Ejercicio: Suponiendo que la integral conmuta con la suma infinita, probar la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx$$

(Sugerencia: $\frac{1}{x^x} = e^{-x\log x}$, y desarrollarla como serie de Taylor.)

Solución: Como $e^x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, entonces:

$$\frac{1}{x^x} = e^{-x\log x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k (\log x)^k \tag{1}$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k (\log x)^k\, dx$.

Afirmación: $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k (\log x)^k\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k}{k!} x^k (\log x)^k\, dx$ (su demostración excede al curso).

Demostración: Sabemos que si $g_n \rightrightarrows g$ (convergencia uniforme), entonces el límite de las integrales es la integral del límite, i.e. $\int_0^1 g(x)\, dx = \lim\limits_n \int_0^1 g_n(x)\, dx$. En nuestro caso, definimos:

$$f_k(x) := \frac{(-1)^k}{k!} x^k (\log x)^k, \qquad g_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Queremos entonces probar que (g_n) converge uniformemente, pues en ese caso:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\, dx = \lim_n \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\, dx \overset{\text{linealidad}}{=} \lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx$$

Para ver que (g_n) converge uniformemente, usamos el criterio M de Weierstrass: si $|f_n(x)| \leqslant M_n$ para todo n y para todo $x \in (0,1)$, y se tiene que $\sum M_n$ converge, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente.

Es un ejercicio sencillo verificar que $x \in (0,1) \Rightarrow 0 \leqslant |x\log x| \leqslant 1$. Por lo tanto, si $C = \max\{x\,|\log x| : x \in (0,1)\}$, se tiene:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\log x)^n \right| \leqslant \frac{x^n\,|\log x|^n}{n!} \leqslant \frac{C}{n!} =: M_n$$

y M_n es tal que $\sum M_n = C \sum \frac{1}{n!} < \infty$, demostrando la afirmación. $\square$

Queremos entonces calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k (-\log x)^k\, dx$.

Hagamos el cambio de variable $u = -\log x$. Se obtiene $x = e^{-u}$, $dx = -e^{-u} du$, $u(0) = +\infty$, $u(1) = 0$, y por lo tanto:

$$A := \int_0^1 x^k (-\log x)^k\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-ku} u^k e^{-u}\, du = \int_0^{+\infty} u^k e^{-(k+1)u}\, du$$

Ahora hagamos el cambio de variable $v = (k+1)u$, de donde $u = \frac{v}{k+1}$, $du = \frac{dv}{k+1}$:

$$A = \frac{1}{k+1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{v}{k+1} \right)^k e^{-v}\, dv = \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} v^k e^{-v}\, dv = \frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)^{k+1}}$$
$$= \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$$

donde Γ denota la función Gamma del ejercicio 7 del práctico 14. En conclusión,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k (-\log x)^k\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k!(k+1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \overset{k+1=n}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

terminando la demostración.