curvatura se puede expresar en función de estos. □

Observación 2.4.5.

- En la demostración del Teorema Egregio, consideramos la igualdad $\varphi_{uuv} = \varphi_{uvu}$ e igualamos los coeficientes en φ_v. Podríamos también igualar los coeficientes en φ_u y en N. Además, podríamos considerar $\varphi_{uvv} = \varphi_{vvu}$, e igualar los coeficientes de φ_u, φ_v y N. En total hay seis ecuaciones. Considerando las que provienen de igualar los coeficientes en φ_u o en φ_v, conseguimos las *ecuaciones de Gauss* que expresan la curvatura en términos de E, F, G y los símbolos de Christoffel y sus derivadas primeras (la primera de estas es la que conseguimos al final de la demostración):

$$\begin{cases} EK &= (\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})^2 \\ FK &= (\Gamma^1_{12})_u - (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} \\ FK &= (\Gamma^2_{12})_v - (\Gamma^2_{22})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} \\ GK &= (\Gamma^1_{22})_u - (\Gamma^1_{12})_v + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - (\Gamma^1_{12})^2 - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} \end{cases}$$

  Igualando los coeficientes en N, conseguimos las *ecuaciones de Mainardi-Codazzi*:

$$\begin{cases} e_v - f_u &= e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - g\Gamma^2_{11} \\ f_v - g_u &= e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12} \end{cases}$$

- Si utilizamos la primera ecuación de Gauss y reemplazamos los símbolos de Christoffel por sus expresiones en términos de E, F y G de la proposición 2.4.3, reordando un poco los términos conseguimos la siguiente fórmula que nos da explícitamente la curvatura en término de los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$K = \frac{\det \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}$$

El siguiente lema es a menudo útil:

Lema 2.4.6. *Si φ es una parametrización ortogonal (i.e. $F = 0$), entonces*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

Demostración. Ejercicio. □

Este lema nos permite probar que el recíproco del corolario 2.4.4 es falso, en el sentido que un difeomorfismo local puede preservar la curvatura Gaussiana en un punto pero no ser una isometría local en ese punto:

Ejemplo 2.4.7. Las superficies parametrizadas mediante

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, \log u) \qquad \psi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$$

tienen igual curvatura Gaussiana en $\phi(u, v)$ y $\psi(u, v)$, pero $f = \psi \circ \phi^{-1}$ no es una isometría.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, dotted, "f"] & & \hat{S} \\ & U \arrow[ul, "\phi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, $E^\phi = 1 + \frac{1}{u^2}$, $F^\phi = 0$, $G^\phi = u^2$ y $E^\psi = 1$, $F^\psi = 0$, $G^\psi = 1 + u^2$, por lo tanto f no es una isometría. Sin embargo gracias al lema anterior,

$$K^S = K^{\hat{S}} = -\frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \left(\frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} \right)_u$$

Aplicaciones

- Una esfera de radio r y un plano tienen curvaturas Gaussianas constantes $\frac{1}{r^2}$ y 0 respectivamente. Por lo tanto, una esfera y un plano no son localmente isométricos. En otras palabras, no podemos doblar un papel en una región de una esfera sin romperlo ni viceversa. El "viceversa" es importante en cartografía: es imposible hacer un mapa perfecto de la Tierra, ni siquiera de una porción de ella, en el sentido que toda proyección cartográfica distorsiona áreas o ángulos, en virtud del ejercicio 2.3.8, y necesariamente distorsiona longitudes, en virtud del ejercicio 2.3.7.

- El catenoide (resultado de revolucionar una catenaria, ver 1.1.4) y el helicoide (la superficie que "describe" una hélice, ver 1.1.6) son localmente isométricos. Por lo tanto, la curvatura Gaussiana en dos puntos del catenoide y del helicoide que se corresponden el uno al otro bajo una isometría local es la misma.

Comentarios

- Se puede probar que dos superficies cualesquiera con la misma curvatura Gaussiana constante son localmente isométricas. Este es el teorema de Minding: ver [dC], p. 290.

