

Funtores adjuntos y teoremas de adjunción

Bruno Stonek
bruno@stonek.com

19 de octubre de 2012

Introducción

1 Definiciones básicas de la teoría de categorías

Introducción

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones

Introducción

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones
- 3 Teoremas de adjunción

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones
- 3 Teoremas de adjunción

Categorías (1)

Definición

Una **categoría** \mathcal{C} consta de:

- una clase $\text{Ob}(\mathcal{C})$ de **objetos**,

Categorías (1)

Definición

Una **categoría** \mathcal{C} consta de:

- una clase $\text{Ob}(\mathcal{C})$ de **objetos**,
- para cada par (A, B) de objetos, un conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de **flechas** (o *morfismos*) $A \rightarrow B$ de *dominio* A y *codominio* B ,

Categorías (1)

Definición

Una **categoría** \mathcal{C} consta de:

- una clase $\text{Ob}(\mathcal{C})$ de **objetos**,
- para cada par (A, B) de objetos, un conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de **flechas** (o *morfismos*) $A \rightarrow B$ de *dominio* A y *codominio* B ,
- para cada par $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ de flechas, una operación de *composición* $g \circ f = gf : A \rightarrow C$,

Categorías (1)

Definición

Una **categoría** \mathcal{C} consta de:

- una clase $\text{Ob}(\mathcal{C})$ de **objetos**,
- para cada par (A, B) de objetos, un conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de **flechas** (o *morfismos*) $A \rightarrow B$ de *dominio* A y *codominio* B ,
- para cada par $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ de flechas, una operación de *composición* $g \circ f = gf : A \rightarrow C$,
- para cada objeto A , una flecha *identidad* $\text{id}_A : A \rightarrow A$.

Categorías (2)

Definición

Debe cumplirse:

- si $f : B \rightarrow C$, entonces $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$,

Categorías (2)

Definición

Debe cumplirse:

- si $f : B \rightarrow C$, entonces $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$,
- la composición es asociativa: si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ son flechas, entonces $h(gf) = (hg)f$.

Categorías (2)

Definición

Debe cumplirse:

- si $f : B \rightarrow C$, entonces $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$,
- la composición es asociativa: si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ son flechas, entonces $h(gf) = (hg)f$.

Una categoría es *pequeña* si $\text{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Categorías (2)

Definición

Debe cumplirse:

- si $f : B \rightarrow C$, entonces $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$,
- la composición es asociativa: si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ son flechas, entonces $h(gf) = (hg)f$.

Una categoría es *pequeña* si $\text{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Notación

$A \in \mathcal{C}$ significará $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Ejemplos

- **Set:** conjuntos y funciones.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R -módulos y morfismos de R -módulos.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R -módulos y morfismos de R -módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R -módulos y morfismos de R -módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si \mathcal{C} es una categoría, \mathcal{C}^{op} es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R -módulos y morfismos de R -módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si \mathcal{C} es una categoría, \mathcal{C}^{op} es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.
- Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son categorías, consideraremos la *categoría producto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R -módulos y morfismos de R -módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si \mathcal{C} es una categoría, \mathcal{C}^{op} es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.
- Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son categorías, consideraremos la *categoría producto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Definición

Una flecha $f : A \rightarrow B$ es un **isomorfismo** si existe $g : B \rightarrow A$ tal que $gf = \text{id}_A$ y $fg = \text{id}_B$.

Subcategorías

Definición

Una categoría \mathcal{S} es una **subcategoría** de una categoría \mathcal{C} si:

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$,

Subcategorías

Definición

Una categoría \mathcal{S} es una **subcategoría** de una categoría \mathcal{C} si:

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{S})$,

Subcategorías

Definición

Una categoría \mathcal{S} es una **subcategoría** de una categoría \mathcal{C} si:

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{S})$,
- La composición y las identidades en \mathcal{S} coinciden en \mathcal{S} y en \mathcal{C} .

Subcategorías

Definición

Una categoría \mathcal{S} es una **subcategoría** de una categoría \mathcal{C} si:

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{S})$,
- La composición y las identidades en \mathcal{S} coinciden en \mathcal{S} y en \mathcal{C} .

Una subcategoría $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ es **plena** si $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \mathcal{S}$.

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

A

es **inicial** si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

A X

es **inicial** si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$A \dashrightarrow X$$

es **inicial** si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

A

es **final** si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$X \quad A$

es **final** si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$X \cdots \longrightarrow A$$

es **final** si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$X \cdots \longrightarrow A$$

es **final** si:

Proposición

Si existe un objeto inicial (o final) entonces es único a menos de un único isomorfismo.

Monomorfismos y epimorfismos

Definición

Una flecha

$$A \xrightarrow{m} B$$

es un **monomorfismo** si:

Monomorfismos y epimorfismos

Definición

Una flecha

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{m} B$$

es un **monomorfismo** si: $mf = mg \Rightarrow f = g$

Monomorfismos y epimorfismos

Definición

Una flecha

$$A \xrightarrow{e} \twoheadrightarrow B$$

es un **epimorfismo** si:

Monomorfismos y epimorfismos

Definición

Una flecha

$$A \xrightarrow{e} B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

es un **epimorfismo** si: $fe = ge \Rightarrow f = g$

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C} , \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

\mathcal{C}

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ f \downarrow & & \\ \mathcal{C}' & & \end{array}$$

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ f \downarrow & \xrightarrow{F} & \downarrow Ff \\ \mathcal{C}' & & \mathcal{D}' \end{array}$$

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ f \downarrow & \xrightarrow{F} & \downarrow Ff \\ \mathcal{C}' & & \mathcal{D}' \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$,

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 f \downarrow & \xrightarrow{F} & \downarrow Ff \\
 \mathcal{C}' & & \mathcal{D}'
 \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$,
- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces $F(gf) = F(g)F(f)$.

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & F\mathcal{C} \\ f \downarrow & & \\ \mathcal{C}' & & F\mathcal{C}' \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$,
- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces

Un **functor contravariante** $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 f \downarrow & \xrightarrow{F} & \uparrow Ff \\
 \mathcal{C}' & & \mathcal{D}'
 \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$,
- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces

Un **functor contravariante** $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Funtores

Definición

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 f \downarrow & \xrightarrow{F} & \uparrow Ff \\
 \mathcal{C}' & & \mathcal{D}'
 \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$,
- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces $F(gf) = F(f)F(g)$.

Un **functor contravariante** $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Definición

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores, se define su functor **composición** $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ punto a punto.

Definición

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores, se define su functor **composición** $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Definición

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores, se define su functor **composición** $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$.
- El *bifunctor Hom*, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Definición

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores, se define su functor **composición** $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$.
- El *bifunctor Hom*, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

$A \ A'$

Definición

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores, se define su functor **composición** $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$.
- El *bifunctor Hom*, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

$$A \quad A' \mapsto \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$$

Definición

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores, se define su functor **composición** $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$.
- El *bifunctor Hom*, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

$$\begin{array}{ccc}
 A & A' & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \\
 \uparrow f & \downarrow g & \\
 B & B' &
 \end{array}$$

Diagramas

Definición

Sea \mathcal{C} una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en \mathcal{C} es un functor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.

