**GAL II - Zrób to sam! Klasyfikacja izometrii afinicznych**

Niech $H$ będzie przestrzenią afiniczną euklidesową. Dla $f : H \to H$ przekształcenia afinicznego, niech

$$\mathrm{Fix}(f) := \{p \in H : f(p) = p\} \subset H$$

będzie zbiorem punktów stałych $f$.

i. Wykazać, że $\mathrm{Fix}(f)$ składa się z jednego punktu wtedy i tylko wtedy, gdy 1 nie jest wartością własną $f'$.

ii. Wykazać, że jeśli $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ i 1 jest wartością własną $f'$, to $\mathrm{Fix}(f) = a + V_{(1)}^{f'}$ dla dowolnego $a \in \mathrm{Fix}(f)$.

Mamy więc możliwości: 1 nie jest wartością własną $f'$, wtedy $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$, albo 1 jest wartością własną $f'$, wtedy albo $\mathrm{Fix}(f)$ jest pusty, albo $\mathrm{Fix}(f)$ jest warstwą $V_{(1)}^{f'}$. Przykłady z $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ to np. przesunięcie, albo w $\mathbb{R}^2$ odbicie względem prostej złożone z przesunięciem względem wektora równoległego do tej prostej. Więcej poniżej.

Teraz zakładamy, że $f$ jest izometrią. Udowodnimy, że każda taka izometria afiniczna jest złożeniem przesunięcia i izometrii afinicznej posiadającej punkt stały. Jeśli 1 nie jest wartością własną $f'$, to sama $f$ już posiada punkt stały, więc załóżmy, że $f$ jest izometrią taką, że 1 jest jej wartością własną.

iii. Wykazać, że istnieje jedyna izometria afiniczna $g : H \to H$ i jedyny wektor własny $v \in V_{(1)}^{f'}$ takie, że $\mathrm{Fix}(g) \neq \emptyset$, $T(\mathrm{Fix}(g)) = V_{(1)}^{f'}$, oraz $f = t_v \circ g = g \circ t_v$, gdzie $t_v : H \to H$ to przesunięcie o $v$.

W $\mathbb{R}^n$, skoro przekształcenia afiniczne wyglądają jak $f(x) = Ax + b$ (Wniosek 9.1 z notatek) i możemy myśleć o $b$ jako o punkcie lub o wektorze, to następujący podpunkt ma sens i zadaje prostą charakteryzację tego, kiedy $\mathrm{Fix}(f)$ jest pusty albo nie.

iv. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie izometrią afiniczną, więc $f(x) = Ax + b$, $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonalna. Udowodnić, że $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy albo 1 nie jest wartością własną $A$, albo 1 jest wartością własną $A$ i $b \in (V_{(1)}^{A})^{\perp}$.

Punkty stałe pomagają w klasyfikowaniu izometrii afinicznych w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Na przykład, możecie udowodnić, że:

W $\mathbb{R}^2$, jeśli $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, to $f$ jest obrotem jeśli zachowuje orientację, inaczej to odbicie. Jeśli $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, to jest albo przesunięcie , albo złożenie odbicia względem prostej z przesunięciem względem wektora równoległego tej prostej.

W $\mathbb{R}^3$, jeśli $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ i $f$ zachowuje orientację, to $f$ jest identycznością albo obrotem wokół prostej $\mathrm{Fix}(f)$. Jeśli $f$ zmienia orientację, to $f$ jest albo odbiciem względem płaszczyzny $\mathrm{Fix}(f)$, albo złożeniem obrotu wokół prostej $L$ z odbiciem względem płaszczyzny $M$ prostopadłej do $L$: w tym przypadku jedyny punkt stały to $L \cap M$.

Jeśli $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$: jeśli $f$ zachowuje orientację, to $f$ jest albo przesunięciem, albo złożeniem obrotu z przesunięciem równoległym osi obrotu: to ruch taki jak się robi śrubokrętem. Jeśli $f$ zmienia orientację, to $f$ jest złożeniem odbicia względem płaszczyzny z przesunięciem względem wektora równoległego do tej płaszczyzny.

Zróbcie tabelki i rysunki dla każdego przypadku!