**Ejercicio 5, práctico 10**: Hallar $\sqrt{5}$ con error menor a 0,01 mediante el desarrollo de Taylor de la función $\sqrt{x+4}$ en $x=0$.

La idea es que 4 tiene una raíz cuadrada sencilla, y 5 está cerca de cuatro, entonces podemos usar Taylor para explotar esto.

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+4}$. Vamos a hacer un polinomio de Taylor en cero. Nos va a resultar fácil, justamente porque $\sqrt{4}=2$. Después vamos a evaluar el polinomio de Taylor en 1. No nos va a dar el valor exacto: en general, sólo podemos asegurar que el polinomio de Taylor coincide con la función en el punto mismo en el que desarrollamos (en este caso, en 0), pero nos vamos a poder acercar cuanto queramos a medida que aumentamos el grado del polinomio.[1] Como 1 no está tan lejos de 0, podemos esperar no tener que llegar hasta el polinomio de Taylor de grado 530.

Podemos entonces hacer Taylor de orden 1 y estimar el resto para ver si funciona. Hagámoslo directamente con orden 2. Mediante sencillos cálculos obtenemos:

| Función | Valor en $x\in[0,1]$ | Valor en $x=0$ |
|---|---|---|
| $f$ | $\sqrt{x+4}$ | $2$ |
| $f'$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$ | $\dfrac{1}{4}$ |
| $f''$ | $-\dfrac{1}{4(x+4)^{3/2}}$ | $-\dfrac{1}{32}$ |
| $f'''$ | $\dfrac{3}{8(x+4)^{5/2}}$ | $\dfrac{3}{256}$ |

Por lo tanto el polinomio de Taylor de grado 2 en cero es:

$$T_2f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=2+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}$$

Nos interesa evaluar este polinomio en 1. Por lo tanto, la fórmula de Lagrange nos dice que existe un $c\in[0,1]$ tal que:

$$R_2f(x)=\frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

Ahora bien, la función $f'''$ es decreciente en $[0,1]$ (¡verificar!), por lo tanto lo máximo que puede valer $R_2f(x)$ en $[0,1]$ es $R_2f(0)$:

$$|R_2f(x)|\leq\left|\frac{f'''(0)}{6}\right|=\frac{3}{256\cdot 6}=\frac{1}{512}<\frac{1}{100}$$

Hemos terminado: tenemos que

$$\sqrt{5}\approx 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$$

con un error de menos de $\frac{1}{512}$, y en particular de menos de $\frac{1}{100}$.

Dicho esto, verifiquemos con ayuda de la tecnología moderna que los cálculos que hicimos están bien. En efecto,

$$\sqrt{5}-\frac{143}{64}=0,001693<0{,}001953=\frac{1}{512}$$

[1] Nos piden acercarnos a menos de $\frac{1}{100}$: en este caso se puede, pero por ejemplo con la función del ejercicio 3) no hubiéramos podido ni eso. No hemos demostrado que nos podemos acercar *cuanto queramos* por polinomios de Taylor centrados en cero a $f(1)$, i.e. que el resto $R_nf(1)$ tiende a cero cuando $n\to+\infty$. Pero es cierto que sí podríamos, porque podemos expresar $f$ como una serie de Taylor centrada en 0 que converge puntualmente (y uniformemente) a $f$ en el intervalo $[0,1]$, ya que el radio de convergencia de la serie de Taylor en 0 es mayor que uno. Ver capítulo 11 de Apostol para profundizar en esto.