Diagramas

Definición

Sea \mathcal{C} una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en \mathcal{C} es un functor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.

i

Diagramas

Definición

Sea \mathcal{C} una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en \mathcal{C} es un functor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.

$$i \quad D_i$$

Diagramas

Definición

Sea \mathcal{C} una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en \mathcal{C} es un functor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i \\ e_j^i \downarrow & & \\ j & & \end{array}$$

Diagramas

Definición

Sea \mathcal{C} una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en \mathcal{C} es un functor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i \\ e_j^i \downarrow & & \downarrow De_j^i \\ j & & D_j \end{array}$$

Diagramas

Definición

Sea \mathcal{C} una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en \mathcal{C} es un functor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i \\ e_j^i \downarrow & & \downarrow De_j^i \\ j & & D_j \end{array}$$

- Es **conmutativo** si:

Diagramas

Definición

Sea \mathcal{C} una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en \mathcal{C} es un functor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i \\ \downarrow f_j^i & & \\ j & & D_j \end{array}$$

- Es **conmutativo** si:

Diagramas

Definición

Sea \mathcal{C} una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en \mathcal{C} es un functor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc}
 i & & D_i \\
 \downarrow f_j^i & & \downarrow Df_j^i \\
 e_j^i & & De_j^i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 j & & D_j
 \end{array}$$

- Es **conmutativo** si: $De_j^i = Df_j^i$.

Categorías coma

Definición

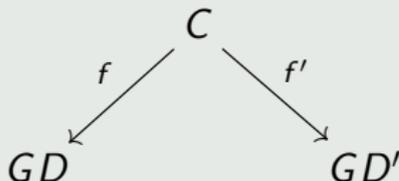
Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor y $C \in \mathcal{C}$, definimos la **categoría coma** $(C \downarrow G)$:

Categorías coma

Definición

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor y $C \in \mathcal{C}$, definimos la **categoría coma** $(C \downarrow G)$:

- Objetos: las flechas $f : C \rightarrow GD$, donde $D \in \mathcal{D}$,
- Un morfismo de $f : C \rightarrow GD$ a $f' : C \rightarrow GD'$



Categorías coma

Definición

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor y $C \in \mathcal{C}$, definimos la **categoría coma** $(C \downarrow G)$:

- Objetos: las flechas $f : C \rightarrow GD$, donde $D \in \mathcal{D}$,
- Un morfismo de $f : C \rightarrow GD$ a $f' : C \rightarrow GD'$ es una flecha $g : D \rightarrow D'$ tal que:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ GD & \xrightarrow{Gg} & GD' \end{array}$$

es conmutativo.

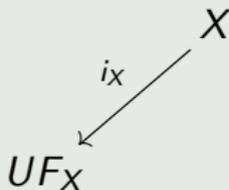
Ejemplo

Sean R un anillo, X un conjunto, $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido. Sea F_X un R -módulo.

Ejemplo

Sean R un anillo, X un conjunto, $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido. Sea F_X un R -módulo.

F_X es un R -módulo libre \Leftrightarrow existe una función “inclusión”
 $i_X : X \rightarrow UF_X$ tal que i_X es inicial en $(X \downarrow U)$.

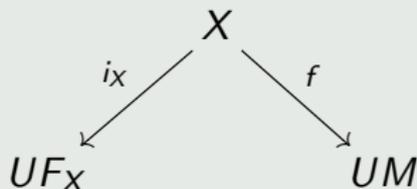


Ejemplo

Sean R un anillo, X un conjunto, $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido. Sea F_X un R -módulo.

F_X es un R -módulo libre \Leftrightarrow existe una función “inclusión”
 $i_X : X \rightarrow UF_X$ tal que i_X es inicial en $(X \downarrow U)$.

Esto significa: para todo $M \in \mathbf{R-Mod}$ y $f : X \rightarrow UM$ función,



Ejemplo

Sean R un anillo, X un conjunto, $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido. Sea F_X un R -módulo.

F_X es un R -módulo libre \Leftrightarrow existe una función “inclusión”
 $i_X : X \rightarrow UF_X$ tal que i_X es inicial en $(X \downarrow U)$.

Esto significa: para todo $M \in \mathbf{R}\text{-Mod}$ y $f : X \rightarrow UM$ función,
 existe un único morfismo $\tilde{f} : F_X \rightarrow M$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 i_X \swarrow & & \searrow f \\
 UF_X & \cdots \xrightarrow{U\tilde{f}} & UM
 \end{array}$$

es conmutativo.

Sabemos que para todo conjunto X existe un R -módulo libre F_X .

Sabemos que para todo conjunto X existe un R -módulo libre F_X .

Preguntas

¿Determina F_X un *functor libre* $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$?

Sabemos que para todo conjunto X existe un R -módulo libre F_X .

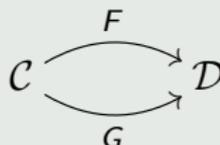
Preguntas

¿Determina F_X un *functor libre* $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$?

En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$?

Transformaciones naturales

Definición

Sean \mathcal{C}  \mathcal{D} funtores.

Transformaciones naturales

Definición

Sean \mathcal{C} $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array}$ \mathcal{D} funtores. Una **transformación natural**
 $\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$

A

Transformaciones naturales

Definición

Sean \mathcal{C} $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array}$ \mathcal{D} funtores. Una **transformación natural** $\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_A : FA \rightarrow GA$,

$$A \quad FA \xrightarrow{\tau_A} GA$$

Transformaciones naturales

Definición

Sean \mathcal{C} $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array}$ \mathcal{D} funtores. Una **transformación natural**

$\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_A : FA \rightarrow GA$, tal que para toda f ,

$$\begin{array}{ccc} A & & FA \xrightarrow{\tau_A} GA \\ \downarrow f & & \\ B & & \end{array}$$

Transformaciones naturales

Definición

Sean \mathcal{C} $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array}$ \mathcal{D} funtores. Una **transformación natural**

$\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_A : FA \rightarrow GA$, tal que para toda f ,

$$\begin{array}{ccc} A & FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ f \downarrow & Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ B & FB & \xrightarrow{\tau_B} & GB \end{array}$$

es conmutativo.

Transformaciones naturales

Definición

Sean $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$ funtores. Una **transformación natural**

$\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_A : FA \rightarrow GA$, tal que para toda f ,

$$\begin{array}{ccc} A & FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ f \downarrow & Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ B & FB & \xrightarrow{\tau_B} & GB \end{array}$$

es conmutativo.

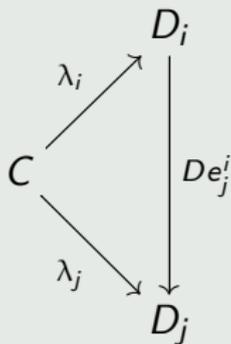
τ es un **isomorfismo natural** si τ_A es un isomorfismo para todo A : escribimos $F \cong G$.

Conos

Definición

Sea $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ un diagrama.

Un **cono** para D es $(C, (\lambda_j)_{j \in J})$, donde

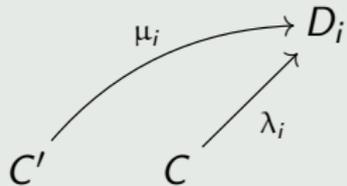


es conmutativo para toda $e_j^i : i \rightarrow j$.