- Una parametrización con $F = 0$ se llama *ortogonal* porque las curvas coordenadas son ortogonales, i.e. $\varphi_u \perp \varphi_v$. Alrededor de todo punto existe una parametrización ortogonal (ver sección 3.4 de [dC]).

- No podemos siempre conseguir una parametrización φ con coeficientes $E = G = 1, F = 0$, porque si pudiéramos entonces toda superficie sería localmente isométrica a un plano (y por lo tanto toda superficie tendría la misma curvatura que el plano).

- Sin embargo, siempre se puede conseguir una parametrización con $E = G$, $F = 0$. Una tal parametrización da lugar a las llamadas *coordenadas isotérmicas*. La demostración de este teorema demostrado por Gauss es difícil: ver addendum 1 al capítulo 9 de [Spi4]. Se deduce que todo par de superficies es *localmente conforme* (i.e. cada punto en cada una de las dos superficies tiene un entorno abierto conforme a un abierto en la otra superficie).

- Existen también sistemas de coordenadas donde $E = 1$ y $F = 0$: por ejemplo, las coordenadas polares geodésicas ([dC], sección 4.6), o las coordenadas de Fermi ([dC], ejercicio 3, sección 4.7).

- Ya observamos que el cilindro y el plano son localmente isométricos: basta desenrrollar una región del cilindro en una región del plano. Ese "desenrollar" es una isometría entre las dos regiones, pero si lo pensamos como mapa entre regiones de $\mathbb{R}^3$ observamos que no es un movimiento rígido (i.e. una composición de una rotación con una traslación en $\mathbb{R}^3$). Nos podemos preguntar cómo caracterizar las superficies que difieran apenas en un movimiento rígido. Observar que esta pregunta no tiene sentido intrínseco a las superficies pues involucra el espacio ambiente: involucra entonces a la segunda forma fundamental. El resultado es el siguiente.

  La primera y segunda formas fundamentales caracterizan completamente una superficie en $\mathbb{R}^3$. Más precisamente, dos superficies M, N cubiertas por sendas parametrizaciones $\varphi : U \to M$, $\psi : U \to N$ son congruentes (i.e. difieren en un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$) si y sólo si $\mathrm{I}_{\varphi(q)} = \mathrm{I}_{\psi(q)}$ y $\mathrm{II}_{\varphi(q)} = \pm\mathrm{II}_{\psi(q)}$ para todo $q \in U$ (donde el signo $\pm$ es constante: no depende de q).

- El resultado de unicidad del ítem anterior se complementa con el siguiente resultado de existencia. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $E, F, G, e, f, g : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $E > 0$ y $EG - F^2 > 0$ que satisfacen las ecuaciones

de Gauss y de Mainardi-Codazzi de la observación 2.4.5. Existe una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ cubierta por una parametrización $\varphi : U \to \varphi(U) = S$ tal que E, F, G y e, f, g son sus coeficientes de la primera y segunda forma fundamental respectivamente.

Una demostración de los teoremas enunciados en estos últimos dos ítems puede consultarse en el apéndice al capítulo 4 de [dC].

