Ejercicio 13, práctico 5: El objetivo de este ejercicio es dar un ejemplo de una función definida en todo $\mathbb{R}$ continua en cada irracional y discontinua en cada racional.

a) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que verifica la condición:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, F_\varepsilon \text{ conjunto finito que verifica } |f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in (a, b) \setminus F_\varepsilon \tag{1}$$

Probar que f es continua en $c \in (a, b)$ si y sólo si $f(c) = 0$.

b) (*Función de Thomae*) Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } |x| = \frac{p}{q} \text{ con } \mathrm{mcd}(p, q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Probar que f es discontinua en cada racional de $(0, 1)$ y continua en cada irracional de $(0, 1)$.

Solución:

a) ($\Rightarrow$) Sea f una función que satisface (1). Informalmente, lo que pasa es que la función es arbitrariamente chica a menos de un conjunto finito de puntos. Por muy chico que elijamos ε, la función f está adentro de una banda horizontal $(-\varepsilon, \varepsilon)$ centrada en cero, a menos de un conjunto finito de puntos que está por arriba.

Supongamos que f es continua en $c \in (a, b)$. Sea $\varepsilon > 0$. La continuidad de f en c me dice que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \tag{2}$$

Por otro lado, puedo elegir $\delta_2 > 0$ (que depende de ε) para que el entorno reducido de centro c y y radio δ_2, $(c - \delta_2, c + \delta_2)^* := (c - \delta_2, c) \cup (c, c + \delta_2)$ cumpla que

$$(c - \delta_2, c + \delta_2)^* \cap F_\varepsilon = \emptyset$$

En efecto, basta tomar δ_2 más chico que la distancia de c al punto de F_ε más cercano a c (sin contar a c si éste llegara a pertenecer a F_ϵ).

Formalmente, lo que hacemos es tomar δ_2 menor a la distancia del punto c al conjunto F_ϵ, i.e. $\delta_2 < d(c, F_\varepsilon) := \min\{d(c, x) : x \in F_\varepsilon\}$.

Es necesario considerar el entorno *reducido* porque podría suceder que $c \in F_\varepsilon$, en cuyo caso $(c - \delta_2, c + \delta_2) \cap F_\varepsilon \supset \{c\}$ y por lo tanto no es vacío, para ningún $\delta_2 > 0$.

Conseguimos entonces, por la condición (1), que:

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

Ahora tomo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, de tal manera que se cumplen tanto la condición (3) como (2) si consideramos el entorno reducido de centro c y radio δ, obteniendo:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - f(c)| < \varepsilon \\ |f(x)| < \varepsilon \end{cases}$$

Sumando las dos inecuaciones se obtiene, gracias a la desigualdad triangular:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow 2\varepsilon > |f(x) - f(c)| + |f(x)| \geq |f(c)|$$

es decir,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(c)| < 2\varepsilon$$

Como ε es arbitrario, esto significa que $f(c) = 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $f(c) = 0$. Sea $\epsilon > 0$. Como antes, puedo elegir $\delta > 0$ para que $(c - \delta, c + \delta)^* \cap F_\varepsilon = \emptyset$. De esta manera, la condición (1) nos da que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| = |f(x)| < \epsilon$$

lo que nos dice por definición de continuidad en un punto que f es continua en c.

b) La parte a) nos dice que basta ver que la función f satisface la condición (1). En efecto, en ese caso f sólo es continua en los puntos donde vale cero, y nuestra función f vale cero exactamente en los irracionales de $(0, 1)$.

Sea $\varepsilon > 0$. La propiedad arquimediana de los números reales implica que existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Definimos

$$F_\varepsilon := \left\{ \frac{k}{n} : 0 < k < n, n \leq N \right\}$$

Por ejemplo, si $N = 5$, $F_\varepsilon = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$. De esta manera, las fracciones irreducibles que están en $(0, 1) \setminus F_\varepsilon$ tienen todas denominador mayor que 5.

Este caso particular ilustra el caso general. Es decir, si $x \in (0, 1) \setminus F_\varepsilon$ es una fracción irreducible, necesariamente tiene denominador mayor que N, por lo tanto necesariamente $|f(x)| < \frac{1}{N} < \varepsilon$ para todo $x \in (0, 1) \setminus F_\varepsilon$ (porque si es irracional lo satisface trivialmente). Esto prueba que f satisface la condición (1), concluyendo el ejercicio.