Morfismos de conos

Definición

Sean (C, λ_j) y (C', μ_j) dos conos para $D : J \rightarrow \mathcal{C}$.



Morfismos de conos

Definición

Sean (C, λ_j) y (C', μ_j) dos conos para $D : J \rightarrow \mathcal{C}$. Un **morfismo de conos** $f : (C', \mu_j) \rightarrow (C, \lambda_j)$ es $f : C' \rightarrow C$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \mu_i \curvearrowright & \nearrow \\
 C' & \xrightarrow{f} & C \\
 & & \lambda_i \nearrow
 \end{array}$$

conmuta para todo $i \in J$.

Morfismos de conos

Definición

Sean (C, λ_j) y (C', μ_j) dos conos para $D : J \rightarrow \mathcal{C}$. Un **morfismo de conos** $f : (C', \mu_j) \rightarrow (C, \lambda_j)$ es $f : C' \rightarrow C$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \mu_i \nearrow & \nearrow \\
 C' & \xrightarrow{f} & C \\
 & & \lambda_i \nearrow
 \end{array}$$

conmuta para todo $i \in J$.

Así, los conos para D forman una categoría.

Límites

Definición

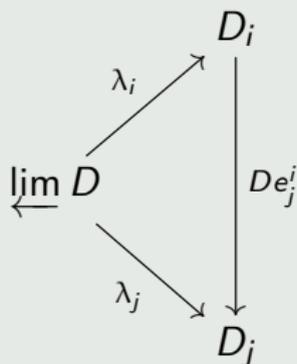
Un **límite** para el diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D .

Límites

Definición

Un **límite** para el diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D .

Es un cono $(\varprojlim D, \lambda_j)$

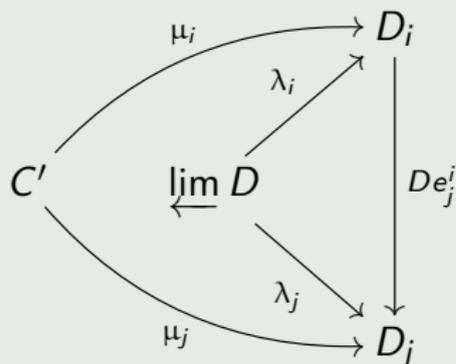


Límites

Definición

Un **límite** para el diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D .

Es un cono $(\varprojlim D, \lambda_j)$ tal que si (C', μ_j) es otro cono,

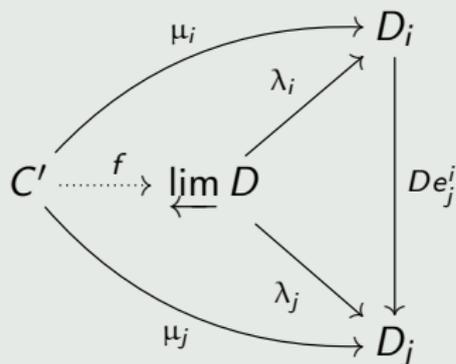


Límites

Definición

Un **límite** para el diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D .

Es un cono $(\varprojlim D, \lambda_j)$ tal que si (C', μ_j) es otro cono, existe una única flecha $f : C' \rightarrow \varprojlim D$ tal que:



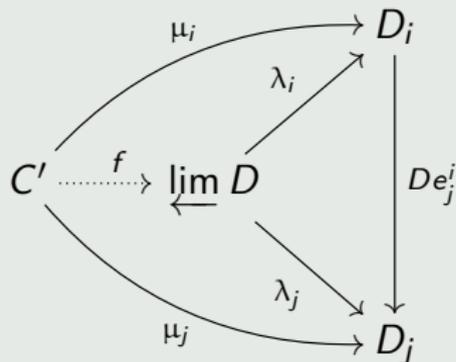
es conmutativo.

Límites

Definición

Un **límite** para el diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D .

Es un cono $(\varprojlim D, \lambda_j)$ tal que si (C', μ_j) es otro cono, existe una única flecha $f : C' \rightarrow \varprojlim D$ tal que:



es conmutativo.

Es único a menos de un único isomorfismo en la categoría de conos.

Productos

Definición

Si J es una categoría pequeña y *discreta*, i.e. sus únicas flechas son identidades, el límite de un diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un **producto**.

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \nearrow^{f_i} & \uparrow \\
 X & \xrightarrow{\quad f \quad} & \prod_{j \in J} D_j \\
 & & \searrow_{p_i}
 \end{array}$$

Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.

Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R-Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.

Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R-Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.
- En **Grp**, el producto directo de grupos con las proyecciones.

Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R-Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.
- En **Grp**, el producto directo de grupos con las proyecciones.
- En **Top**, el producto cartesiano con la topología producto, y las proyecciones.

Igualadores

Definición

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Igualadores

Definición

$$E \xrightarrow{i} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \quad fi = gi$$

Igualadores

Definición

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & A \xrightleftharpoons[g]{f} B \\ & \nearrow i' & \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{l} fi = gi \\ \\ fi' = gi' \end{array}$$

Igualadores

Definición

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & A \xrightleftharpoons[g]{f} B \\ \theta \uparrow \cdots & \nearrow i' & \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{l} fi = gi \\ \\ fi' = gi' \end{array}$$

Pullbacks

Definición

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

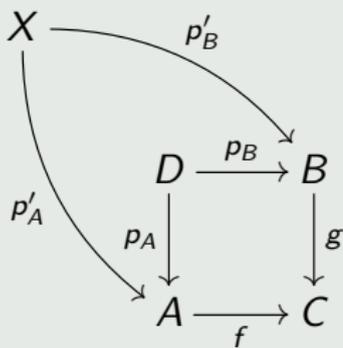
Pullbacks

Definición

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p_B} & B \\ p_A \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array} \quad f p_A = g p_B$$

Pullbacks

Definición

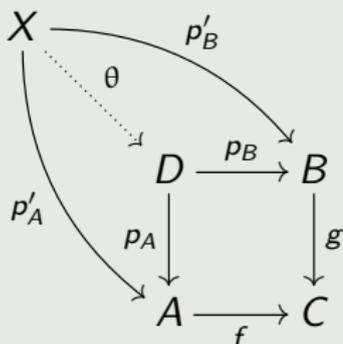


$$f p_A = g p_B$$

$$f p'_A = g p'_B$$

Pullbacks

Definición



$$f p_A = g p_B$$

$$f p'_A = g p'_B$$

Colímites

Definición

Si $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un diagrama,

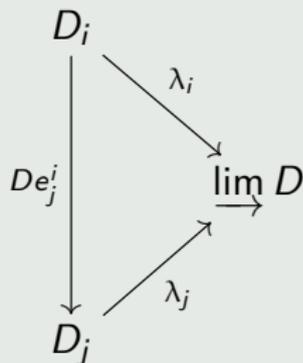
$$\begin{array}{c} D_i \\ \downarrow \\ D_j \end{array}$$

De_j^i

Colímites

Definición

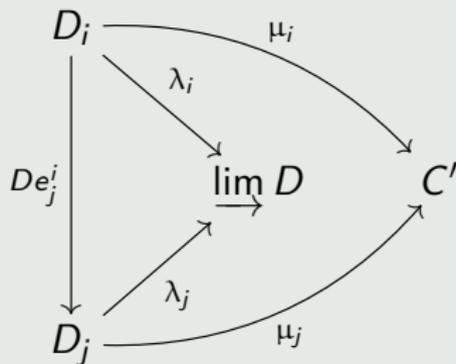
Si $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un diagrama, su **colímite** es $(\varinjlim D, \lambda_i)$.