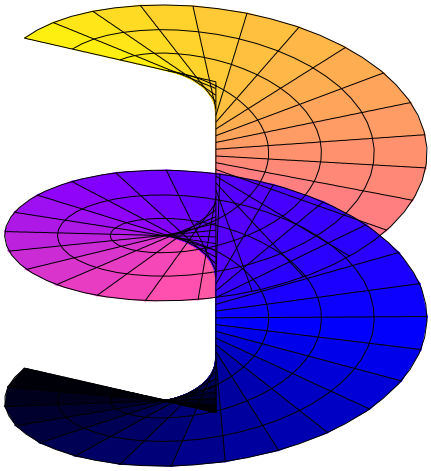


Figura 2.5: Helicoide

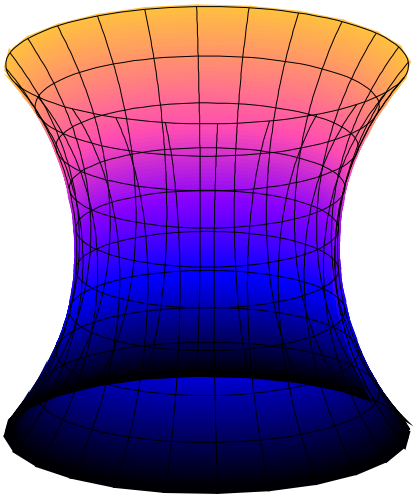


Figura 2.6: Catenoide

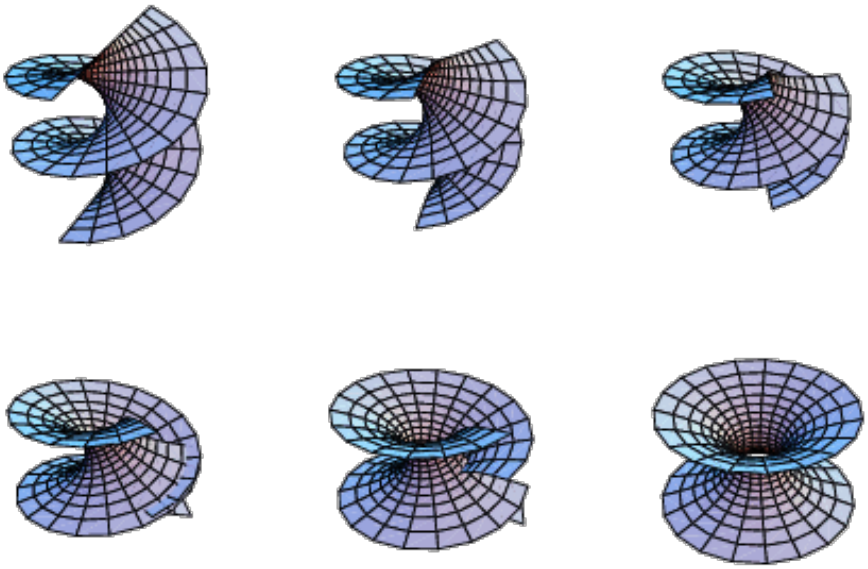


Figura 2.7: Isometría local del helicoide en el catenoide

Bibliografía

[Abe] Andrés Abella, *Cálculo III*, disponible en http://www.cmat.edu.uy/cmat/cursos/licenciatura/apuntes/notas-realizadas-por-docentes/calculo3-2006/

[Bac] David Bachman, *A Geometric Approach to Differential Forms*, disponible en http://arxiv.org/abs/math/0306194v1

[dC] Manfredo P. do Carmo, *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*, Alianza Editorial, Madrid, 1990.

[GP] Victor Guillemin y Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[Ivo] Carlos Ivorra, *Análisis Matemático*, disponible en http://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm

[Mar] Jerrold Marsden y Anthony Tromba, *Cálculo Vectorial, 3ª ed.*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, DE, 1991.

[Mil] John Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.

[Mor] Shigeyuki Morita, *Geometry of Differential Forms*, AMS, 2001.

[Mu1] James Munkres, *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1991.

[Mu2] James Munkres, *Topology, 2nd. ed.*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[Lee] John Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd. edition, Springer, 2012.

[Opr] John Oprea, *Differential Geometry and its Applications*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

[Shif] Theodore Shifrin, *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*, University of Georgia, 2012.

[ST] Isadore Singer y John Thorpe, *Lectures on Elementary Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, NY, 1967.

[Spi] Michael Spivak, *Cálculo en Variedades*, Editorial Reverté, Barcelona, 1988.

[Spi4] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. IV*, Publish or Perish, Boston, 1975.

[Tu] Loring Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer Science+ Business Media, 2011.

[Wei] Steven Weintraub, *Differential Forms, A Complement to Vector Calculus*, Academic Press, San Diego, CA; Chestnut Hill, MA, 1997.

[WeisMS] Eric W. Weisstein, *Monkey Saddle*, MathWorld–A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/MonkeySaddle.html

[WeisC] Eric W. Weisstein, *Catenoid*, MathWorld–A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/Catenoid.html

[Yan] Min Yan, *Topology*, Hong Kong University of Science and Technology, 2010.