Colímites

Definición

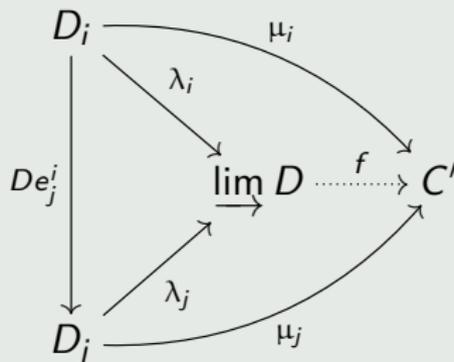
Si $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un diagrama, su **colímite** es $(\varinjlim D, \lambda_i)$.



Colímites

Definición

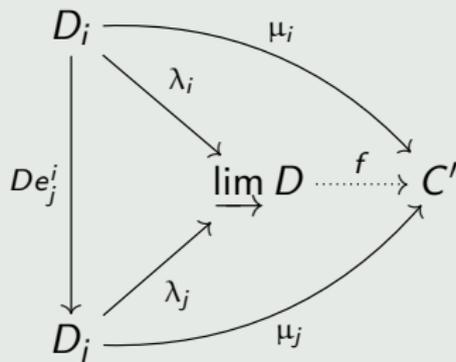
Si $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un diagrama, su **colímite** es $(\varinjlim D, \lambda_i)$.



Colímites

Definición

Si $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ es un diagrama, su **colímite** es $(\varinjlim D, \lambda_i)$.

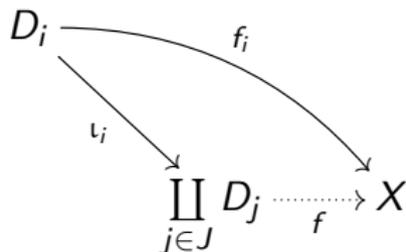


También se define *coproducto*, *coigualador*, *pushout*.

Coproductos

$$\begin{array}{ccc} D_i & & \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_i & \\ \coprod_{j \in J} D_j & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Coproductos



Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.

Coproductos

$$\begin{array}{ccc} D_i & & \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_i & \\ \coprod_{j \in J} D_j & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.

Coproductos

$$\begin{array}{ccc} D_i & & \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_i & \\ \coprod_{j \in J} D_j & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.
- En **Grp**, el producto libre de grupos.

Coproductos

$$\begin{array}{ccc} D_i & & \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_i & \\ \coprod_{j \in J} D_j & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.
- En **Grp**, el producto libre de grupos.
- En **Top**, la unión disjunta con la topología final respecto de las inclusiones.

Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp...**) el producto “coincide” con el producto en **Set**?

Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp...**) el producto “coincide” con el producto en **Set**?

¿Cómo explicar que en **Top** tanto el producto como el coproducto “coinciden” con el de **Set**?

Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp...**) el producto “coincide” con el producto en **Set**?

¿Cómo explicar que en **Top** tanto el producto como el coproducto “coinciden” con el de **Set**?

Precisemos el sentido de las preguntas.

Preservación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **preserva límites** si para todo $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ con límite $(\varprojlim D, \lambda_i)$ se tiene que $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$ es el límite de $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$.

Preservación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **preserva límites** si para todo $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ con límite $(\varprojlim D, \lambda_i)$ se tiene que $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$ es el límite de $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$. Análogamente con colímites.

Preservación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **preserva límites** si para todo $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ con límite $(\varprojlim D, \lambda_i)$ se tiene que $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$ es el límite de $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$. Análogamente con colímites.

Preguntas

¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ (o en $\mathbf{Grp}\dots$) preserva límites?

Preservación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **preserva límites** si para todo $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ con límite $(\varprojlim D, \lambda_i)$ se tiene que $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$ es el límite de $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$. Análogamente con colímites.

Preguntas

¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ (o en $\mathbf{Grp}...$) preserva límites?

¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva tanto límites como colímites?

(Co)completitud

Definición

Una categoría \mathcal{C} es **completa** si todo diagrama en \mathcal{C} tiene límite.

(Co)completitud

Definición

Una categoría \mathcal{C} es **cocompleta** si todo diagrama en \mathcal{C} tiene colímite.

(Co)completitud

Definición

Una categoría \mathcal{C} es **cocompleta** si todo diagrama en \mathcal{C} tiene colímite.

Ejemplos

Set, **R-Mod**, **Top** son completas y cocompletas.

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **crea límites** si:

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **crea límites** si: para cada diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ tal que FD tiene límite,

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **crea límites** si: para cada diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ tal que FD tiene límite,

- existe un único cono (C, λ_i) para D (a menos de isomorfismo) tal que $(FC, F\lambda_i)$ es el límite de FD ,

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **crea límites** si: para cada diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ tal que FD tiene límite,

- existe un único cono (C, λ_i) para D (a menos de isomorfismo) tal que $(FC, F\lambda_i)$ es el límite de FD ,
- (C, λ_i) es el límite de D .

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **crea límites** si: para cada diagrama $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ tal que FD tiene límite,

- existe un único cono (C, λ_i) para D (a menos de isomorfismo) tal que $(FC, F\lambda_i)$ es el límite de FD ,
- (C, λ_i) es el límite de D .

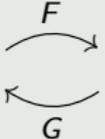
Observación

Si \mathcal{D} es una categoría completa y $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ crea límites, entonces \mathcal{C} es completa.

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones**
- 3 Teoremas de adjunción

Adjunciones

Definición

Sean \mathcal{C}  \mathcal{D} funtores.

Adjunciones

Definición

Sean \mathcal{C} $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array}$ \mathcal{D} funtores. (F, G) es un **par adjunto** si existe un isomorfismo natural τ :

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) & \\
 \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Set} \\
 & \cong \Downarrow \tau & \\
 & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) &
 \end{array}$$

Adjunciones

Definición

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. (F, G) es un **par adjunto** si existe un isomorfismo natural τ :

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)} \\ \cong \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)} \end{array} \mathbf{Set}$$

Es decir: si hay biyecciones

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B)$$

naturales en $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}$.

Identities triangulares

Teorema

Sean \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xleftarrow{G} funtores.

Identidades triangulares

Teorema

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. (F, G) es un par adjunto si y sólo si

existen $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{array} \mathcal{C}$ y $\mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{FG} \\ \Downarrow \epsilon \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{D}}} \end{array} \mathcal{D}$

Propiedad universal

Teorema

Sean \mathcal{C} $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array}$ \mathcal{D} funtores.

Propiedad universal

Teorema

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. (F, G) es un par adjunto si y sólo si

existe $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{array} \mathcal{C}$ con η_C inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

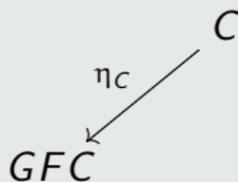
Propiedad universal

Teorema

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. (F, G) es un par adjunto si y sólo si

existe $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{array} \mathcal{C}$ con η_C inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Para todo $C \in \mathcal{C}$,



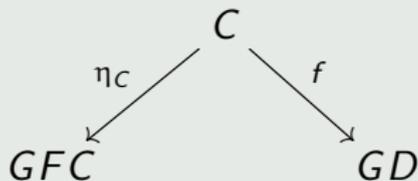
Propiedad universal

Teorema

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. (F, G) es un par adjunto si y sólo si

existe $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{array} \mathcal{C}$ con η_C inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Para todo $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ y $f : C \rightarrow GD$,



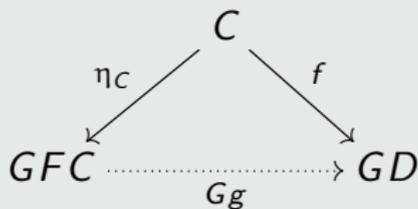
Propiedad universal

Teorema

Sean $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$ funtores. (F, G) es un par adjunto si y sólo si

existe $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{matrix} \mathcal{C}$ con η_C inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Para todo $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ y $f : C \rightarrow GD$, existe una única $g : FC \rightarrow D$ tal que



conmuta.

Unicidad

Proposición

Si (F, G) y (F, G') son pares adjuntos, entonces $G \cong G'$.

Unicidad

Proposición

Si (F, G) y (F, G') son pares adjuntos, entonces $G \cong G'$.

Si (F, G) y (F', G) son pares adjuntos, entonces $F \cong F'$.

Construcción puntual de adjuntos

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. Si existe $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Construcción puntual de adjuntos

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. Si existe $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Proposición

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor.

Construcción puntual de adjuntos

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. Si existe $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Proposición

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Supongamos que existen $\eta_C : C \rightarrow GF_C$ iniciales en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Construcción puntual de adjuntos

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. Si existe $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Proposición

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Supongamos que existen $\eta_C : C \rightarrow GF_C$ iniciales en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Entonces existe un único functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $FC = F_C$ y $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ sea una transformación natural.

Construcción puntual de adjuntos

Sean $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$ funtores. Si existe $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Proposición

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Supongamos que existen $\eta_C : C \rightarrow GF_C$ iniciales en $(\mathcal{C} \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Entonces existe un único functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $FC = F_C$ y $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ sea una transformación natural.

(F, G) es un par adjunto y η cumple la propiedad universal.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R -módulo libre F_X ,

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R -módulo libre F_X , es decir, existe un objeto inicial $i_X : X \rightarrow UF_X$ en $(X \downarrow U)$.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R -módulo libre F_X , es decir, existe un objeto inicial $i_X : X \rightarrow UF_X$ en $(X \downarrow U)$.

Por la construcción puntual, existe un único functor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ tal que $FX = F_X$ para todo X , e $i : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$ sea una transformación natural.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R -módulo libre F_X , es decir, existe un objeto inicial $i_X : X \rightarrow UF_X$ en $(X \downarrow U)$.

Por la construcción puntual, existe un único functor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ tal que $FX = F_X$ para todo X , e $i : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$ sea una transformación natural.

i satisface la propiedad universal para que (F, U) sea un par adjunto.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R -módulo libre F_X , es decir, existe un objeto inicial $i_X : X \rightarrow UF_X$ en $(X \downarrow U)$.

Por la construcción puntual, existe un único functor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ tal que $FX = F_X$ para todo X , e $i : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$ sea una transformación natural.

i satisface la propiedad universal para que (F, U) sea un par adjunto.

Los módulos libres determinan un functor libre que es el adjunto a izquierda del functor de olvido.

Preguntas

- 1 ¿Determina F_X un *functor libre* $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$?

Preguntas

- 1 ¿Determina F_X un *functor libre* $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$?

Respuestas

- 1 Sí, queda automáticamente definido en las flechas.

Preguntas

- 1 ¿Determina F_X un *functor libre* $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$?
- 2 En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$?

Respuestas

- 1 Sí, queda automáticamente definido en las flechas.

Preguntas

- 1 ¿Determina F_X un *functor libre* $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$?
- 2 En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$?

Respuestas

- 1 Sí, queda automáticamente definido en las flechas.
- 2 Es su adjunto a izquierda.

Teorema

Sean \mathcal{C} $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array}$ \mathcal{D} funtores. Si (F, G) es un par adjunto entonces:

Teorema

Sean \mathcal{C} $\xrightleftharpoons[G]{F}$ \mathcal{D} funtores. Si (F, G) es un par adjunto entonces:

- G preserva límites,
- F preserva colímites.

Teorema

Sean \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xleftarrow{G} funtores. Si (F, G) es un par adjunto entonces:

- G preserva límites,
- F preserva colímites.

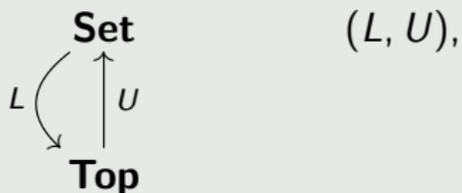
Ejemplo

El funtor de olvido $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ no tiene un adjunto a derecha.

Ejemplo

Set
↑
 U
↑
Top

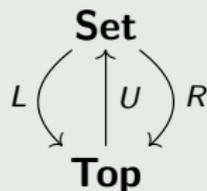
Ejemplo



$L =$ topología discreta,

Verificar que $\text{Hom}_{\text{Top}}(LA, X) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}}(A, UX)$ naturalmente.

Ejemplo



(L, U) , (U, R) son pares adjuntos.

L = topología discreta, R = topología indiscreta.

Verificar que $\text{Hom}_{\text{Set}}(UX, A) \simeq \text{Hom}_{\text{Top}}(X, RA)$ naturalmente.

Preguntas

- 1 ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites?

Preguntas

- 1 ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites?

Respuestas

- 1 U tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.

Preguntas

- 1 ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites?
- 2 ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva tanto límites como colímites?

Respuestas

- 1 U tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.

Preguntas

- 1 ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites?
- 2 ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva tanto límites como colímites?

Respuestas

- 1 U tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.
- 2 U tiene tanto un adjunto a izquierda (topología discreta) como un adjunto a derecha (topología indiscreta).

Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$.

Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$. El functor $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites pero no tiene adjunto a izquierda.

Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$. El functor $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites pero no tiene adjunto a izquierda.

Pregunta

¿Bajo qué hipótesis adicionales se cumple

G preserva límites $\Rightarrow G$ tiene un adjunto a izquierda?

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones
- 3 Teoremas de adjunción

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es **débilmente inicial** si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \rightarrow C$.

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es **débilmente inicial** si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \rightarrow C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es **débilmente inicial** si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \rightarrow C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es **débilmente inicial** si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \rightarrow C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es **débilmente inicial** si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \rightarrow C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- $(C \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es **débilmente inicial** si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \rightarrow C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- $(C \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,

entonces G es un adjunto a derecha.

Lema del objeto inicial

Lema

Sea \mathcal{A} una categoría completa. \mathcal{A} tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial \mathcal{I} .