Índice alfabético

Abierto de $\mathbb{R}^n$, 42
Alternador, 15
Ángulo entre curvas coordenadas, 118
Anticonmutatividad de los tensores alternados, 17
Atlas, 40

Base
  de las formas multilineales, 14
  del espacio tangente
    de una variedad con borde, 73
    inducida por una parametrización, 53
  equivalente, 61
  positiva, 62
Borde
  de $\mathbb{H}^n$, 70
    orientado como borde de $\mathbb{H}^n$, 79
  de una variedad, 72
    es una variedad sin borde, 73

Cambio de coordenadas, 40, 52
Campo escalar, 30
Campo vectorial, 30, 66
  conservativo, 37
  de gradientes, 37
  irrotacional, 106
  normal, 66
    compatible con la orientación de una superficie, 68
  solenoidal, 106
  tangente, 66
    compatible con la orientación de una curva, 66
  unitario, 66
Carta local, 40
Catenaria, 110
Catenoide, 134
$\mathcal{X}(U)$, *véase* Campo vectorial
Christoffel, símbolos de, 130
Cilindro, 74, 103, 123
  es localmente isométrico al plano, 129
$C^\infty(U)$, *véase* Campo escalar
Circulación, 99
Codimensión, 40
Cohomología de De Rham, 31
Compacidad, 89, 90, 103
Conforme, 130
Cono, 45
Contráctil, 32
Coordenadas polares, 28, 31, 46
Cubrimiento abierto, 92
Curva, 34
  cerrada, 32, 34, 108
  concatenación, 34
  diferenciable a trozos, 34
  homotópica, 32, 107, 108
  longitud de una, 96, 111, 117
  plana, 110
  que se autointersecta, 111
  regular, 41, 110
Curvas
  coordenadas, 118
Curvatura
  de una curva, 113
  Gaussiana, 122
    de la esfera, 123
    del cilindro, 123
    del paraboloide hiperbólico en el origen, 123
    es invariante por isometrías locales, 132
  normal, 119
  principal, 121

Derivada
exterior
en abiertos del espacio euclídeo, 25
en variedades, 87
y el pull-back conmutan, 28
$\partial\mathbb{H}^n$, *véase* Borde de $\mathbb{H}^n$
Difeomorfismo, 10
local, 128
Diferencial
de un mapa de una variedad con borde al espacio euclídeo, 71
de un mapa entre variedades, 56
de un mapa entre variedades con borde, 73
de una función, 8, 25
Dirección principal, 121
Divergencia, 30
interpretación física, 106

Ecuaciones
de Gauss, 132
de Mainardi-Codazzi, 132
de Weingarten, 127
Entorno
coordenado, 40
relativo, 39
Esfera, *véase* S^2
con n-asas, 50
Espacio
ambiente, 116
dual, 12
euclídeo, 8
tangente, 50
afín, 51
base inducida por una parametrización, 53
de una variedad con borde, 73
vectorial orientado, 61

Fórmula de Euler, 121
Flujo, 98
Forma
de área, 84
bilineal, 13
de ángulo, 31, 37, 107
de longitud, 84
de volumen, 84
diferencial
cerrada, 31
en $\mathbb{R}^3$, 30
en $\mathbb{R}^n$, 22
en una variedad, 81
exacta, 31
en una variedad, 80
multilineal, 13
alternada, 14
Forma de estrella, 32
Forma fundamental
primera, 116
coeficientes de la, 117
segunda, 119
en coordenadas locales, 126
Frenet
ecuaciones de, 114
triedro de, 113

Gauss
mapa de, 118
teorema egregio de, 131
Gráfico de una función diferenciable, 42
es orientable, 65
Gradiente, 8, 30
interpretación física, 105
Grupo simétrico, 15

Hélice, 110
Helicoide, 134
Hiperboloide de una hoja, 45, 124
como superficie reglada, 48
$\mathbb{H}^n$, *véase* Semiespacio superior
Homotopía, 32, 107, 108