Lema del objeto inicial

Lema

Sea \mathcal{A} una categoría completa. \mathcal{A} tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial \mathcal{I} .

Idea de la demostración.

- Sea $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$: el conjunto $\{P\}$ es débilmente inicial.

Lema del objeto inicial

Lema

Sea \mathcal{A} una categoría completa. \mathcal{A} tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial \mathcal{I} .

Idea de la demostración.

- Sea $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$: el conjunto $\{P\}$ es débilmente inicial.

- Consideramos el “igualador” del diagrama
$$P \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} P .$$

Lema del objeto inicial

Lema

Sea \mathcal{A} una categoría completa. \mathcal{A} tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial \mathcal{I} .

Idea de la demostración.

- Sea $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$: el conjunto $\{P\}$ es débilmente inicial.
- Consideramos el “igualador” del diagrama $P \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} P$.
- El objeto igualador es inicial. □

Lema

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites y \mathcal{D} es completa,

Lema

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites y \mathcal{D} es completa, entonces $(\mathcal{C} \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Lema

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites y \mathcal{D} es completa, entonces $(\mathcal{C} \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$:

Lema

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites y \mathcal{D} es completa, entonces $(\mathcal{C} \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$:

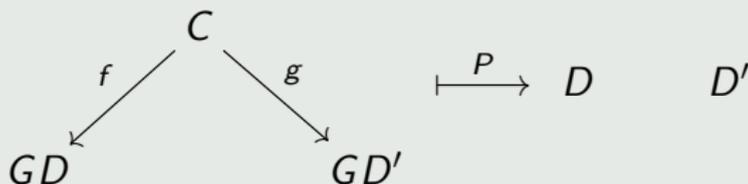
$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \swarrow f & \\ GD & & \end{array} \quad \xrightarrow{P} \quad D$$

Lema

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites y \mathcal{D} es completa, entonces $(\mathcal{C} \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$:



Lema

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites y \mathcal{D} es completa, entonces $(\mathcal{C} \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 GD & \xrightarrow{Gh} & GD'
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{P} \quad
 D \xrightarrow{h} D'$$

Lema

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites y \mathcal{D} es completa, entonces $(\mathcal{C} \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 GD & \xrightarrow{Gh} & GD'
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{P} \quad
 D \xrightarrow{h} D'$$

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites, entonces P crea límites. □

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- $(\mathcal{C} \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- $(\mathcal{C} \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,

entonces G es un adjunto a derecha.

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- $(C \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,

entonces G es un adjunto a derecha.

Demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$.

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- $(\mathcal{C} \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,

entonces G es un adjunto a derecha.

Demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$.

$(\mathcal{C} \downarrow G)$ es completa pues \mathcal{D} lo es y G preserva límites.

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- $(\mathcal{C} \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,

entonces G es un adjunto a derecha.

Demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$.

$(\mathcal{C} \downarrow G)$ es completa pues \mathcal{D} lo es y G preserva límites.

Como $(\mathcal{C} \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial y es completa, entonces admite un objeto inicial. □

Condición del conjunto solución

La última condición significa:

Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$,

\mathcal{C}

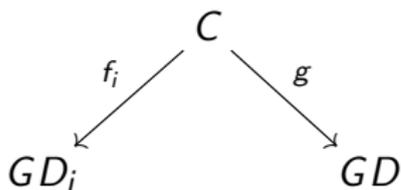
Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$, existe un conjunto \mathcal{F} de flechas $C \rightarrow GD_i$

\mathcal{C}

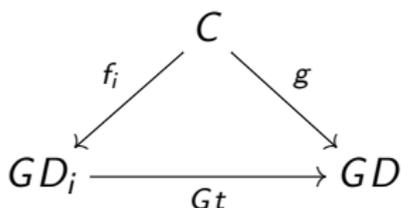
Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$, existe un conjunto \mathcal{F} de flechas $C \rightarrow GD_i$ tal que para toda $g : C \rightarrow GD$ existe una $f_i : C \rightarrow GD_i$ en \mathcal{F}



Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$, existe un conjunto \mathcal{F} de flechas $C \rightarrow GD_i$ tal que para toda $g : C \rightarrow GD$ existe una $f_i : C \rightarrow GD_i$ en \mathcal{F} y una $t : D_i \rightarrow D$ tal que



es conmutativo.

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$,

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Sea $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$.

Grupos libres

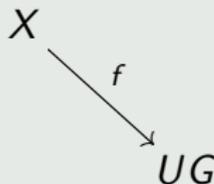
Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Sea $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$.

Sean $G \in \mathbf{Grp}$ y $f : X \rightarrow UG$ función.



Grupos libres

Ejemplo

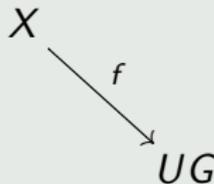
Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Sea $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$.

Sean $G \in \mathbf{Grp}$ y $f : X \rightarrow UG$ función. Sea

$H = \langle \text{Im } f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$



Grupos libres

Ejemplo

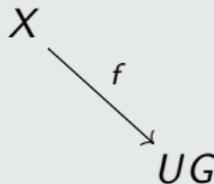
Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Sea $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$.

Sean $G \in \mathbf{Grp}$ y $f : X \rightarrow UG$ función. Sea

$H = \langle \text{Im } f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$ luego $H \simeq G_i$ para algún i .



Grupos libres

Ejemplo

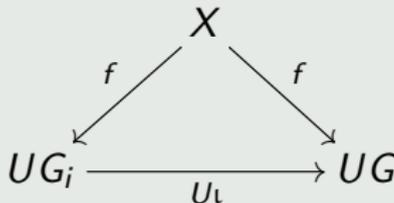
Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Sea $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$.

Sean $G \in \mathbf{Grp}$ y $f : X \rightarrow UG$ función. Sea

$H = \langle \text{Im } f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$ luego $H \simeq G_i$ para algún i .



Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- \mathcal{D} admite un cogenerador,

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- \mathcal{D} admite un cogenerador,
- \mathcal{D} es bien potenciada,

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor. Si:

- G preserva límites,
- \mathcal{D} es completa,
- \mathcal{D} admite un cogenerador,
- \mathcal{D} es bien potenciada,

entonces G es un adjunto a derecha.

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es un **conjunto cogenerador** si:

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es un **conjunto cogenerador** si: dadas f, g con $f \neq g$,

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es un **conjunto cogenerador** si: dadas f, g con $f \neq g$, existe $i \in I$ y $h : B \rightarrow K_i$ tal que $hf \neq hg$.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} K_i$$

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es un **conjunto cogenerador** si: dadas f, g con $f \neq g$, existe $i \in I$ y $h : B \rightarrow K_i$ tal que $hf \neq hg$.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} K_i$$

$K \in \mathcal{C}$ es **cogenerador** si $\{K\}$ es un conjunto cogenerador.

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ es un **conjunto cogenerador** si: dadas f, g con $f \neq g$, existe $i \in I$ y $h : B \rightarrow K_i$ tal que $hf \neq hg$.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} K_i$$

$K \in \mathcal{C}$ es **cogenerador** si $\{K\}$ es un conjunto cogenerador.

Proposición

Sea \mathcal{C} completa. $K \in \mathcal{C}$ es cogenerador \Leftrightarrow para todo $X \in \mathcal{C}$ existe un monomorfismo $X \hookrightarrow \prod K$.

Subobjetos

Definición

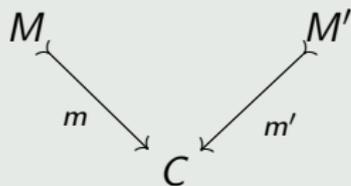
Sea $C \in \mathcal{C}$.

C

Subobjetos

Definición

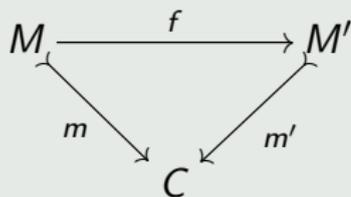
Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \rightarrow C$ y $m' : M' \rightarrow C$ son monomorfismos,



Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \rightarrow C$ y $m' : M' \rightarrow C$ son monomorfismos,

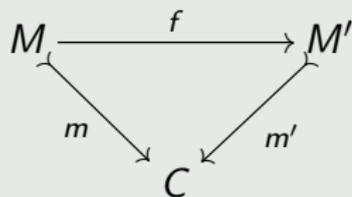


$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = m$.

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \rightarrow C$ y $m' : M' \rightarrow C$ son monomorfismos,



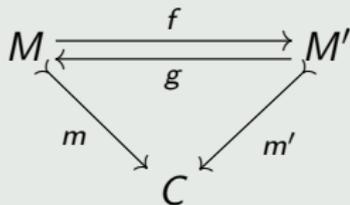
$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = m$.

Definimos $m \sim m'$ si: $m \leq m'$,

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \rightarrow C$ y $m' : M' \rightarrow C$ son monomorfismos,



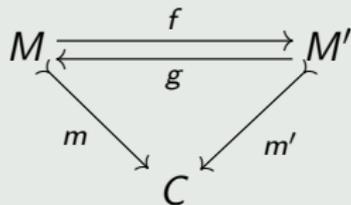
$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = f$.

Definimos $m \sim m'$ si: $m \leq m'$, $m' \leq m$.

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \rightarrow C$ y $m' : M' \rightarrow C$ son monomorfismos,



$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = f$.

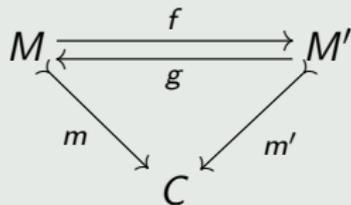
Definimos $m \sim m'$ si: $m \leq m'$, $m' \leq m$.

Un **subobjeto** de C es una clase de equivalencia de monomorfismos hacia C bajo \sim .

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \rightarrow C$ y $m' : M' \rightarrow C$ son monomorfismos,



$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = m$.

Definimos $m \sim m'$ si: $m \leq m'$, $m' \leq m$.

Un **subobjeto** de C es una clase de equivalencia de monomorfismos hacia C bajo \sim .

\mathcal{C} es **bien potenciada** si todo C admite un *conjunto* de subobjetos.

Proposición

Sea \mathcal{C} completa y bien potenciada. Para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un menor subobjeto de C .

Proposición

Sea \mathcal{C} completa y bien potenciada. Para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un menor subobjeto de C .

Idea de la demostración.

Si $\{ M_i \xrightarrow{m_i} C \}_{i \in I}$ es un conjunto completo de representantes de subobjetos de C ,

$$\begin{array}{ccc} & M_2 & \\ & \downarrow m_2 & \\ M_1 & \xrightarrow{m_1} & C \end{array}$$

Proposición

Sea \mathcal{C} completa y bien potenciada. Para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un menor subobjeto de C .

Idea de la demostración.

Si $\{ M_i \xrightarrow{m_i} C \}_{i \in I}$ es un conjunto completo de representantes de subobjetos de C , tomamos su “pullback”.

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow m_2 \\
 M_1 & \xrightarrow{m_1} & C
 \end{array}$$

Proposición

Sea \mathcal{C} completa y bien potenciada. Para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un menor subobjeto de C .

Idea de la demostración.

Si $\{ M_i \xrightarrow{m_i} C \}_{i \in I}$ es un conjunto completo de representantes de subobjetos de C , tomamos su “pullback”.

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\
 \downarrow p_1 & \searrow m & \downarrow m_2 \\
 M_1 & \xrightarrow{m_1} & C
 \end{array}$$



Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

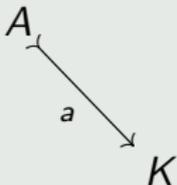
Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K .

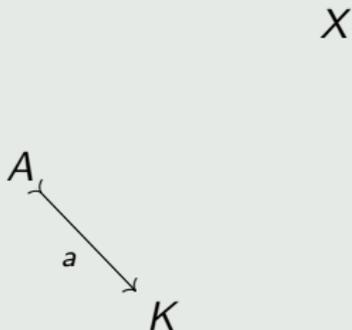


Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K . Sea $X \in \mathcal{A}$.

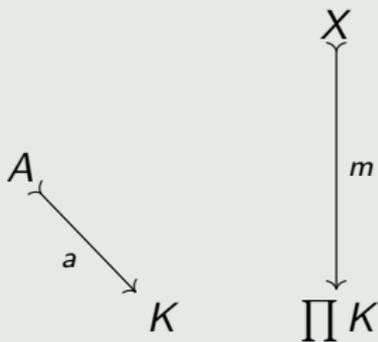


Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K . Sea $X \in \mathcal{A}$.
Existe m monomorfismo;

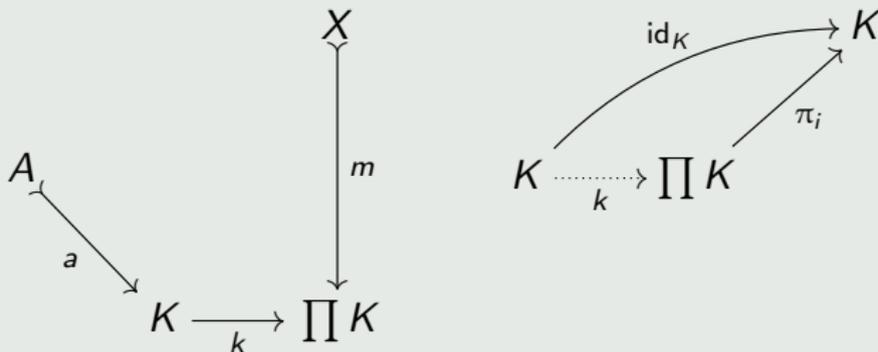


Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K . Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k .