Integración
de un campo vectorial
en una curva, 99
en una superficie, 98
de una forma diferencial
en el espacio euclídeo, 89
en un entorno coordenado, 90
en una curva, 99
en una superficie, 97
en una variedad, 92
de una función
en una curva, 99
en una superficie, 97

en una variedad, 95
en una curva, 34
Integral de línea, 34
Isometría, 115, 128, 133
local, 128, 134

Klein, botella de, 40
no es orientable, 67

$\Lambda^k(V^*)$, *véase* Forma multilineal alternada
Laplaciano, 30
Lema de Poincaré, 33

Möbius, banda de, 67

$\Omega^k(M)$, *véase* Forma diferencial en una variedad
$\Omega^k(U)$, *véase* Forma diferencial en $\mathbb{R}^n$
Operadores clásicos, 30
Orientación, 60
borde, 77
de curvas, 66
conexas, 67
de superficies, 67
de variedades, 63
con formas diferenciales, 85
de variedades con borde, 74

Parábola, 42
Paraboloide, 42, 53
hiperbólico, 45, 123
Parametrización, 40
de una curva por longitud de arco, 112
de una variedad con borde, 73
ortogonal, 133, 134
Partición de la unidad, 92
Permutación, 15
Plano, 124, 129, 133
normal, 113
osculador, 113
rectificante, 113
Preserva la orientación
difeomorfismo entre variedades orientadas, 64
isomorfismo entre espacios vectoriales orientados, 62
Producto
cuña, *véase* Producto exterior
de variedades, 107
exterior
de formas diferenciales, 24
de formas multilineales alternadas, 17
tensorial, 13
vectorial, 20
Proyección estereográfica, 49
Pseudoesfera, 125
Pull-back
de un mapa entre variedades, 80
en el espacio euclídeo, 26
lineal, 16
Punto
crítico, 43
elíptico, 122
hiperbólico, 122
parabólico, 122
plano, 122
regular, 43
umbílico, 121

Regla de la cadena
en el espacio euclídeo, 10
en variedades, 58
Reparametrización, 34
Rotacional, 30
interpretación física, 106

S^2, 42, 46, 123, 133
y $\mathbb{R}^2$ no son difeomorfos, 49
Sección normal, 120
Semiespacio
inferior, 70
superior, 70
y $\mathbb{R}^n$ no son difeomorfos, 72
Silla
de montar, *véase* Paraboloide hiperbólico
del mono, 124
Simplemente conexo, 32
Sistema de coordenadas, 40
Soporte
de una forma diferencial
en el espacio euclídeo, 89
en una variedad, 91
de una función, 89

Superficie, 40
área de una, 96, 118
de revolución, 46
reglada, 48
regular, 40, 45, 116
orientable, 67

T^2, 46
es orientable, 70
Tensor, *véase* Forma multilineal
Teorema
de la preimagen de valor regular, 43
de cambio de variable, 90
de clasificación de
curvas, 45
superficies, 50
de De Rham, 103
de Green, 104
de Heine-Borel, 89
de inmersión de Whitney, 41
de invariancia de dominio, 72
de la divergencia de Gauss, 105
de la función inversa
en el espacio euclídeo, 11
en variedades, 59
de Meusnier, 120
de Minding, 134
de partición de la unidad, 92
de Stokes, 100
clásico, 105
del gradiente, 104
egregio de Gauss, 131
fundamental de la teoría local de curvas, 115
fundamental del cálculo, 104
$\mathscr{T}^k(V^*)$, *véase* Forma multilineal
Toro, *véase* T^2
Torsión, 114
Tractriz, 110
Transformación dual, 13
Tritoro, 50

Valor regular, 43
Variedad
con aristas, 103
con borde, 70
orientable, 77
con singularidades, 103
conexa, 41
diferenciable, 39
orientable, 63
orientada, 63
con la orientación opuesta, 64
sin borde, 73
topológica, 39
volumen de una, 95
Vector
binormal, 113
entrante, 74
normal, 113
entrante, 77
saliente, 77
saliente, 74
tangente, 113
velocidad, 55