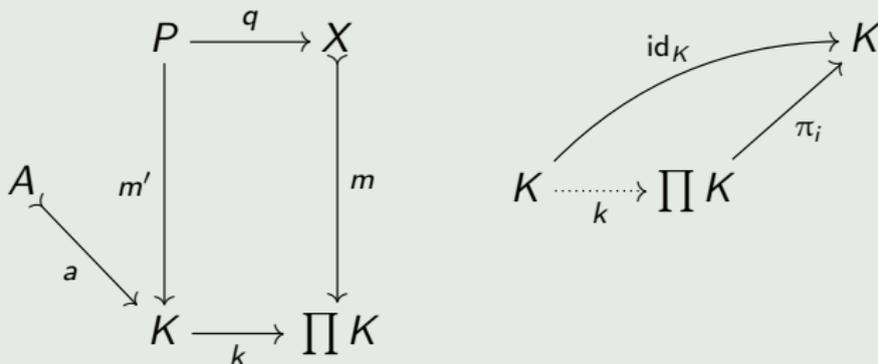


Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K . Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k . Tomamos el pullback.

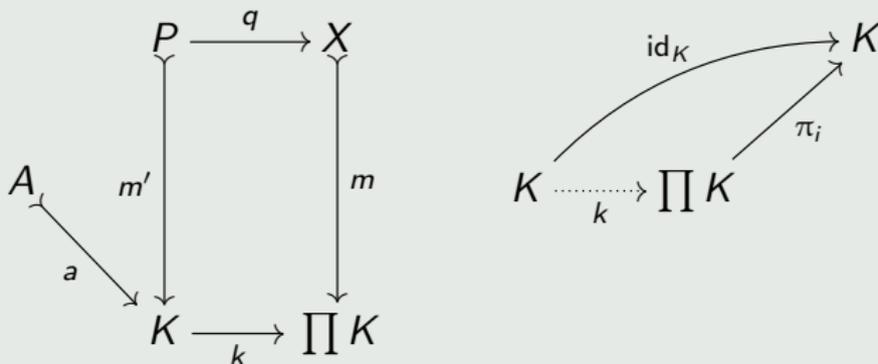


Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K . Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k . Tomamos el pullback. m' es un monomorfismo.

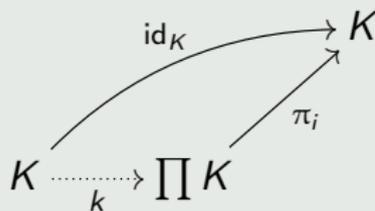
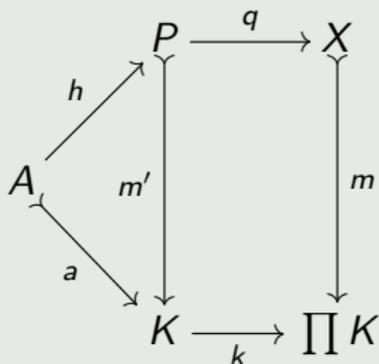


Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K . Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k . Tomamos el pullback. m' es un monomorfismo. Existe h .

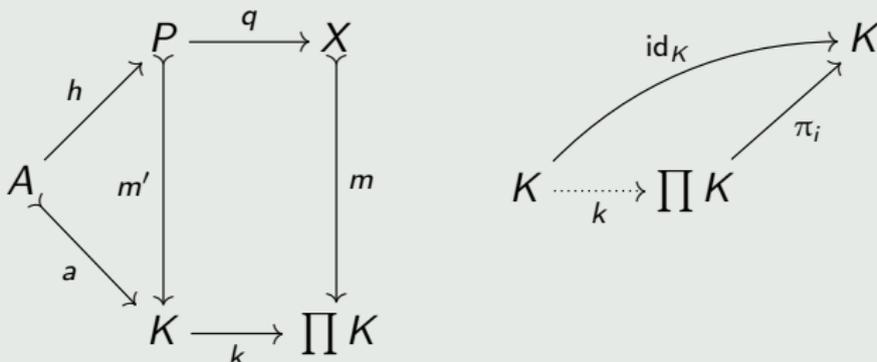


Lema

Si \mathcal{A} es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces \mathcal{A} tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K . Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k . Tomamos el pullback. m' es un monomorfismo. Existe h . Entonces $qh : A \rightarrow X$.



Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites, con \mathcal{D} completa, bien potenciada y con un cogenerador $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ es un adjunto a derecha.

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites, con \mathcal{D} completa, bien potenciada y con un cogenerador $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ es un adjunto a derecha.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Basta ver que $(C \downarrow G)$ es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites, con \mathcal{D} completa, bien potenciada y con un cogenerador $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ es un adjunto a derecha.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Basta ver que $(C \downarrow G)$ es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- \mathcal{D} completa, G preserva límites $\Rightarrow (C \downarrow G)$ completa.

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites, con \mathcal{D} completa, bien potenciada y con un cogenerador $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ es un adjunto a derecha.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Basta ver que $(C \downarrow G)$ es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- \mathcal{D} completa, G preserva límites $\Rightarrow (C \downarrow G)$ completa.
- Los subobjetos de $f : C \rightarrow GB$ están representados por flechas $f_0 : C \rightarrow GB_0$, donde $B_0 \rightarrow B$ representa un subobjeto.

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ preserva límites, con \mathcal{D} completa, bien potenciada y con un cogenerador $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ es un adjunto a derecha.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Basta ver que $(C \downarrow G)$ es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- \mathcal{D} completa, G preserva límites $\Rightarrow (C \downarrow G)$ completa.
- Los subobjetos de $f : C \rightarrow GB$ están representados por flechas $f_0 : C \rightarrow GB_0$, donde $B_0 \rightarrow B$ representa un subobjeto.
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GK)$ es un conjunto cogenerador de $(C \downarrow G)$. □

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$;

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$; veamos que $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ tiene un adjunto a izquierda $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$.

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$; veamos que $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ tiene un adjunto a izquierda $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$.

Existe r si y sólo si para cada $X \in \mathbf{Top}$

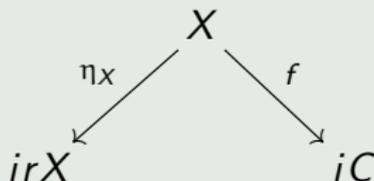
X

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$; veamos que $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ tiene un adjunto a izquierda $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$.

Existe r si y sólo si para cada $X \in \mathbf{Top}$ existe $rX \in \mathbf{CompHaus}$ y $\eta_X : X \rightarrow irX$ tal que para cada $C \in \mathbf{CompHaus}$ y $f : X \rightarrow iC$



Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$; veamos que $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ tiene un adjunto a izquierda $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$.

Existe r si y sólo si para cada $X \in \mathbf{Top}$ existe $rX \in \mathbf{CompHaus}$ y $\eta_X : X \rightarrow irX$ tal que para cada $C \in \mathbf{CompHaus}$ y $f : X \rightarrow iC$ existe una única $g : rX \rightarrow C$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \eta_X \swarrow & & \searrow f \\
 irX & \cdots \cdots \cdots & iC \\
 & g &
 \end{array}$$

conmuta.

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva límites,

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn $\Rightarrow [0, 1] \in \mathbf{CompHaus}$ es un cogenerador:

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn $\Rightarrow [0, 1] \in \mathbf{CompHaus}$ es un cogenerador:

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C$$

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn $\Rightarrow [0, 1] \in \mathbf{CompHaus}$ es un cogenerador:

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \longrightarrow [0, 1].$$

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn $\Rightarrow [0, 1] \in \mathbf{CompHaus}$ es un cogenerador:

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \longrightarrow [0, 1].$$

Esto exhibe **CompHaus** como *subcategoría reflexiva* de **Top**.